МАТЕМАТИЧЕСКИЕ ЗАМЕТКИ

т. 38, № 1 (1985)

ПРЕОБРАЗОВАНИЕ ФУНКЦИЙ И ПРИНЦИП ДИРИХЛЕ

В. Н. Дубинин

1. Конденсатором в расширенной комплексной плоскости $\mathbf{C}$ называется всякая упорядоченная пара (E_0, E_1) непересекающихся непустых замкнутых множеств E_0 и E_1. Если для данного конденсатора (E_0, E_1) существует вещественная функция $\omega(z)$, непрерывная в $\mathbf{C}$, гармоническая в $G = \mathbf{C} \setminus (E_0 \cup E_1)$, равная нулю на E_0 и единице на E_1, то указанную функцию называют потенциальной, а под емкостью конденсатора (E_0, E_1) понимается величина

$$\operatorname{Cap}(E_0, E_1) = \iint_G |\nabla\omega|^2 \, dx\, dy \qquad (z = x + iy).$$

Емкость произвольного конденсатора (E_0, E_1) определяется как точная нижняя грань емкостей конденсаторов (E_0', E_1'), имеющих потенциальную функцию и таких, что $E_0 \subset E_0'$, $E_1 \subset E_1'$.

Каждому конденсатору (E_0, E_1), для которого $E_k \subset [-1, 1]$, $k = 0,1$, сопоставим конденсатор (E_0^*, E_1^*), где

$$E_0^* = [-1, -1 + mE_0], \; E_1^* = [1 - mE_1, 1],$$

mE_k — линейная мера Лебега множества E_k, $k = 0,1$. А. А. Гончар высказал следующее предположение:

$$\operatorname{Cap}(E_0, E_1) \geqslant \operatorname{Cap}(E_0^*, E_1^*).$$

П. М. Тамразов [1] разработал «метод перемешивания зарядов», который позволяет, в частности, доказать вы-

© Издательство «Наука». Главная редакция физико-математической литературы. «Математические заметки», 1985

писанное неравенство и установить все случаи, при которых в этом соотношении имеет место знак равенства. Однако специалистами отмечалась громоздкость предложенного доказательства.

В настоящей заметке рассматривается преобразование вещественнозначных функций, которое вместе с принципом Дирихле приводит к более простому решению указанной задачи А. А. Гончара.

2. Преобразование функций. Пусть $u(z)$ — произвольная вещественнозначная функция, заданная в $\mathbf{C}$, α — действительное число. Результатом P_α преобразования функции $u(z)$ назовем функцию $P_\alpha u(z)$, определенную следующим образом:

$$P_\alpha u(z) = \begin{cases} \min[u(z),\ u(2\alpha - \bar{z})], & \operatorname{Re} z \leqslant \alpha, \\ \max[u(z),\ u(2\alpha - \bar{z})], & \operatorname{Re} z > \alpha. \end{cases}$$

ЛЕММА 1. *Если функция $u(z)$ непрерывна в $\mathbf{C}$ и удовлетворяет условию Липшица в некоторой окрестности каждой точки множества $\{z\colon 0 < u(z) < 1\}$, то функция $P_\alpha u(z)$ также непрерывна в $\mathbf{C}$ и удовлетворяет условию Липшица внутри $H = \{z\colon 0 < P_\alpha u(z) < 1\}$ (т. е. на любом компактном подмножестве множества H).*

Доказательство. Покажем сначала, что для каждой точки множества H существует окрестность, в которой функция $P_\alpha u(z)$ удовлетворяет условию Липшица. Положим по определению $z' = 2\alpha - \bar{z}$, $z \in \mathbf{C}$. Пусть $z_0 \in H$, а $z_0' \notin H$. Ввиду непрерывности функции $u(z)$ существует окрестность точки z_0, в которой выполняется либо $P_\alpha u(z) \equiv u(z)$, либо $P_\alpha u(z) \equiv u(z')$. Отсюда следует также существование окрестности точки z_0, где функция $P_\alpha u(z)$ удовлетворяет условию Липшица. Предположим теперь, что обе точки z_0 и z_0' принадлежат H. Согласно условию леммы существуют симметричные относительно прямой $\operatorname{Re} z = \alpha$ окрестности $B(z_0)$, $B(z_0')$ соответственно точек z_0 и z_0', в которых

$$|u(z_1) - u(z_2)| \leqslant K\,|z_1 - z_2|, \quad z_1, z_2 \in B(z_0),$$
$$|u(z_1') - u(z_2')| \leqslant K\,|z_1' - z_2'| = K\,|z_1 - z_2|,$$
$$z_1', z_2' \in B(z_0').$$

Пусть, для определенности, $\operatorname{Re} z_0 < \alpha$ и $B(z_0) \subset \subset \{z\colon \operatorname{Re} z < \alpha\}$. Если для некоторых $z_1, z_2 \in B(z_0)$

выполняется $u(z_1) \leqslant u(z_1')$ и $u(z_2) \leqslant u(z_2')$, то

$$|P_\alpha u(z_1) - P_\alpha u(z_2)| = |u(z_1) - u(z_2)| \leqslant \leqslant K|z_1 - z_2|,$$

$$|P_\alpha u(z_1') - P_\alpha u(z_2')| = |u(z_1') - u(z_2')| \leqslant \leqslant K|z_1' - z_2'|, \quad z_1', z_2' \in B(z_0').$$

Если $u(z_1) \leqslant u(z_1')$, а $u(z_2) \geqslant u(z_2')$, то

$$|u(z_1') - u(z_1)| + |(u(z_2) - u(z_2')| = = |u(z_1') - u(z_1) + u(z_2) - u(z_2')| \leqslant |u(z_1') - u(z_2')| + + |u(z_1) - u(z_2)| \leqslant 2K|z_1 - z_2|.$$

Отсюда

$$|P_\alpha u(z_1) - P_\alpha u(z_2)| = |u(z_1) - u(z_2')| \leqslant \leqslant |u(z_1) - u(z_1')| + |u(z_1') - u(z_2')| \leqslant 3K|z_1 - z_2|, \quad z_1, z_2 \in B(z_0),$$

$$|P_\alpha u(z_1') - P_\alpha u(z_2')| = |u(z_1') - u(z_2)| \leqslant \leqslant |u(z_1') - u(z_1)| + |u(z_1) - u(z_2)| \leqslant 3K|z_1' - z_2'|, \quad z_1', z_2' \in B(z_0').$$

Остальные случаи рассматриваются аналогично. Для точек z_0 с $\operatorname{Re} z_0 = \alpha$ существование соответствующей окрестности очевидно. Таким образом, функция $P_\alpha u(z)$ удовлетворяет условию Липшица в некоторой окрестности каждой точки множества H. Поэтому она удовлетворяет этому условию внутри H [2, с. 75]. Непрерывность функции во всей плоскости устанавливается непосредственно. Лемма доказана.

Пусть E_0 и E_1 — два непустых непересекающихся замкнутых множества, ограниченных конечным числом кусочно-аналитических кривых; $\omega(z)$ — потенциальная функция конденсатора (E_0, E_1). Преобразование P_α, примененное к функции $\omega(z)$, естественным образом порождает конденсатор $P_\alpha(E_0, E_1) = (P_\alpha E_0, P_\alpha E_1)$, где множества

$$P_\alpha E_k = \{z\colon P_\alpha \omega(z) = k\}, \qquad k = 0, 1,$$

также ограничены конечным числом кусочно-аналитических кривых. Обозначим через $\omega_\alpha(z)$ потенциальную функцию конденсатора $P_\alpha(E_0, E_1)$.

ЛЕММА 2. *Справедливо неравенство*

$$\operatorname{Cap}(E_0, E_1) \geqslant \operatorname{Cap} P_\alpha(E_0, E_1).$$

Знак равенства имеет место тогда и только тогда, когда в каждой связной компоненте множества $\mathbf{C} \setminus (E_0 \cup E_1)$ *выполняется либо* $\omega(z) \equiv \omega_\alpha(z)$, *либо* $\omega(z) \equiv \omega_\alpha(2\alpha - \bar{z})$.

Доказательство. Обозначим через D полуплоскость $\operatorname{Re} z > \alpha$ и рассмотрим функции

$$\tilde{\omega}(z) = \omega(2\alpha - \bar{z}), \quad z \in D,$$
$$\tilde{P}_\alpha \omega(z) = P_\alpha \omega(2\alpha - \bar{z}), \; z \in D.$$

Пусть $D_1 = \{z\colon z \in D, \; \omega(z) > \tilde{\omega}(z)\}$, $D_2 = \{z\colon z \in D, \; \omega(z) \leqslant \tilde{\omega}(z)\}$. Для произвольной функции $v(z)$ введем обозначение

$$I_\Omega(v) = \iint_{\Omega \cap \{z: 0 < v(z) < 1\}} |\nabla v|^2 \, dx \, dy.$$

Каждая из функций $\tilde{\omega}(z)$, $\tilde{P}_\alpha \omega(z)$ и $P_\alpha \omega(z)$ удовлетворяет условию Липшица внутри множества, где она больше нуля, но меньше единицы. Следовательно, она имеет почти всюду на этом множестве частные производные, ограниченные на любом компактном подмножестве, и можно говорить о соответствующем интеграле Дирихле от этой функции

$$\begin{aligned}\operatorname{Cap}(E_0, E_1) &= I_{\mathbf{C}}(\omega) = I_D(\omega) + I_D(\tilde{\omega}) = \\ &= I_{D_1}(\omega) + I_{D_2}(\omega) + I_{D_1}(\tilde{\omega}) + I_{D_2}(\tilde{\omega}) = \\ &= I_{D_1}(P_\alpha\omega) + I_{D_2}(\tilde{P}_\alpha\omega) + I_{D_1}(\tilde{P}_\alpha\omega) + I_{D_2}(P_\alpha\omega) = \\ &= I_D(P_\alpha\omega) + I_D(\tilde{P}_\alpha\omega) = I_{\mathbf{C}}(P_\alpha\omega).\end{aligned}$$

Осталось воспользоваться леммой 1 и принципом Дирихле, согласно которому

$$I_{\mathbf{C}}(P_\alpha\omega) \geqslant \operatorname{Cap} P_\alpha(E_0, E_1).$$

Доказательство этого принципа для каждой связной компоненты множества $\mathbf{C} \setminus (P_\alpha E_0 \cup P_\alpha E_1)$ совпадает с доказательством, приведенным в монографии [2, с. 83—85]. Знак равенства в последнем соотношении имеет место тогда и только тогда, когда функция $P_\alpha\omega(z) \equiv \omega_\alpha(z)$ [2, с. 85]. В этом случае по теореме единственности заключаем, что в каждой связной компоненте множества $\mathbf{C} \setminus (E_0 \cup E_1)$ выполняется либо $\omega(z) \equiv \omega_\alpha(z)$, либо $\omega(z) \equiv \omega_\alpha(2\alpha - \bar{z})$. Лемма доказана.

Замечание. Лемма 2 (в иной формулировке и без утверждения о знаке равенства) встречается в работе В. Волонтиса [3, с. 590, 598]. Предложенное доказательство [3, с. 598—601] опирается на связь между экстре-

мальным расстоянием и «обобщенным потенциалом», подсказанную Л. Альфорсом [3, с. 593—597].

3. Пусть (E_0, E_1) — произвольный конденсатор с пластинами $E_k \subset [-1, 1]$, $k = 0, 1$. Обозначим через $\omega(z)$ решение обобщенной задачи Дирихле в области $G = \mathbf{C} \setminus (E_0 \cup E_1)$ [4, с. 299], которое является гармоническим в G и в регулярных точках множеств E_0, E_1 имеет предельные значения, равные соответственно 0 и 1. Нетрудно показать, что $\operatorname{Cap}(E_0, E_1)$ совпадает с интегралом $I_{\mathbf{C}}(\omega)$. Пусть $\omega^*(z)$ — аналогичная функция для конденсатора (E_0^*, E_1^*).

ТЕОРЕМА (см. [1, с. 43]). *Справедливо неравенство*

$$\operatorname{Cap}(E_0, E_1) \geqslant \operatorname{Cap}(E_0^*, E_1^*). \tag{1}$$

Знак равенства имеет место тогда и только тогда, когда $\omega(z) \equiv \omega^*(z)$ *или* $\omega(z) \equiv \omega^*(-\bar{z})$, *либо* $\omega(z) \equiv \mathrm{const}$ *в* G.

Доказательство. Рассмотрим сначала конденсатор (E_0, E_1), пластины которого состоят из конечного числа попарно непересекающихся невырожденных отрезков. Пусть множество E_0 состоит из n отрезков, а E_1 — из m отрезков. Без ограничения общности можно считать, что $\sup E_0 < \sup E_1$. Обозначим через β_1 левый конец крайнего слева отрезка множества E_1, а через γ_1 — левый конец крайнего справа отрезка E_1. Пусть $\alpha_1 = (\beta_1 + \gamma_1)/2$. Преобразование P_{α_1}, примененное к потенциальной функции конденсатора (E_0, E_1), порождает конденсатор $(P_{\alpha_1}E_0, P_{\alpha_1}E_1)$, пластины которого также состоят из конечного числа попарно непересекающихся невырожденных отрезков. Количество таких отрезков, образующих $P_{\alpha_1}E_0$, не превосходит n, а число отрезков, составляющих $P_{\alpha_1}E_1$, не больше чем $m - 1$. Пусть β_2 — левый конец крайнего слева отрезка, а γ_2 — левый конец крайнего справа отрезка множества $P_{\alpha_1}E_1$. К потенциальной функции конденсатора $(P_{\alpha_1}E_0, P_{\alpha_1}E_1)$ применим преобразование P_{α_2} с $\alpha_2 = (\beta_2 + \gamma_2)/2$, которое порождает конденсатор $(P_{\alpha_2}P_{\alpha_1}E_0, P_{\alpha_2}P_{\alpha_1}E_1)$ и т. д. до тех пор, пока через конечное число шагов мы не получим конденсатор $(P_{\alpha_k} \ldots P_{\alpha_1}E_0, P_{\alpha_k} \ldots P_{\alpha_1}E_1)$, первая пластина которого состоит из не более чем n отрезков, а вторая — из одного отрезка. Повторим теперь предыдущие рассуждения, но уже по отношению к конденсатору P_0 $(P_{\alpha_k} \ldots P_{\alpha_1}E_1, P_{\alpha_k} \ldots P_{\alpha_1}E_0)$. В результате получим конденсатор (E_1', E_0'), состоящий из двух пластин — отрезков. Заме-

тим, что на каждом шаге суммарная длина отрезков каждой пластины остается неизменной, а объединение двух пластин никогда не выходит за пределы отрезка $[-1, 1]$. Пусть β' — левый конец отрезка E_0', а β'' — правый конец E_1', $\alpha' = (1 + \beta')/2$, $\alpha'' = (-1 + \beta'')/2$. Тогда

$$P_{\alpha''}P_{\alpha'}(E_1', E_0') = P_0(E_1^*, E_0^*).$$

Из леммы 2 последовательно имеем

$$\begin{aligned}
&\operatorname{Cap}(E_0, E_1) \geqslant \\
&\quad \geqslant \operatorname{Cap}(P_{\alpha_1}E_0, P_{\alpha_1}E_1) \geqslant \ldots \geqslant \operatorname{Cap}(P_{\alpha_k} \ldots P_{\alpha_1}E_0, \\
&P_{\alpha_k} \ldots P_{\alpha_1}E_1) \geqslant \\
&\quad \geqslant \operatorname{Cap} P_0(P_{\alpha_k} \ldots P_{\alpha_1}E_1, P_{\alpha_k} \ldots P_{\alpha_1}E_0) \geqslant \ldots \geqslant \\
&\quad \geqslant \operatorname{Cap}(E_1', E_0') \geqslant \operatorname{Cap} P_{\alpha''}P_{\alpha'}(E_1', E_0') = \operatorname{Cap}(E_0^*, E_1^*).
\end{aligned}$$

Неравенство (1) доказано. Знак равенства во всех соотношениях сразу имеет место тогда и только тогда, когда $\omega(z) \equiv \omega^*(z)$ или $\omega(z) \equiv \omega^*(-\bar{z})$. Для произвольного конденсатора неравенство (1) следует из только что доказанного предельным переходом.

Предположим теперь, что в (1) имеет место знак равенства. Обозначим через F_k совокупность всех регулярных точек множества E_k, $k = 0, 1$. Достаточно рассмотреть случай, когда $mF_1 \cdot mF_2 \neq 0$. Пусть $H_k = [\alpha_k, \beta_k]$, где $\alpha_k = \inf F_k$, $\beta_k = \sup F_k$, $k = 0, 1$. Если множества $H_k \setminus F_k$, $k = 0, 1$, не содержат точек области G, то функция $\omega(z)$ совпадает с потенциальной функцией конденсатора (H_0, H_1) и $E_k^* = H_k^*$, $k = 0, 1$. Остается воспользоваться предыдущим результатом. Если же для некоторого k (пусть, например, для $k = 1$), $(H_k \setminus F_k) \cap G \neq \varnothing$, то, во-первых, можно считать, что $\beta_0 < \beta_1$, а, во-вторых, существует точка $x \in G$ такая, что $\alpha_1 < x$, $\beta_0 < x < \beta_1$. Рассмотрим преобразование P_α с $\alpha = (\alpha_1 + x)/2$. Ясно, что $P_\alpha\omega(z) \not\equiv \omega(z)$ и $P_\alpha\omega(z) \not\equiv \omega(2\alpha - \bar{z})$, $z \in F_1$. В силу непрерывности функция $P_\alpha\omega(z)$ не совпадает ни с одной из этих функций на эллипсе Γ_ρ: $z = \rho e^{i\theta} + \rho^{-1}e^{-i\theta} + \alpha$, $0 \leqslant \theta \leqslant 2\pi$ $(\rho \neq 1)$, при ρ, достаточно близком к единице. По теореме единственности функция $P_\alpha\omega(z)$ не является гармонической в G_ρ — внешности эллипса Γ_ρ. Пусть $\tilde{\omega}(z)$ — решение задачи Дирихле для G_ρ, равное $P_\alpha\omega(z)$ на Γ_ρ. Из принципа Дирихле

$$I_{G_\rho}(P_\alpha\omega) > I_{G_\rho}(\tilde{\omega}).$$

Рассмотрим последовательность конденсаторов $(E_0^{(n)}, E_1^{(n)})$, $n = 1, 2, \ldots$, с пластинами, состоящими из конечного числа попарно непересекающихся невырожденных отрезков, и таких, что $\bigcap_{n=1}^{\infty} E_k^{(n)} = E_k \bigcap H_k$, $H_k \supset E_k^{(n)} \supset \supset E_k^{(n+1)}$, $k = 0, 1$, $n = 1, 2, \ldots$ Соответствующая последовательность потенциальных функций $\omega_n(z)$, $n = 1, 2, \ldots$, равномерно сходится внутри G к функции, совпадающей с $\omega(z)$ (см., например, [4, с. 403, 298]). В этом случае последовательность функций $P_\alpha \omega_n(z)$, $n = 1, 2, \ldots$, тоже равномерно сходится на множестве $\overline{G}_\rho$ к функции $P_\alpha \omega(z)$. Пусть $\tilde{\omega}_n(z)$ — решение задачи Дирихле для G_ρ, равное $P_\alpha \omega_n(z)$ на Γ_ρ. Тогда, начиная с некоторого номера n_0, имеем

$$I_{G_\rho}(P_\alpha \omega_n) > I_{G_\rho}(\tilde{\omega}_n) + \delta,$$

где $\delta > 0$ не зависит от $n > n_0$. Отсюда (см. доказательство леммы 2)

$$I_{\mathbb{C}}(\omega_n) = I_{\mathbb{C}}(P_\alpha \omega_n) = I_{\mathbb{C} \setminus G_\rho}(P_\alpha \omega_n) + I_{G_\rho}(P_\alpha \omega_n) >$$
$$> I_{\mathbb{C} \setminus G_\rho}(P_\alpha \omega_n) + I_{G_\rho}(\tilde{\omega}_n) + \delta \geqslant \operatorname{Cap} P_\alpha (E_0^{(n)}, E_1^{(n)}) + \delta \geqslant$$
$$\geqslant \operatorname{Cap}((E_0^{(n)})^*, (E_1^{(n)})^*) + \delta \geqslant \operatorname{Cap}(E_0^*, E_1^*) + \delta.$$

Здесь мы вновь воспользовались принципом Дирихле, предшествующим результатом и монотонностью емкости. При $n \to \infty$ приходим к противоречию. Теорема доказана.

Дальневосточный государственный университет

Поступило 25.07.84

СПИСОК ЦИТИРОВАННОЙ ЛИТЕРАТУРЫ

[1] Тамразов П. М. Емкости конденсаторов. Метод перемешивания зарядов.— Мат. сб., 1981, т. 115, № 1, с. 40—73.
[2] Хейман В. К. Многолистные функции.— М.: ИЛ, 1960.
[3] Wolontis V. Properties of conformal invariants.— Amer. J. Math., 1952, v. 74, № 3, p. 587—606.
[4] Ландкоф Н. С. Основы современной теории потенциала.— М.: Наука, 1966.