И. В. Андрианов, А. Н. Пасечник, Метод составных уравнений в теории цилиндрических оболочек, *Докл. АН СССР*, 1986, том 287, номер 4, 806–809

Доклады Академии наук СССР
1986. Том 287, № 4

УДК 539.3

ТЕОРИЯ УПРУГОСТИ

И.В. АНДРИАНОВ, А.Н. ПАСЕЧНИК

МЕТОД СОСТАВНЫХ УРАВНЕНИЙ В ТЕОРИИ ЦИЛИНДРИЧЕСКИХ ОБОЛОЧЕК

(Представлено академиком И.Ф. Образцовым 29 XI 1984)

Асимптотическое расщепление краевых задач теории оболочек по параметру относительной тонкостенности позволяет получить аналитические решения важных задач [1]. В то же время такой подход обладает следующим недостатком: при различных изменяемостях напряженно-деформированного состояния (НДС) необходимо использовать различные приближенные уравнения. Возникает задача синтеза предельных решений [2, 3]. В работах [2, 3] изложена методика сращивания решений при различных изменяемостях НДС и получены решения широкого класса задач.

В настоящей работе предлагается использовать для этой цели метод составных уравнений (СУ) [4]. Его основная идея заключается в синтезе предельных уравнений, справедливых при различных изменяемостях НДС.

Составные уравнения в перемещениях, переходящие при малых изменяемостях в уравнения полубезмоментной теории (ПБТ), а при больших – в уравнения плоской деформации пластины, можно представить так:

$$
\begin{gathered}
\frac{\partial^2 u^{(1)}}{\partial \xi^2} + \frac{1-\sigma}{2}\frac{\partial^2 u^{(1)}}{\partial \eta^2} + \frac{1+\sigma}{2}\frac{\partial^2 v^{(1)}}{\partial \xi\, \partial \eta} - \sigma \frac{\partial w^{(1)}}{\partial \xi} = -r^2 \bar{X}, \\
\frac{1+\sigma}{2}\frac{\partial^2 u^{(1)}}{\partial \xi\, \partial \eta} + \frac{1-\sigma}{2}\frac{\partial^2 v^{(1)}}{\partial \xi^2} + (1+a^2)\frac{\partial^2 v^{(1)}}{\partial \eta^2} - \\
-\left(1 - a^2 \frac{\partial^2}{\partial \eta^2}\right)\frac{\partial w^{(1)}}{\partial \eta} = -r^2 \bar{Y}, \\
\sigma \frac{\partial u^{(1)}}{\partial \xi} + \left(1 - a^2\frac{\partial^2}{\partial \eta^2}\right)\frac{\partial v^{(1)}}{\partial \eta} - \left(1 + a^2 \frac{\partial^4}{\partial \eta^4}\right) w^{(1)} = -r^2 \bar{Z}.
\end{gathered} \tag{1}
$$

Здесь и далее обозначения совпадают с принятыми в монографии [1]. Разрешающее уравнение для однородной системы (1) имеет вид

$$
\begin{gathered}
\left[\frac{\partial^4}{\partial \xi^4} + 2\frac{\partial^4}{\partial \xi^2 \partial \eta^2} + \left(1 + \frac{\partial^2}{\partial \eta^2}\right)^2\right]\frac{\partial^4 \Phi^{(1)}}{\partial \eta^4} + \frac{1-\sigma^2}{a^2}\frac{\partial^4 \Phi^{(1)}}{\partial \xi^4} + \\
+ 2\left[1 + \sigma + (2+\sigma)\frac{\partial^2}{\partial \eta^2}\right]\frac{\partial^4 \Phi^{(1)}}{\partial \xi^2 \partial \eta^2} = 0.
\end{gathered} \tag{2}
$$

Таблица 1

$v^{(1)} = \tilde{v}$	$u^{(1)} + u^{(2)} = \tilde{u}$	$w^{(1)} + w^{(2)} = \tilde{w}$	$w_{\xi}^{(2)} = w_{\xi}$
$v^{(1)} = \tilde{v}$	$T_1^{(1)} + T_1^{(2)} = \tilde{T}$	$w^{(1)} + w^{(2)} = \tilde{w}$	$w_{\xi}^{(2)} = w_{\xi}$
$v^{(1)} = \tilde{v}$	$u^{(1)} + u^{(2)} = \tilde{u}$	$w^{(1)} + w^{(2)} = \tilde{w}$	$G_1^{(2)} = \tilde{G}$
$v^{(1)} = \tilde{v}$	$T_1^{(1)} + T_1^{(2)} = \tilde{T}$	$w^{(1)} + w^{(2)} = \tilde{w}$	$G_1^{(2)} = \tilde{G}$
$u^{(1)} = \tilde{u}$	$S^{(1)} + S^{(2)} = \tilde{S}$	$w^{(1)} + w^{(2)} = \tilde{w}$	$w_{\xi}^{(2)} = \tilde{w}_{\xi}$
$T_1^{(1)} = \tilde{T}$	$S^{(1)} + S^{(2)} = \tilde{S}$	$w^{(1)} + w^{(2)} = \tilde{w}$	$w_{\xi}^{(2)} = \tilde{w}_{\xi}$
$u^{(1)} = \tilde{u}$	$S^{(1)} + S^{(2)} = \tilde{S}$	$w^{(1)} + w^{(2)} = \tilde{w}$	$G_1^{(2)} = \tilde{G}$
$T_1^{(1)} = \tilde{T}$	$S^{(1)} + S^{(2)} = \tilde{S}$	$w^{(1)} + w^{(2)} = \tilde{w}$	$G_1^{(2)} = \tilde{G}$

Перемещения, усилия и моменты определяются через потенциальную функцию следующими выражениями:

$$u^{(1)} = \left(- \frac{\partial^2}{\partial \eta^2} + \sigma \frac{\partial^2}{\partial \xi^2} \right) \frac{\partial \Phi^{(1)}}{\partial \xi} ; \quad v^{(1)} = \left[\frac{\partial^2}{\partial \eta^2} + (2 + \sigma) \frac{\partial^2}{\partial \xi^2} \right] \frac{\partial \Phi^{(1)}}{\partial \eta} ;$$

$$w^{(1)} = \nabla_1^4 \Phi^{(1)} = \left(\underline{\frac{\partial^2}{\partial \xi^2}} + \frac{\partial^2}{\partial \eta^2} \right)^2 \Phi^{(1)}; \quad T_1^{(1)} = - \frac{2Eh}{r} - \frac{\partial^4 \Phi^{(1)}}{\partial \xi^2 \partial \eta^2} ;$$

$$T_2^{(1)} = - \frac{2Eh}{r} \left[\frac{\partial^4 \Phi^{(1)}}{\partial \xi^4} + \frac{a^2}{1 - \sigma^2} \left(1 + \frac{\partial^2}{\partial \eta^2} \right) \frac{\partial^4 \Phi^{(1)}}{\partial \eta^4} \right] ;$$

(3) $$S_1^{(1)} = -S_2^{(1)} = \frac{2Eh}{r} \frac{\partial^4 \Phi^{(1)}}{\partial \xi^3 \partial \eta} ;$$

$$G_1^{(1)} = \sigma G_2^{(1)} = - \frac{2Eh\sigma}{1 - \sigma^2} a^2 \left(\nabla_1^4 + \frac{\partial^2}{\partial \eta^2} \right) \frac{\partial^2 \Phi^{(1)}}{\partial \eta^2} ;$$

$$H_1^{(1)} = -H_2^{(1)} = \frac{3Eh}{1 + \sigma^2} a^2 \left(\nabla_1^4 + \frac{\partial^2}{\partial \eta^3} \right) \frac{\partial^2 \Phi^{(1)}}{\partial \xi \partial \eta} .$$

Соотношения (1) – (3) отличаются от соотношений ПБТ [1] подчеркнутыми членами. Они не могут быть получены в результате предельного перехода, но применимы при любой изменяемости НДС. Разрешающее уравнение (2) имеет четвертый порядок по продольной координате, что существенно облегчает решение задач.

Составные уравнения (1), (2) можно получить вариационным методом, полагая в выражениях энергии $\kappa_1 = \kappa_{12} = 0$.

Составные уравнения, включающие уравнения простого краевого эффекта

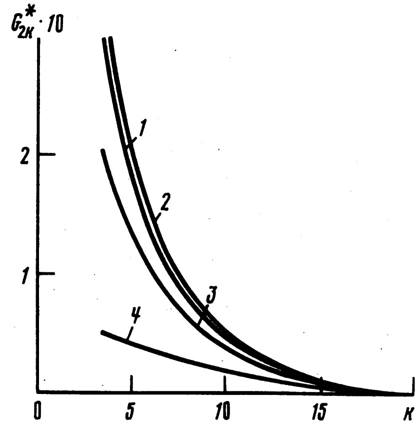

Рис. 1

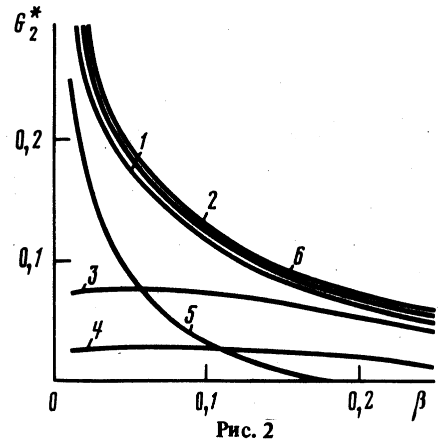

Рис. 2

(ПКЭ) и изгиба пластины, записываются так:

$$\frac{\partial^2 u^{(2)}}{\partial \xi^2} - \sigma \frac{\partial w^{(2)}}{\partial \xi} = 0; \quad \frac{1+\sigma}{2} \frac{\partial^2 u^{(2)}}{\partial \xi \partial \eta} + \frac{1-\sigma}{2} \frac{\partial^2 v^{(2)}}{\partial \xi^2} - \frac{\partial w^{(2)}}{\partial \eta} = 0;$$

(4)

$$\sigma \frac{\partial u^{(2)}}{\partial \xi} - (1 + a^2 \nabla_2^4) w^{(2)} = -r^2 \bar{Z}; \quad \nabla_2^4 = \left(\frac{\partial^2}{\partial \xi^2} + \frac{\partial^2}{\partial \eta^2}\right)^2; \quad \bar{Z} = 0.$$

Разрешающее уравнение системы (4) имеет вид

(5) $\quad \nabla_2^4 \Phi^{(2)} + (1 - \sigma^2)/a^2 \Phi^{(2)} = 0.$

Перемещения, усилия и моменты определяются через потенциальную функцию следующими выражениями:

$$u^{(2)} = \sigma \frac{\partial^3 \Phi^{(2)}}{\partial \xi^3}; \quad v^{(2)} = (2+\sigma) \frac{\partial^3 \Phi^{(2)}}{\partial \xi^2 \partial \eta}; \quad w^{(2)} = \nabla_2^4 \Phi^{(2)};$$

(6)

$$T_1^{(2)} = -\frac{2Eh}{r} \frac{\partial^4 \Phi^{(2)}}{\partial \xi^2 \partial \eta^2}; \quad T_2^{(2)} = -\frac{2Eh}{r} \frac{\partial^4 \Phi^{(2)}}{\partial \xi^4};$$

$$S_1^{(2)} = -S_2^{(2)} = \frac{2Eh}{r} \frac{\partial^4 \Phi^{(2)}}{\partial \xi^3 \partial \eta};$$

$$\sigma G_1^{(2)} = G_2^{(2)} = -\frac{2Eh\sigma}{1-\sigma^2} a^2 \nabla_2^4 \frac{\partial^2 \Phi^{(2)}}{\partial \xi^2}; \quad H_1^{(2)} = -H_2^{(2)} = \frac{2Eh}{1+\sigma} a^2 \nabla_2^4 \frac{\partial^2 \Phi^{(2)}}{\partial \xi \partial \eta}.$$

В выражениях (4)–(6) подчеркнуты члены, отличающие их от соотношений ПКЭ.

Уравнения (4)–(6) можно получить на основе почти тех же гипотез, что и для ПКЭ [1] (лишь в выражении энергии сохраняются дополнительно κ_2 и κ_{12}).

При формулировке краевых задач для СУ (1), (4) необходимо синтезировать граничные условия для ПБТ и плоского НДС, ПКЭ и изгиба пластины. Полученные в результате расчленения граничные условия приведены в табл. 1, где величины с тильдами определяют значения краевых перемещений, усилий и моментов, заданных при $\xi = 0, l$. Далее можно использовать методику работы [5]: построить решение уравнений (4) и исключить их из общих граничных условий.

Для оценки точности предлагаемого метода рассмотрим задачу, допускающую точное решение [3]: определение напряжений в цилиндрической оболочке, загруженной по двум линиям контура усилиями P, при шарнирном закреплении торцов.

Результаты расчета кольцевого изгибающего момента $G_2^* = G_2/P$ для k-го члена разложения и различных длин нагруженных отрезков $2\beta_0$ $(-\beta_0 \leqslant \eta \leqslant \beta_0)$ приведены на рис. 1, 2 при $\sigma = 0{,}3$, $h/r = 0{,}01$, $\beta_0 = 0{,}125$, $L/r = 8$. Кривыми *1* обозначены точные решения, *2–5* – решения на основе уравнений: составных, ПБТ, ПКЭ, изгиба пластины; *6* – решение [3]. Видно, что СУ обеспечивают достаточную точность.

Динамические СУ в перемещениях можно получить из соотношений (1), (4), полагая

$$\bar{X} = -\frac{1-\sigma^2}{E}\,\frac{\rho}{r^2}\,\frac{\partial^2 u}{\partial t^0}\,, \qquad \bar{Y} = -\frac{1-\sigma^2}{E}\,\frac{\rho}{r^2}\,\frac{\partial^2 v}{\partial t^2}\,, \qquad \bar{Z} = \frac{1-\sigma^2}{E}\,\frac{\rho}{r^2}\,\frac{\partial^2 w}{\partial t^2}\,.$$

Составные уравнения можно эффективно использовать для построения функций Грина и решения задач о сосредоточенных воздействиях, колебаниях при широкополосном возбуждении и т.д.

Авторы глубоко признательны проф. Б.В. Нерубайло за плодотворное обсуждение статьи.

Днепропетровский
инженерно-строительный институт

Поступило
8 X 1985

ЛИТЕРАТУРА

1. *Гольденвейзер А.Л.* Теория упругих тонких оболочек. М.: Наука, 1976. 512 с. 2. *Образцов И.Ф., Нерубайло Б.В.* – ДАН, 1983, т. 269, № 1, с. 54–56. 3. *Нерубайло Б.В.* Локальные задачи прочности цилиндрических оболочек. М.: Машиностроение, 1983. 248 с. 4. *Ван-Дайк М.* Методы возмущений в механике жидкости. М.: Мир, 1967. 310 с. 5. *Корнев В.М., Вахромеев Ю.М.* – Дифференц. уравнения, 1977, т. 13, № 7, с. 1163–1170.