Дискретная математика

том 2 выпуск 2 * 1990

УДК 519.5

О САМОКОРРЕКТИРУЮЩИХСЯ СХЕМАХ ИЗ ФУНКЦИОНАЛЬНЫХ ЭЛЕМЕНТОВ ДЛЯ ЛИНЕЙНОЙ ФУНКЦИИ

Н. И. Турдалиев

Построены нетривиальные самокорректирующиеся схемы из функциональных элементов для линейной булевой функции, имеющие меньшую асимптотическую сложность, чем схемы, предложенные ранее.

В работе рассматривается задача построения нетривиальных самокорректирующихся схем из функциональных элементов для линейной булевой функции и приводится соответствующий метод синтеза.

Схемы, рассматриваемые ниже, состоят из элементов двух типов — надежных и ненадежных. Надежный элемент всегда работает правильно, т. е. всегда реализует приписанную ему функцию. Ненадежный элемент при правильной работе реализует приписанную ему функцию, а при неправильной работе — любую функцию от подаваемых на его входы переменных; разные ненадежные элементы при неправильной работе могут выдавать разные функции.

Схему из функциональных элементов будем называть *a-самокорректирующейся*, если при неправильной работе произвольных a' ($a' \leqslant a$) ненадежных элементов она реализует ту же функцию, что и при правильной работе всех элементов.

Синтез схем будем рассматривать в некотором конечном полном базисе Б, относительно которого предполагается, что его «надежная» часть $Б^1$ и «ненадежная» часть $Б^2$ совпадают. Каждому элементу базиса приписано некоторое положительное число — его вес. Вес ненадежного элемента положим равным 1, вес надежного элемента — равным N ($N > 1$). Сумма весов всех элементов схемы S называется ее сложностью и обозначается через $L(S)$. Сложность функции f в $Б^i$ ($i = 1, 2$) определяется как $\min L(S)$, где минимум берется по всем схемам, состоящим из элементов $Б^i$, реализующим функцию f, и обозначается через $L_i(f)$.

Схемы, реализующие f в $Б^i$ ($i = 1, 2$), сложность которых совпадает с $L_i(f)$, будем называть *i-минимальными*. Через $L^a(f)$ обозначим $\min L(S)$, где минимум берется по всем a-самокорректирующимся схемам S, реализующим функцию f.

Далее мы будем опираться на работу [1].

Рассмотрим линейную функцию алгебры логики

$$l_n(x_1, x_2, \ldots, x_n) = x_1 \oplus x_2 \oplus \ldots \oplus x_n,$$

где $\oplus$ означает сложение по модулю 2. Это представление соответствует представлению (1) из [1] при $l = 1$, $\varphi(x) \doteq x$, $\psi(x) = x$.

Пусть $r =]n/k[$, где параметр k — натуральное число.

© Н. И. Турдалиев, 1990

Рассмотрим блок E с $n+r$ входами $\xi_1, \ldots, \xi_n, \eta_1, \ldots, \eta_r$ и k выходами $\varepsilon_1, \varepsilon_2, \ldots, \varepsilon_k$, при этом

$$\varepsilon_i = \xi_i \& \eta_1 \vee \xi_{k+i} \& \eta_2 \vee \ldots \vee \xi_{(r-1)k+i} \& \eta_r, \qquad i = 1, \ldots, k$$

(здесь $\xi_j \equiv 0$ при $j > n$).

Обозначим через u и w следующие функции:

$$u(z) = \bar{z}, \qquad w(z_1, z_2, z_3, z_4) = z_1 \& z_2 \vee z_3 \& z_4.$$

Теорема 1. *При любом натуральном n*

$$L^a(l_n) \leqslant \begin{cases} \min\{L_1(l_n), \ ]a/2[\,(nL_2(u) + 2nL_2(w)) + aL_2(E) + c_1k + c_2r\}, \\ \qquad\qquad \text{если } a = 2t-1, \ t = 1, 2, \ldots, \\ \min\{L_1(l_n), \ ]a/2[\,(nL_2(u) + 2nL_2(w)) + rL_2(l_k) + \\ \qquad + aL_2(E) + c_1k + c_2r\}, \ \text{если } a = 2t, \ t = 1, 2, \ldots, \end{cases}$$

где c_1, c_2 — некоторые константы, зависящие от базиса.

Доказательство сведем к доказательству теоремы 1 из [1].

Рассмотрим схему Σ (рис. 1); в этой схеме знаком u обозначена 2-минимальная подсхема, реализующая функцию u, а знаками $w(\bar{\zeta}_1, \zeta_2, \zeta_1, \zeta_3)$

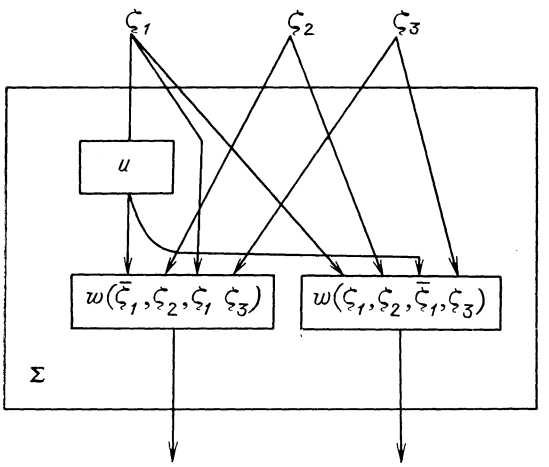

Рис. 1

и $w(\zeta_1, \zeta_2, \bar{\zeta}_1, \zeta_3)$ обозначены 2-минимальные подсхемы, реализующие функцию w. На входы последних двух схем подаются $\zeta_1, \zeta_2, \zeta_3$ и выход подсхемы u таким образом, что на выходах этих схем реализуются две различные функции $w(\bar{\zeta}_1, \zeta_2, \zeta_1, \zeta_3)$ и $w(\zeta_1, \zeta_2, \bar{\zeta}_1, \zeta_3)$. Укажем на два свойства схемы Σ.

Свойство 1. Пусть входы $\zeta_1, \zeta_2, \zeta_3$ принимают значения $\sigma_1, \sigma_2, \bar{\sigma}_2$ соответственно и в схеме Σ один элемент неисправен. Тогда хотя бы одно из значений на выходах схемы Σ будет правильным.

Действительно, если неисправен элемент одного из блоков, реализующих функцию w, то утверждение очевидно. Пусть неисправен элемент блока, реализующего u, и при этом значение на выходе блока равно σ_1. Тогда оба значения на выходах схемы Σ совпадают и равны σ_1, в то время как $w(\bar{\sigma}_1, \sigma_2, \sigma_1, \bar{\sigma}_2) = \sigma_1 \oplus \sigma_2 = \bar{w}(\sigma_1, \sigma_2, \bar{\sigma}_1, \bar{\sigma}_2)$. Значит, одно из значений на выходах схемы Σ будет правильным.

Свойство 2. Пусть входы $\zeta_1, \zeta_2, \zeta_3$ принимают значения $\sigma_1, \sigma_2, \sigma_2$ соответственно и в Σ нет неисправных элементов. Тогда оба значения на выходах схемы Σ совпадают и равны σ_2.

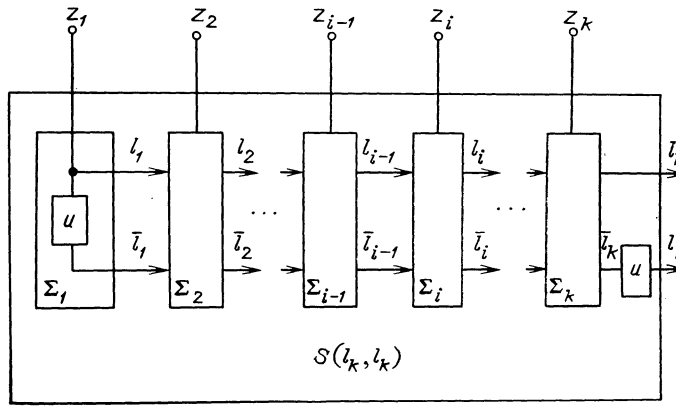
z_1
z_2
z_{i-1}
z_i
z_k
l_1
l_2
l_{i-1}
l_i
l_k
$\bar{l}_1$
$\bar{l}_2$
$\bar{l}_{i-1}$
$\bar{l}_i$
$\bar{l}_k$
u
Σ_1
Σ_2
Σ_{i-1}
Σ_i
Σ_k
$S(l_k, l_k)$

Рис. 2

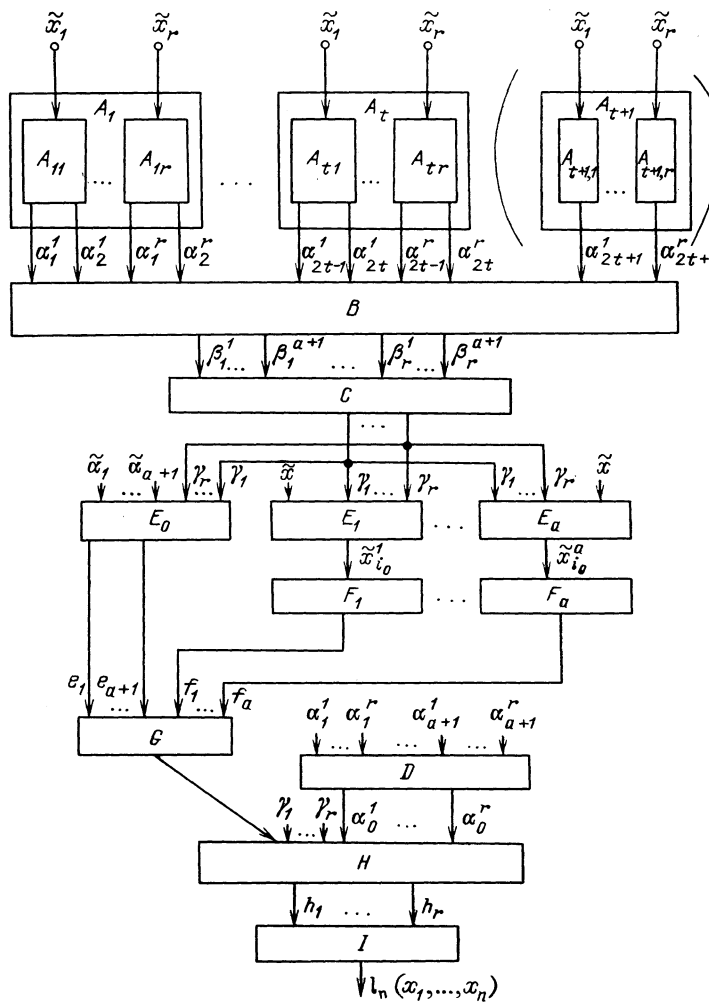
$\tilde{x}_1$
$\tilde{x}_r$
A_1
A_{11}
A_{1r}
A_t
A_{t1}
A_{tr}
A_{t+1}
$A_{t+1,1}$
$A_{t+1,r}$
α_1^1 α_2^1 α_1^r α_2^r
α_{2t-1}^1 α_{2t}^1 α_{2t-1}^r α_{2t}^r
α_{2t+1}^1 α_{2t+1}^r
B
$\beta_1^1 \ldots$ β_1^{a+1} $\beta_r^1 \ldots$ β_r^{a+1}
C
$\tilde{\alpha}_1$ $\tilde{\alpha}_{a+1}$ γ_r γ_1 $\tilde{x}$ $\gamma_1 \ldots$ γ_r $\gamma_1 \ldots$ γ_r $\tilde{x}$
E_0
E_1
E_a
$\tilde{x}_{i_0}^1$
$\tilde{x}_{i_0}^a$
F_1
F_a
e_1 e_{a+1} f_1 f_a
G
α_1^1 α_1^r α_{a+1}^1 α_{a+1}^r
D
γ_1 γ_r α_0^1 α_0^r
H
h_1 h_r
I
$l_n(x_1, \ldots, x_n)$

Рис. 3

Это свойство следует из определения схемы Σ.

Рассмотрим схему $S(l_k, l_k)$, изображенную на рис. 2. Схема состоит из k последовательно соединенных блоков $\Sigma_1, \ldots, \Sigma_k$, где каждый блок Σ_i $(i=2, \ldots, k)$ совпадает со схемой Σ, причем входам ζ_1, ζ_2 и ζ_3 соответствуют z_i (входная переменная), l_{i-1} и $\overline{l}_{i-1}$ (выходы блока Σ_{i-1}), а $l_i = z_1 \oplus \ldots \oplus z_i$, $\overline{l}_i = z_1 \oplus \ldots \oplus z_i \oplus 1$ $(i=1, \ldots, k)$. Из свойств схемы Σ непосредственно следуют следующие два свойства схемы $S(l_k, l_k)$.

Свойство 1. Пусть на входы $S(l_k, l_k)$ подается набор $\tilde{\sigma}=(\sigma_1, \ldots, \sigma_k)$. При наличии одного неисправного элемента в $S(l_k, l_k)$ хотя бы на одном выходе схемы будет правильное значение $(l_k(\tilde{\sigma}))$.

Свойство 2. Пусть на входном наборе $\tilde{\sigma}=(\sigma_1, \ldots, \sigma_k)$ на обоих выходах схемы будут неправильные значения $(\overline{l}_k(\tilde{\sigma}))$. Тогда в $S(l_k, l_k)$ имеется не менее двух неисправных элементов.

Перейдем к доказательству теоремы. Для случая $a=2t-1$ $(t=1, 2, \ldots)$ предлагается схема S^{2t-1}, изображенная на рис. 3 (ср. со схемой S_1 из [1]), а для случая $a=2t$ $(t=1, 2, \ldots)$—схема S^{2t} (рис. 3); схема S^{2t} получается из S^{2t-1} добавлением блока A_{t+1}. Блоки A_j $(j=1, \ldots, t+1)$, E_s $(s=1, \ldots, a)$ состоят лишь из ненадежных элементов, остальные блоки схемы состоят из надежных элементов. Опишем подробнее схемы S^{2t}, S^{2t-1} и докажем, что эти схемы реализуют l_{2t}, l_{2t-1}, являются a-самокорректирующимися и имеют требуемую сложность.

Блоки $A_1, \ldots, A_t$ устроены одинаково; каждый из этих блоков имеет $2r$ выходов и n входов, на которые подаются переменные $x_1, \ldots, x_n$. Блок A_j $(j \in \{1, \ldots, t\})$ в свою очередь разбивается на одинаково устроенные блоки $A_{j1}, \ldots, A_{jr}$. Блок A_{ji} совпадает со схемой $S(l_k, l_k)$ (A_{jr} совпадает с $S(l_{k'}, l_{k'})$); на входы блока A_{ji} подается набор $\tilde{x}_i=(x_{(i-1)k+1}, \ldots, x_{ik})$ $(i=1, \ldots, r$; $\tilde{x}_r=(x_{(r-1)k+1}, \ldots, x_n))$.

Блок A_{t+1} (для случая $a=2t$) состоит из непересекающихся блоков $A_{t+1,1}, A_{t+1,2}, \ldots, A_{t+1,r}$, на входы которых подаются соответственно наборы $\tilde{x}_1, \tilde{x}_2, \ldots, \tilde{x}_r$. Каждый блок $A_{t+1,i}$ $(i=1, \ldots, r)$ совпадает с 2-минимальной схемой, реализующей функцию $l_k(\tilde{x}_i)$ ($l_{k'}(\tilde{x}_r)$ при $i=r$).

Обозначим выходы блока A_{ji} $(j=1, \ldots, t;\ i=1, \ldots, r)$ через α^i_{2j-1}, α^i_{2j}, а выходы блока $A_{t+1,i}$ (при $a=2t$) через α^i_{t+1} $(i=1, \ldots, r)$. Пусть в блоках $A_1, \ldots, A_t$ (и A_{t+1} при $a=2t$) неисправны a_1 элементов $(a_1 \leqslant a)$. Из свойств схемы $S(l_k, l_k)$ следует, что среди чисел $\alpha^1_1, \ldots, \alpha^r_1, \ldots, \alpha^1_{a+1}, \ldots, \alpha^r_{a+1}$ не более чем a_1 неправильных значений.

Подсчитаем сложность блоков A_{ji}:

$$L(A_{ji}) \leqslant kL_2(u) + 2(k-1)L_2(w) \quad (j=1, \ldots, t;\ i=1, \ldots, r),$$
$$L(A_{t+1,i}) \leqslant L_2(l_k) \quad (i=1, \ldots, r).$$

Суммируя, получаем

$$\sum_{j=1}^{](a+1)/2[} L(A_j) = \sum_{j=1}^{](a+1)/2[} \sum_{i=1}^{r} L(A_{ji}) \leqslant$$
$$\leqslant \begin{cases} ((n+k)L_2(u) + 2(n+k-r)L_2(w))\,]a/2[& \text{при } a=2t-1, \\ ((n+k)L_2(u) + 2(n+k-r)L_2(w))\,]a/2[+ rL_2(l_k) & \text{при } a=2t. \end{cases}$$

Все остальные блоки $B-I$ схемы S^a совпадают с блоками $B-I$ схемы S_1 из [1]. Все дальнейшие рассуждения могут быть перенесены из доказательства теоремы 1 работы [1], начиная с п. 3.

Теорема 2. *Пусть $k=o(n)$, $r=o(n)$, $L_2(l_i)=c_3 i + c_4$, где c_3, c_4—константы, зависящие от базиса, а $i=1, 2, \ldots$ Тогда*

$$L^a(l_n) \leqslant \min\left\{NL_2(l_n),]a/2[(nL_2(u) + 2nL_2(w)) + aL_2(E) + \frac{1}{2}(1+(-1)^a)L_2(l_n)\right\}.$$

Доказательство при заданных условиях извлекается из теоремы 1.

Следствие 1. *Для базиса* $\{\&, \vee, ^-\}$ *справедливы неравенства*

$$L^a(l_n) \leqslant \begin{cases} (1{,}375a+0{,}875)\,4n \sim (1{,}375a+0{,}875)\,L_2(l_n) \\ \qquad\qquad\qquad\qquad \textit{при } a=2t-1, \\ (1{,}375a+1)\,4n \sim (1{,}375a+1)\,L_2(l_n) \\ \qquad\qquad\qquad\qquad \textit{при } a=2t \ (t=1,\ 2,\ \ldots). \end{cases}$$

Доказательство следует из того, что $L_2(l_i)=4i-4$ $(i=1,\ 2,\ \ldots)$ [2], и очевидных оценок $L_2(u)=1$, $L_2(w)=3$, $L_2(E)\leqslant 2n$.

Следствие 2. *Для базисов* $\{\&, ^-\}$ *и* $\{\vee, ^-\}$ *справедливы неравенства*

$$L^a(l_n) \leqslant \begin{cases} \left(\frac{19}{14}a+\frac{13}{14}\right)7n \sim \left(\frac{19}{14}a+\frac{13}{14}\right)L_2(l_n) \quad \textit{при} \quad a=2t-1, \\ \left(\frac{19}{14}a+1\right)7n \sim \left(\frac{19}{14}a+1\right)L_2(l_n) \quad \textit{при} \quad a=2t \ (t=1,\ 2,\ \ldots). \end{cases}$$

Доказательство следует из того, что $L_2(l_i)=7i-7$ $(i=1,\ 2,\ \ldots)$ [2], и очевидных оценок $L_2(u)=1$, $L_2(w)\leqslant 6$, $L_2(E)\leqslant 3n$.

Следствие 3. *Для базиса* $\{|\}$, *состоящего из штриха Шеффера, справедливы неравенства*

$$L^a(l_n) \leqslant \begin{cases} (1{,}625a+0{,}875)\,4n \sim (1{,}625a+0{,}875)\,L_2(l_n) \\ \qquad\qquad\qquad\qquad \textit{при } a=2t-1, \\ (1{,}625a+1)\,4n \sim (1{,}625a+1)\,L_2(l_n) \\ \qquad\qquad\qquad\qquad \textit{при } a=2t \ (t=1,\ 2,\ \ldots). \end{cases}$$

Доказательство следует из того, что $L_2(l_i)=4_i-4$ $(i=1,\ 2,\ \ldots)$ [3], и очевидных оценок $L_2(u)=1$, $L_2(w)=3$, $L_2(E)\leqslant 3n$.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. Турдалиев Н. И. О самокорректировании схем для некоторых последовательностей булевых функций // Дискретная математика.— 1989.— Т. 1, вып. 3.— С. 77—86.
2. Редькин Н. П. Доказательство минимальности некоторых схем из функциональных элементов // Проблемы кибернетики. Вып. 23.— М.: Наука, 1970.— С. 83—101.
3. Редькин Н. П. О минимальной реализации линейной функции схемой из функциональных элементов // Кибернетика.— 1971.— № 6.— С. 31—38.

Статья поступила 24.07.89