В. М. Бабич, Дифракция плоской волны на узком конусе в случае краевого условия Дирихле, *Зап. научн. сем. ПОМИ*, 1994, том 218, 3–11

В. М. Бабич

ДИФРАКЦИЯ ПЛОСКОЙ ВОЛНЫ НА УЗКОМ КОНУСЕ В СЛУЧАЕ КРАЕВОГО УСЛОВИЯ ДИРИХЛЕ

Пусть плоская волна падает на произвольный узкий конус. Рассеяная им волна будет состоять из волн различной природы. Статья посвящена выводу приближенной формулы для амплитуды волны, рассеяной вершиной конуса. На направления, в которых распространяется эта волна, наложены некоторые ограничения. Предполагается, что волновой процесс описывается классическим уравнением Гельмгольца и на поверхности конуса выполняется краевое условие Дирихле.

§ 1. Постановка задачи. Формула В. П. Смышляева

Пусть волновой процесс описывается уравнением Гельмгольца

$$(\Delta + k^2)u = 0 \tag{1.1}$$

и на конус Ξ, вершина которого совпадает с началом координат Q, падает плоская волна

$$u_i = \exp(-i(\omega_0, x)k), \tag{1.2}$$

$$x = (x_1, x_2, x_3), \quad \omega_0 = (\omega_{01}, \omega_{02}, \omega_{03}), \quad \sum \omega_{0j}^2 = 1, \quad (\omega_0, x) = \omega_{0j} x_j.$$

Волна u_s, рассеянная конусом, должна удовлетворять уравнению (1.1), условию (Мейкснера) конечности энергии в окрестности Q и соответствующей форме условий излучения.

Предполагается, что $u = u_i + u_s$ удовлетворяет на поверхности $\partial\Xi$ конуса Ξ однородному краевому условию Дирихле:

$$u|_{\partial\Xi} = 0. \tag{1.3}$$

Пусть $kr \to \infty \, (r = \sqrt{x_1^2 + x_2^2 + x_3^2})$, тогда u_s распадается на несколько волн различной природы: отраженную, полутеневую, волну G_{diff}, рассеянную вершиной конуса и т.д. Нас будет интересовать волна G_{diff}, для которой можно написать следующее выражение (см., например, [1–2]):

$$G_{\text{diff}} \underset{kr \to +\infty}{\sim} 2\pi \frac{e^{ikr}}{kr} f(\omega, \omega_0), \tag{1.4}$$

где ω_0 ($|\omega_0| = 1$) – направление, в котором распространяется падающая волна (1.2), ω ($|\omega| = 1$) – единичный вектор, в направлении которого ведется наблюдение, а $f(\omega, \omega_0)$ так называемая диаграмма направленности интересующей нас волны. Функция $f(\omega, \omega_0)$ совпадает с т.н. дифракционным коэффициентом Келлера. Знание $f(\omega, \omega_0)$ необходимо для расчета волнового поля в рамках физической теории дифракции, если рассеиватель имеет особые точки конического типа. Цель настоящей работы – вывод приближенной формулы для $f(\omega, \omega_0)$ в случае т.н. узкого конуса. В основе наших построений лежит формула* В. П. Смышляева (см. [1–2])

$$f(\omega, \omega_0) = \left(\frac{-i}{\pi}\right) \int_{-\infty}^{+\infty} e^{\pi\tau} g_\tau(\omega, \omega_0)\tau \, d\tau. \tag{1.5}$$

Здесь необходимо сделать ряд разъяснений. Прежде всего определим g_τ. Пусть S^2 (наши обозначения согласуются с обозначениями в работах [1–2]) единичная сфера с центром в начале координат. Часть сферы S^2, находящуюся вне конуса Ξ, т.е. $S^2 \setminus \Xi$, мы обозначим буквой N.

Пусть g – функция Грина области $N \subset S^2$ для дифференциального оператора $\tilde{\Delta} - (\tau^2 + \frac{1}{4})$, где $\tilde{\Delta}$ – оператор Бельтрами-Лапласа на сфере S^2:

$$\tilde{\Delta} = \frac{1}{\sin\theta}\frac{\partial}{\partial\theta}(\sin\theta(\ldots)) + \frac{1}{\sin\theta}\frac{\partial^2}{\partial\varphi^2}(\ldots)$$

(θ и φ – здесь обычные сферические координаты на S^2), т.е. g – решение задачи

$$\tilde{\Delta}_a g - \left(\tau^2 + \frac{1}{4}\right)g = -\delta(\omega - \omega_0), \quad \omega, \omega_0 \in N \tag{1.6}$$

$$g|_{\omega\in\partial N} = 0. \tag{1.7}$$

Дифференцирование в формуле (1.6) производится по координатам точки ω. Если бы область N совпадала со всей сферой S^2, тогда $\partial N = \varnothing$ и для соответствующей функции Грина g_0 можно было бы написать явную формулу

$$g_0(\omega, \omega_0) = -\frac{1}{4\mathrm{ch}\pi\tau} P_{-\frac{1}{2}+i\tau}(-\cos\tilde{\theta}), \tag{1.8}$$

где $\tilde{\theta}(\omega, \omega_0)$ – расстояние между ω и ω_0 вдоль сферы S^2.

---

*Другой подход к расчету волны u_s, рассеянной конусом, предлагает В. А. Боровиков в [3].

Функция Грина g естественно разбивается на сумму $g = g_0 + g_r$, где g_r – т.н. отраженная часть функции Грина. Она является решением задачи Дирихле

$$\tilde{\Delta} g_r - (\tau^2 + \frac{1}{4}) g_r = 0, \tag{1.9}$$

$$g_r|_{\partial N} = -g_0|_{\partial N}. \tag{1.10}$$

Функция g_r и стоит под интегралом в формуле (1.5).

Формула (1.5) имеет место при условии

$$\min_{s \in \partial N} \left[\operatorname{dist}(\omega_0, s) + \operatorname{dist}(s, \omega) \right] > \pi \tag{1.11}$$

Через $\operatorname{dist}(a,b)$, где $a, b \in S^2$, мы обозначили расстояние между точками a и b вдоль S^2. В работах [1–2] можно найти и обобщение формулы (1.5) на тот случай, когда неравенство (1.11) не выполняется. Формула (1.5) имеет место для произвольного конуса. Мы выведем, исходя из (1.5), приближенную формулу для $f(\omega, \omega_0)$ при условии, что конус Ξ "узкий", точнее при условии, что область дополнительная к области $\bar{N}$, т.е. $S^2 \setminus \bar{N}$ мала. Что подразумевается под этой малостью мы уточним в §2.

§ 2. Внутреннее разложение и мультипольный анзац

При выводе приближенной формулы для $f(\omega, \omega_0)$ удобно ввести малый параметр. Пусть $O \in S^2 \setminus \bar{N}$ и x_1, x_2, x_3 прямоугольная декартова система координат с началом в точке O и осью Ox, направленной внутрь сферы. Спроектируем область $S^2 \setminus \bar{N}$ на плоскость x_1, x_2. Эту проекцию обозначим через $\varkappa_\varepsilon$. Будем считать, что диаметр $\varkappa_\varepsilon$ имеет порядок ε, где ε – малый параметр задачи, а сама область $\varkappa_\varepsilon \subset \mathbb{R}^2$ есть результат подобного преобразования фиксированной области $\varkappa$, не зависящей от ε:

$$\varkappa_\varepsilon = \left\{ x_1, x_2 : x_j = \varepsilon X_j, \quad X_1, X_2 \in \varkappa \subset \mathbb{R}^2 \right\}. \tag{2.1}$$

Область $S^2 \setminus \bar{N}$, проектирующуюся в $\varkappa_\varepsilon$, мы обозначим через σ_ε. Точки x_1, x_2 можно рассматривать как координаты на сфере при $0 < x_3 < 1$. Заметим, что точка $(x_1, x_2, x_3 (= 1 - \sqrt{1 - x_1^2 - x_2^2})) \in S^2$. Мы будем далее пользоваться методикой А. М. Ильина [4], которая здесь применима безо всяких изменений (см. [5]).

Оказывается, можно методом сращивания найти полное асимптотическое разложение g_r. Подставляя это разложение в формулу (1.5), мы получим асимптотику $f(\omega, \omega_0)$. Мы ограничимся нахождением главного члена в этом асимптотическом разложении, который и дает приближенную формулу для $f(\omega,\omega_0)$. В работах Л. Фелсена [6–7] выведена приближенная формула для $f(\omega,\omega_0)$ в случае узкого кругового конуса. Полученное нами приближение применимо к конусу произвольной формы. Оно точнее приближения Л. Фелсена, так как остаточный член в нашем случае имеет более высокий порядок малости. Однако формула Л. Фелсена проще нашей – интеграл, содержащийся в ней, удается вычислить явно. Завершим параграф, выписав вид асимптотических разложений для g_r, другими словами, анзац.

Внутреннее разложение, т.е. разложение вблизи σ_ε удобно записать в координатах $X_i = \frac{x_i}{\varepsilon}$, $(i=1,2)$, которые мы будем рассматривать как координаты на сфере S^2. Мы будем искать функцию g_r в виде разложения

$$g_r \cong \sum_{j=0}^{\infty} U_j(X,\varepsilon)\varepsilon^j, \quad X = X_1, X_2; \quad X_j = \frac{x_j}{\varepsilon}, (j=1,2). \tag{2.2}$$

Здесь U_j алгебраические дроби от $\ln\varepsilon$. Внешнее разложение для g_r является аналогом некоторых известных разложений (см. [4–5])

$$g_r = A_0 g_0(\omega, O) + \varepsilon\left(A_1 g_0(\omega,O) + A_{1,j}\frac{\partial g_0}{\partial x_j^0}\right) + \\ + \varepsilon^2\left(A_2 g_0(\omega,O) + A_{2j}\frac{\partial g_0}{\partial x_j^0} + A_{2ij}\frac{\partial^2 g_0}{\partial x_i^0 \partial x_j^0}\right) + \dots \tag{2.3}$$

Здесь $\omega \in N$, другой аргумент g_0 – точка O, производные от g_0 вычисляются по координатам точки O, коэффициенты $A_0, A_1, A_{1,j}, \dots$ – алгебраические дроби от $\ln\varepsilon$. Если бы g_0 было потенциалом сосредоточенного заряда, то производные от g_0 по координатам этого заряда были бы потенциалами мультиполей. По этой причине естественно назвать разложение (2.3) мультипольным анзацем.

Потребуем дополнительно, чтобы разложения (2.2) и (2.3) были асимптотически эквивалентны в области вида

$$E_1\varepsilon^\alpha < \sqrt{x_1^2 + x_2^2} < E_2\varepsilon^\beta, \ 1 > \alpha > \beta > 0, \ E_i = \mathrm{const}, \ i = 1,2. \tag{2.4}$$

Последнее требование и уравнение (1.9), которому должно формально удовлетворять разложение (2.2) и краевое условие (1.10) позволяют однозначно, шаг за шагом определить все члены рядов (2.2)–(2.3). Соответствующим построениям посвящен §3.

§ 3. Нахождение асимптотики g_r в первом приближении

Мы ограничимся выводом аналитических выражений для U_0 и A_0. Нахождение дальнейших членов разложений не сталкивается с принципиальными трудностями.

Прежде чем подставлять анзац (2.2) в уравнение (1.9), запишем его в координатах (x_1, x_2), которые мы рассматриваем, как координаты на сфере S^2 вблизи области $\sigma_\varepsilon = S^2 \setminus \bar{N}$. Чтобы получить выражение $\tilde{\Delta}$ в координатах x_1, x_2 следует сначала найти выражение для квадрата элемента длины в этих координатах, после чего воспользоваться общей формулой для оператора Лапласа на римановом многообразии. Квадрат элемента длины $dx_1^2 + dx_2^2 + dx_3^2$ $(x_3 = 1 - \sqrt{1 - x_1^2 - x_2^2})$ подсчитывается элементарно:

$$\sum_{i=1}^{3} (dx_i)^2 = g_{ij} dx_i dx_j, \qquad g_{ij} = \delta_{ij} + \frac{x_i x_j}{1 - x_1^2 - x_2^2} \tag{3.1}$$

(δ_{ij} – символ Кронекера).

Оператор $\tilde{\Delta}$ имеет выражение

$$\tilde{\Delta} = \frac{1}{\sqrt{g}} \frac{\partial}{\partial x_i} \Big(g^{ij} \sqrt{g} \frac{\partial}{\partial x_j} (\cdot) \Big). \tag{3.2}$$

Здесь $g = \det(g_{ij})$, а матрица (g^{ij}) обратна матрице (g_{ij}). Введем в (3.2) вместо x_i координаты $X_i = \frac{x_i}{\varepsilon}$ и подставим разложение (2.2) в уравнение (1.9), записанное в переменных X_i. Мы получим в нулевом приближении

$$\Delta U_0 = \left(\frac{\partial^2}{\partial X_1^2} + \frac{\partial^2}{\partial X_2^2} \right) U_0(X_1, X_2) = 0, \tag{3.3}$$
$$(X_1, X_2) \in \mathbb{R}^2 \setminus \bar{\varkappa}.$$

Краевое условие для U_0 нетрудно получить, переходя к пределу при $(x_1, x_2) \to O$ в равенстве (1.10):

$$U_0|_{\partial\varkappa} = -g_0(\omega, O). \tag{3.4}$$

Для того, чтобы найти U_0, нужно еще выяснить поведение U_0 при $R = \sqrt{X_1^2 + X_2^2} \to +\infty$. Соответствующую информацию дает рассмотрение мультипольного анзаца (2.3) асимптотически эквивалентного анзацу (2.2). Учитывая, что при $\omega \to O$ и $\omega = \omega(x_1, x_2)$ оказывается

$$g_0(P, O) = \frac{1}{2\pi} \ln r + \frac{1}{2\pi} \big(C + \operatorname{Re} \psi(-\frac{1}{2} + i\tau) - \ln 2 \big) + O(r \ln r), \tag{3.5}$$

где C – постоянная Эйлера, $\psi(\xi) \equiv \Gamma'(\xi)/\Gamma(\xi)$ – логарифмическая производная от гамма функции Эйлера, и что в промежуточной области (2.4) справедливы соотношения

$$E_1\varepsilon^{\alpha-1} < R = \frac{\bar{r}}{\varepsilon} < E_2\varepsilon^{\beta-1}, \quad R = \sqrt{X_1^2 + X_2^2} \text{ и } R \xrightarrow[\varepsilon\to 0]{} \infty,$$

получим:

$$U_0 \underset{R\to\infty}{\cong} A_0\left(\frac{1}{2\pi}\ln R_\varepsilon + \frac{1}{2\pi}\left(C + \operatorname{Re}\psi\left(-\frac{1}{2} + i\tau\right)\right) - \ln 2\right). \qquad (3.6)$$

Чтобы решить задачу (3.3), (3.4), (3.6), введем функцию $v(X_1, X_2)$ – решение внешней задачи Дирихле:

$$(\partial^2/\partial x_1^2 + \partial^2/\partial x_2^2)v = 0; \quad v|_{\partial\varkappa} = 0, \qquad (3.7)$$

$$v = \ln R + O(1), \qquad R \to +\infty. \qquad (3.8)$$

Из (3.8) следует, что на бесконечности

$$v(X_1, X_2) = \ln R + W + O\left(\frac{1}{R}\right). \qquad (3.9)$$

Здесь W – константа, являющаяся важной глобальной характеристикой области $\varkappa$. Ее называют мерой Винера области $\mathbb{R}^2 \setminus \bar{\varkappa}$. Мера Винера W просто связана с другой характеристикой $\varkappa$ – так называемым конформным радиусом области $\mathbb{R}^2 \setminus \bar{\varkappa}$. Отобразим конформно область $\mathbb{R}^2 \setminus \bar{\varkappa}$ регулярной функцией $z = z(\xi)$ на внешность круга $|z| > \rho$ (ξ – пробегает область $\mathbb{R}^2 \setminus \bar{\varkappa}$). Фиксируем отображение требованием:∞ переходит в ∞, причем в окрестности ∞

$$z = \xi + a_0 + \frac{a_1}{\xi} + \frac{a_2}{\xi^2} + \dots .$$

Легко доказать, что $\rho = e^{-W}$, где W – уже введенная выше мера Винера.

Будем искать функцию U_0 в виде

$$U = D + Bv(X_1, X_2). \qquad (3.10)$$

Здесь D и B – константы, подлежащие определению. Подставляя (3.10) в краевое условие (3.4), получаем:

$$D = -g_0(\omega, O). \qquad (3.11)$$

Пусть теперь $R \to \infty$, тогда из (3.6), (3.9)–(3.11) следует:

$$-g_0(\omega, O) + B(\ln R + W) =$$
$$= A_0\left(\frac{1}{2\pi}\ln(R\varepsilon) + \frac{1}{2\pi}\left(C + \operatorname{Re}\psi\left(-\frac{1}{2} + i\tau\right)\right) - \ln 2\right). \qquad (3.12)$$

Приравнивая коэффициенты при $\ln R$ и не зависящие от R слагаемые в обеих частях равенства (3.12), придем к системе уравнений

$$B - \frac{1}{2\pi} A_0 = 0,$$
$$-g_0(\omega, O) + BW - A_0 \left(\frac{1}{2\pi} \ln \varepsilon + \frac{1}{2\pi} (C + \operatorname{Re} \psi) - \ln 2 \right) = 0,$$

откуда

$$A_0 = \frac{g_0(\omega, O) 2\pi}{W - \ln \varepsilon - C - \operatorname{Re} \psi + \ln 2},$$
$$B = \frac{1}{2\pi} A_0,$$
$$g_r \cong \frac{g_0(\omega_0, O) g(\omega, O) 2\pi}{W - \ln \varepsilon - C - \operatorname{Re} \psi + \ln 2}. \qquad (3.13)$$

При $r > E_1 \varepsilon^\alpha$.

§ 4. Окончательная формула

Прежде всего заметим, что $W - \ln \varepsilon$ является мерой Винера области $\mathbb{R}^2 \setminus \varkappa_\varepsilon$. Обозначим

$$W - \ln \varepsilon = W(\varkappa_\varepsilon) \qquad (4.1)$$

и подставим выражение (3.13) в основную формулу В. П. Смышляева (1.5), учитывая равенство (4.1)

$$f(\omega, \omega_0) \cong (-2i) \int_{-\infty}^{+\infty} e^{\pi\tau} \frac{g_0(\omega, O) g_0(\omega_0, O) \tau \, d\tau}{W(\varkappa_\varepsilon) - \operatorname{Re} \psi\left(-\frac{1}{2} + i\tau\right) - C + \ln 2}, \qquad (4.2)$$

$\min_{s \in \partial\sigma,} \big(\operatorname{dist}(\omega, s) + \operatorname{dist}(s, \omega_0)\big) > \pi$.

Заметим, что в формуле (4.2) фигурирует только одна величина, зависящая от конуса Ξ – винеровская мера $W(\varkappa_\varepsilon)$. Отсюда можно сделать интересный вывод: в случае краевого условия Дирихле в первом приближении узкий конус можно заменить круговым конусом, который имеет то же значение $W(\varkappa_\varepsilon)$.

Отметим следующий немаловажный факт: при $W(\varkappa_\varepsilon) - \psi\left(-\frac{1}{2}\right) - C + \ln 2 > 0$, что мы будем предполагать, знаменатель в подынтегральном выражении (см. (4.2)) обращается в нуль в двух симметричных точках $-\tau_0$ и τ_0 в силу того, что $\operatorname{Re} \psi\left(-\frac{1}{2} + i\tau\right)$ вещественная, четная, монотонная при $\tau \geqslant 0$ и логарифмически стремящаяся на бесконечности функция. Графики функции

$$\Psi(\lambda) = \operatorname{Re} \psi\left(-\frac{1}{2} + i\lambda\right)$$

представлены на рис. 1 и 2. Заметим, что $\mathrm{Re}\,\psi\left(-\frac{1}{2}\right) > 0$, что не очень ясно видно на графиках.

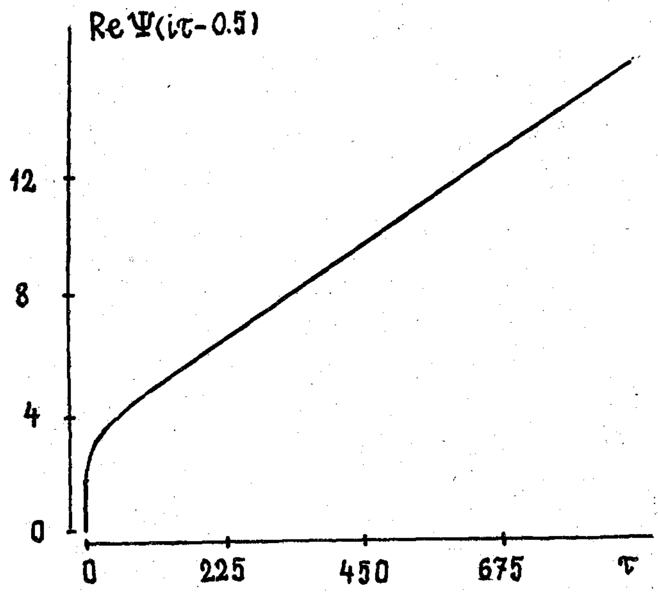

Рис. 1.

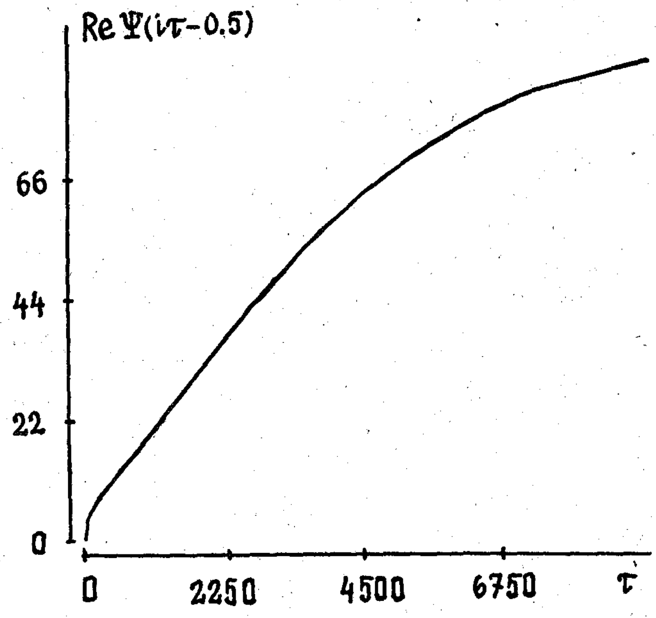

Рис. 2.

Интеграл в формуле (4.2) следует понимать в смысле главного значения по Коши. Значения τ, при которых знаменатель будет обращаться в ноль, имеют порядок $\sim \frac{1}{\varepsilon}$ и уже "на дальних подступах" к этой точке подинтегральное выражение в (4.2) будет экспоненциально малым. Формула (4.2) является искомой приближенной формулой для $f(\omega, \omega_0)$ при указанном там ограничении.

В ближайшее время предполагается выяснить на примерах с помощью вычислений сравнительную точность формулы (4.1), соответствующей формулы Л. Фелсена и точного решения в случае осесимметрического варианта задачи. Построение графиков функции $\mathrm{Re}\,\psi(i\tau - 0.5)$ и соответствующие расчеты были сделаны Д. Б. Дементьевым, которому автор выражает свою глубокую благодарность.

Настоящая работа выполнена при финансовой поддержке Российского фонда фундаментальных исследований (93-011-16148).

Литература

1. V. P. Smyshlayev, *On the diffraction of waves by cones at high frequencies.* Preprint LOMI, E-9-89, Leningrad, 1989.
2. V. P. Smyshlayev, *Diffraction by conical surfaces at high frequencies.* — Wave motion **12** (1990), 329–339.
3. В. А. Боровиков, *Дифракция на многоугольниках и многогранниках.* М., 1966.
4. А. М. Ильин, *Краевая задача для эллиптического уравнения второго порядка в области с узкой щелью. II. Область с малым отверстием.* — Мат. сб. **103**, **No. 2** (1977), 265–284.
5. В. Ю. Готлиб, *О релеевской асимптотике дифракционных задач.* — Зап. Научн. Семин. ЛОМИ **62** (1976), 52–59.
6. L. B. Felsen, *Back scattering from wide-angle and narrow-angle cone.* — J. Appl. Phys. **26(2)** (1955), 138–151.
7. L. B. Felsen, *Plane-wave scattering by small-angle cones.* — IRE TRANS., AP-5 (1957), 121–129.

Babich V. M. Diffraction of plane wave by a narrow cone in the case of Dirichlet boundary condition.

Using Smyshlayev's formula for the wave, scattered by an arbitrary cone vertex, an approximate formula for this wave is obtained in the case of a narrow cone (Dirichlet boundary condition).

С.-Петербургское отделение
Математического института
им.В. А. Стеклова РАН

Поступило 23 марта 1994 г.