А. С. Садуллаев, Лемма Шварца для круговых областей и ее применение, *Матем. заметки*, 1980, том 27, выпуск 2, 245–253

МАТЕМАТИЧЕСКИЕ ЗАМЕТКИ

т. 27, № 2 (1980)

ЛЕММА ШВАРЦА ДЛЯ КРУГОВЫХ ОБЛАСТЕЙ И ЕЕ ПРИМЕНЕНИЯ

А. Садуллаев

Доказывается вариант леммы Шварца для областей комплексного пространства $\mathbf{C}^n$ некоторого специального вида, а также ее применения к изучению голоморфных отображений таких областей.

Назовем область $D \subset \mathbf{C}^n$ круговой с центром в точке O, если сечение D любой комплексной прямой $l \ni O$ является кругом с центром в точке O.

Заметим, что любая полная область Рейнхарта и шар в любой $\mathbf{C}$-однородной норме $\|\cdot\|$ являются круговыми областями.

1. Для круговой области $D \subset \mathbf{C}^n$ с центром в точке O и точки $p \in \mathbf{C}^n \setminus \{0\}$ обозначим через $R(D, p)$ радиус круга $l \cap D$, где l — комплексная прямая, проходящая через O и p. Очевидно, $R(D, \lambda p) = R(D, p)$ для любого $\lambda \in \mathbf{C}$.

В дальнейшем мы рассматриваем только ограниченные области с центром в точке O, не оговаривая этого каждый раз.

Следующая лемма является обобщением леммы Шварца.

ЛЕММА. *Пусть* $f = (f_1, f_2, \ldots, f_n)$ — *отображение единичного круга* $U = \{|\xi| < 1\}$ *в некоторую псевдовыпуклую круговую область* $D \subset \mathbf{C}^n$, *и пусть* $f(0) = 0$. *Тогда для любой точки* $\xi \in U$ *имеет место неравенство*

$$|f(\xi)| \leqslant R(D, f(\xi)) \cdot |\xi|, \tag{1}$$

где $|f|^2 = f_1\bar{f}_1 + \cdots + f_n \cdot \bar{f}_n$.

Доказательство. Фиксируем $r < 1$ и рассмотрим вспомогательную вектор-функцию

$$\varphi_r(\xi) = \frac{f(\xi r)}{\xi} = \left(\frac{f_1(\xi r)}{\xi}, \ldots, \frac{f_n(\xi r)}{\xi}\right). \qquad (2)$$

Она голоморфна в замыкании U и переводит границу ∂U в D. Так как D псевдовыпуклая и круговая, то по принципу непрерывности φ_r отображает U в D, т. е. $|\varphi_r(\xi)| \leqslant \leqslant R(D, \varphi_r(\xi)) = R(D, f(\xi r))$ для любой $\xi \in U$. Следовательно, для любых $\xi \in U$

$$|f(\xi r)| \leqslant R(D, f(\xi r)) \cdot |\xi|. \qquad (3)$$

Так как $r < 1$ произвольно, то отсюда следует, что $|f(\xi)| \leqslant R(D, f(\xi)) \cdot |\xi|$. Лемма доказана.

ТЕОРЕМА 1. *Пусть D_1, D_2 — произвольные круговые области, причем D_2, кроме того, псевдовыпукла. Если f: $D_1 \to D_2$ — голоморфное отображение такое, что $f(0) = 0$, то линейная часть L_f отображения f также отображает D_1 в D_2.*

Доказательство. Фиксируем точку $z^0 \in D_1 \setminus \setminus \{0\}$ и без нарушения общности предположим, что

$$L_f(z^0) = (0, 0, \ldots, 0, W_n^0) \neq 0. \qquad (4)$$

Преобразование $(W_1, \ldots, W_{n-1}, W_n) \to (W_1/W_n, \ldots \ldots, W_{n-1}/W_n, W_n)$ устанавливает голоморфный изоморфизм между областью $D_2 \setminus \{W_n = 0\}$ и областью Хартогса

$$G = \left\{('W, W_n) \in C^n\colon\ 0 < |W_n| < \frac{R(D_2, 'W, 1)}{\sqrt{1 + |'W|^2}}\right\}, \qquad (5)$$

где $'W = (W_1, \ldots, W_{n-1})$. Так как область $D_2 \setminus \{W_n = 0\}$ псевдовыпукла, то G также псевдовыпукла. Отсюда мы заключаем, что функция $\ln R(D_2, 'W, 1)/\sqrt{1 + |'W|^2}$ является плюрисупергармонической в $\mathbf{C}^{n-1}$ и, следователь но, функция $\ln\ |W_n|\, R(D_2, W)/\ |W|$ плюрисупергармонична вне гиперплоскости $\{W \in \mathbf{C}^n\colon\ W_n = 0\}$. Поэтому, если положить

$$\tilde{R}(W) = (\ |W_n|/\ |W|) R(D_2, W), \qquad (6)$$

то функция $\ln \tilde{R}(f(\lambda z^0)) = \ln \tilde{R}\,[(L_f(z^0) + (f(\lambda z^0) - - L_f(\lambda z^0))/\lambda)]$ будет супергармонической по $\lambda \in \mathbf{C}$ в некоторой окрестности нуля. Так как для любой супергармонической функции $u(\lambda)$ ее нижний предел $\underline{\lim}_{\lambda \to \lambda_0} u(\lambda) =$

$= u(\lambda_0)$, то существует последовательность $\lambda_k \to 0$ такая, что

$$\lim_{k\to\infty} \ln \tilde{R}(f(\lambda_k z^0)) = \ln \tilde{R}(L_f(z^0)). \tag{7}$$

Согласно доказанной лемме и равенству (7) имеем

$$\lim_{k\to\infty} \frac{|f(\lambda_k z^0)|}{|\lambda_k z^0|} \leqslant \lim_{k\to\infty} \frac{R(D_2, f(\lambda_k z^0))}{R(D_1, \lambda_k z^0)} =$$

$$= \frac{1}{R(D_1, z^0)} \lim_{k\to\infty} \frac{|f(\lambda_k z^0)|}{|f_n(\lambda_k z^0)|} \tilde{R}(f(\lambda_k z^0)) =$$

$$= \frac{\tilde{R}(L_f(z^0))}{R(D_1, z^0)} = \frac{R(D_2, L_f(z^0))}{R(D_1, z^0)}. \tag{8}$$

Следовательно,

$$\frac{|L_f(z^0)|}{|z^0|} = \lim_{k\to\infty} \frac{|f(\lambda_k z^0)|}{|\lambda_k z^0|} \leqslant \frac{R(D_2, L_f(z^0))}{R(D_1, z^0)}. \tag{9}$$

Из этого неравенства вытекает, что

$$|L_f(z^0)| \leqslant R(D_2, L_f(z^0)) \frac{|z^0|}{R(D_1, z^0)} \leqslant R(D_2, L_f(z^0)), \tag{10}$$

т. е. $L_f(z^0) \in D_2$. Теорема доказана.

Отметим, что для шаров в C-однородной норме аналогичный результат имеется в работе Симха [1].

Следствие. *Пусть D_1, D_2 — псевдовыпуклые круговые области. Тогда биголоморфное отображение D_1 на D_2, сохраняющее центр, является линейным.*

Действительно, линейная часть L_f отображения $f: D_1 \to D_2$ по теореме 1, примененной к f и f^{-1}, является отображением D_1 на D_2. Поэтому отображение $L_f \circ f^{-1} = z +$ (*члены высшей степени*) переводит D_2 в себя и по теореме Картана (см. [2]) $L_f \circ f \equiv z$, т. е. $f \equiv L_f$.

2. ТЕОРЕМА 2. *Пусть $D_1 \subset \mathbb{C}^n$ — строго псевдовыпуклая круговая область, ограниченная поверхностью вида*

$$\partial D_1 = \{z \in \mathbb{C}^n: \quad \varphi(z, \bar{z}) = 0\}, \tag{11}$$

где φ — вещественно-аналитическая функция в $\mathbb{C}^n \simeq R^{2n}$. Тогда любое биголоморфное отображение D_1 на строго псевдовыпуклую область D_2 вида

$$D_2 = \{z \in \mathbb{C}^n: \ |z|^2 + 2\operatorname{Re}\psi(z) < 0\}, \tag{12}$$

где ψ — голоморфная функция в окрестности замыкания $\bar{D}_2$, продолжается мероморфно на все пространство $\mathbb{C}^n$.

Доказательство. Можно считать, что f голоморфна в некоторой окрестности замыкания $\overline{D}_1$ (см. [3]). Так как на границе ∂D_1 градиент $\nabla\varphi = (\partial\varphi/\partial z_1, \ldots$ $\ldots, \partial\varphi/\partial z_n) \neq 0$, то без нарушения общности предполагаем, что $\partial\varphi/\partial z \not\equiv 0$ на ∂D_1. Тогда нетрудно доказать, что множество $S = \{\xi \in \partial D_1: \partial\varphi/\partial z_n = 0\}$ имеет нулевую меру Лебега на ∂D_1. Так как функция $\varphi(z, \bar{z})$ во всем пространстве $\mathbf{C}^n$ представляется в виде суммы степенного ряда по переменным $z, \bar{z}$, то для любого круга $U \subset \mathbf{C}^n$ функции $\partial\varphi/\partial z_k$, $k = 1, 2, \ldots, n$, голоморфно продолжаются с границы этого круга в круг с выколотым центром.

Следуя Пинчуку (см., например, [3]), рассмотрим теперь на ∂D_1 касательные векторные поля

$$u_j = \frac{\partial\varphi}{\partial z_n}\frac{\partial}{\partial z_j} - \frac{\partial\varphi}{\partial z_j}\frac{\partial}{\partial z_n}, \qquad j = 1, 2, \ldots, (n-1). \tag{13}$$

Применяя эти поля к равенству $f_1\bar{f}_1 + \ldots + f_n\bar{f}_n +$ $+ \psi \circ f + \overline{\psi \circ f} = 0$ для $\xi \in \partial D_1$, получаем

$$\begin{gathered}\bar{f}_1 u_j f_1 + \cdots + \bar{f}_n u_j f_n = -u_j \psi \circ f,\\ \bar{f}_1 u_p u_q f_1 + \cdots + \bar{f}_n u_p u_q f_n = -u_p u_q \psi \circ f,\\ j, p, q = 1, 2, \ldots, (n-1).\end{gathered} \tag{14}$$

Эта система позволяет рационально выразить $\bar{f}_r$, $r = 1, 2, \ldots, n$, через $u_j f_m$, $u_p u_q f_m$, $m = 1, 2, \ldots, n$, в тех точках $\xi \in \partial D_1$, где ранг матрицы системы (14) равен n. Ясно, что произвольно фиксированный минор этой матрицы либо тождественно равен нулю (на ∂D_1), либо почти всюду отличен от нуля. Следовательно, если ранг матрицы равен n, то для почти всех прямых $l \ni O$ (по мере Лебега проективного пространства прямых, проходящих через O) сужения $\bar{f}_r|_{l \cap \partial D_1}$, $r = 1, 2, \ldots, n$, мероморфно продолжаются в круг $l \cap D_1$ с выколотым центром [1]), ибо туда голоморфно продолжаются функции $\partial\varphi/\partial z_k$, а значит, и $u_j f_m$, $u_p u_q f_m$.

Если ранг указанной матрицы строго меньше n всюду на ∂D_1, то существуют функции $\lambda_1, \lambda_2, \ldots, \lambda_n$ такие, что

$$\lambda_1 u_j f_1 + \cdots + \lambda_n u_j f_n = 0, \tag{15$_1$}$$

$$\lambda_1 u_p u_q f_1 + \cdots + \lambda_n u_p u_q f_n = 0, \tag{15$_2$}$$

$$j, p, q = 1, 2, \ldots, (n-1).$$

[1]) Отметим, что пересечения $l \cap D_1$, где $l \ni 0$, являются кругами.

Заметим, что векторы $(u_j f_1, \ldots, u_j f_n)$, $j = 1, 2, \ldots, (n-1)$, линейно независимы для всех $\xi \in \partial D_1 \setminus S$[1]). Поэтому на $\partial D_1 \setminus S$ функции $\lambda_1, \lambda_2, \ldots, \lambda_n$ рационально выражаются через $u_j f_m$, $j = 1, 2, \ldots, (n-1)$; $m = 1, 2, \ldots, n$, и, следовательно, их можно считать бесконечно гладкими функциями на ∂D_1. Покажем, что отношения λ_j/λ_k удовлетворяют сопряженно-касательным уравнениям Коши—Римана во всех точках $\xi \in \partial D_1$, где $\lambda_k(\xi) \neq 0$. Действительно, пусть, например, в точке $\xi^0 \in \partial D_1$ функция $\lambda_n(\xi^0) \neq 0$. Применяя к системе (15_1) операторы $u_1, \ldots, u_{n-1}$ повторно и воспользовавшись (15_2) для точек $\xi \in U \cap \partial D_1$, где $U \ni \xi^0$ — некоторая окрестность, получим

$$u_p(\lambda_1/\lambda_n)u_j f_1 + \cdots + u_p(\lambda_{n-1}/\lambda_n)u_j f_{n-1} = 0, \tag{16}$$
$$p, j = 1, 2, \ldots, (n-1).$$

Отсюда, в силу линейной независимости векторов $(u_j f_1, \ldots, u_j f_n)$, $j = 1, 2, \ldots, (n-1)$, в U имеем $u_p(\lambda_1/\lambda_n) = \ldots = u_p(\lambda_{n-1}/\lambda_n) = 0$. Так как векторные поля $u_1, \ldots, u_{n-1}$ для любой точки $\xi \in \partial D_1 \setminus S$ образуют базу на комплексной касательной плоскости $T^c_\xi(\partial D_1)$ и S нигде не плотно, то всюду в $U \subset \partial D_1$ функции $\lambda_1/\lambda_n, \ldots, \lambda_{n-1}/\lambda_n$ удовлетворяют сопряженно-касательным условиям Коши—Римана.

Из доказанного и из строгой псевдовыпуклости D_1 можно доказать, что отношения λ_m/λ_k продолжаются до антимероморфных функций в D_1 и поэтому функции $\lambda_1, \lambda_2, \ldots, \lambda_n$ можно выбрать антиголоморфными в D_1. Положим

$$\bar{\lambda}_1 \bar{f}_1 + \cdots + \bar{\lambda}_n \bar{f}_n = \bar{\mu}. \tag{17}$$

Тогда согласно (15_1) функция μ также антиголоморфна в D_1.

Рассмотрим теперь систему

$$\begin{gathered} \bar{f}_1 u_j f_1 + \cdots + \bar{f}_n u_j f_n = -u_j \psi \circ f, \\ \bar{f}_1 \bar{\lambda}_1 + \cdots + \bar{f}_n \bar{\lambda}_n = \bar{\mu}, \\ j = 1, 2, \ldots, (n-1). \end{gathered} \tag{18}$$

---

[1]) Напомним, что $S = \{\xi \in \partial D_1 \colon \partial\varphi/\partial z_n = 0\}$.

Определитель

$$\begin{vmatrix} u_1 f_1 & \dots & u_1 f_n \\ \dots & \dots & \dots \\ u_{n-1} f_1 & \dots & u_{n-1} f_n \\ \bar{\lambda}_1 & \dots & \bar{\lambda}_n \end{vmatrix} \tag{19}$$

не равен тождественно нулю на ∂D_1, ибо в противном случае имело бы место тождество $\lambda_1\bar{\lambda}_1 + \dots + \lambda_n\bar{\lambda}_n \equiv 0$, что невозможно в силу выбора функций $\lambda_1, \lambda_2, \dots, \lambda_n$. Система (18) в рассматриваемом случае позволяет на ∂D_1 выразить рационально функции f_r, $r = 1, 2, \dots, n$, через $u_j f_m$, $\bar{\lambda}_m$, $\bar{\mu}$, $j = 1, 2, \dots, (n-1)$; $m = 1, 2, \dots, n$. Следовательно, в этом случае также для почти всех прямых $l \ni O$ сужения $\bar{f}_r \,|_{l\cap\partial D_1}$ мероморфно продолжаются в круг $l \cap D_1$ с выколотым центром. Поэтому для почти всех прямых $l \ni O$ сужения $\bar{f}_r \,|_{l\cap\partial D_1}$ являются мероморфными функциями на всей прямой $l \simeq \mathbf{C}$. Отсюда мы получаем, что функции f_r, $r = 1, 2, \dots, n$, мероморфны по совокупности переменных. Теорема доказана.

ТЕОРЕМА 3. *Пусть* $D_1 \subset \mathbf{C}^n$ — *строго псевдовыпуклая L — круговая область, ограниченная поверхностью вида* (11), *где* φ — *вещественный полином, а* $D_2 \subset \mathbf{C}^n$ — *строго псевдовыпуклая область вида* (12).

Тогда биголоморфное отображение D_1 на D_2 является рациональным.

Доказательство проводится аналогично доказательству теоремы 2, с той только разницей, что теперь функции $\partial\varphi/\partial z_k$, $k = 1, 2, \dots, n$, в (13) не только голоморфно продолжаются в круг с выколотым центром, но и мероморфно продолжаются на весь круг $l \cap D_1$, где $l \ni 0$ — произвольная комплексная прямая. Поэтому сужения $f_r \,|_l$ являются рациональными функциями для почти всех $l \ni 0$ и, следовательно, f_r, $r = 1, 2, \dots, n$,— рациональные функции.

3. Рассмотрим в $\mathbf{C}^n$ поверхность второго порядка

$$\sum\nolimits_{k,j} c_{kj} z_k \bar{z}_j + 2 \operatorname{Re} \sum\nolimits_{k,j} a_{kj} z_k z_j + p = 0, \tag{20}$$

где $c_{kj} = \bar{c}_{jk}$, $a_{kj} = a_{jk}$. Если эрмитова форма $\sum_{k,j} c_{kj} z_k \bar{z}_j$ положительно определена, то после линейной замены такую поверхность можно представить в виде

$$\sum\nolimits_{k=1}^{n} [z_k \bar{z}_k + \sigma_k (\bar{z}_k^2 + z_k^2)] = \pm 1, \tag{21}$$

где $\sigma_k \geqslant 0$.

В дальнейшем для определенности положим $\sigma_1 \leqslant \sigma_2 \leqslant \leqslant \ldots \leqslant \sigma_n$. Тогда представление поверхности (20) в виде (21) единственно.

Из сказанного следует, что любой эллипсоид в $\mathbf{C}^n$ можно задать в следующем виде:

$$E_\sigma = \{|z|^2 + 2\,\mathrm{Re}\sum_{k=1}^{n} \sigma_k z_k^2 < 1\}, \tag{22}$$

где $\sigma = (\sigma_1, \sigma_2, \ldots, \sigma_n)$, $\sigma_1 \leqslant \sigma_2 \leqslant \ldots \leqslant \sigma_n$; $0 \leqslant \sigma_k < 1/2$: Ясно, что если $\sigma' \neq \sigma''$, то $E_{\sigma'}$, $E_{\sigma''}$ линейно не эквивалентны. Опишем линейные автоморфизмы эллипсоида E_σ. Для этого рассмотрим R-линейное преобразование

$$\Phi_\sigma\colon\ z_k \to (1 - 4\sigma_k^2)^{-1}(z_k - 2\sigma_k \bar{z}_k), \qquad k = 1, 2, \ldots, n, \tag{23}$$

пространства $\mathbf{C}^n \simeq R^{2n}$, которое переводит E_σ в шар $\{|z| < 1\}$.

Определение. Две комплексные прямые l_1, l_2, проходящие через начало координат, называются E_σ-ортогональными, если при отображении (23) они переходят в ортогональные (относительно эвклидовой метрики) вещественно двумерные плоскости.

Комплексная прямая $l \ni 0$ высекает из E_σ эллипс вида $\omega\bar{\omega} + \delta(\omega^2 + \bar{\omega}^2) < 1$, где $\omega \in \mathbf{C}$ и $0 \leqslant \delta = \delta(\sigma, l) < 1/2$. Следовательно, система координатных прямых $L_k = \{z_1 = \ldots = z_{k-1} = z_{k+1} = \ldots = z_n = 0\}$, образует попарно E_σ-ортогональные прямые и $\delta(\sigma, L_k) = \sigma_k$.

Нетрудно доказать следующее

Предложение. *Если $l_1, l_2, \ldots, l_n$ — попарно E_σ-ортогональные комплексные прямые такие, что для каждого k, $1 \leqslant k \leqslant n$, величина $\delta(\sigma, l_k)$ совпадает с σ_k, то существует $\mathbf{C}$-линейный автоморфизм эллипсоида E_σ, переводящий k-ю координатную прямую L_k в l_k.*

И наоборот, любой автоморфизм эллипсоида E_σ переводит координатные прямые в систему попарно E_σ-ортогональных комплексных прямых.

На самом деле отображение Φ_σ переводит комплексные прямые $l_1, l_2, \ldots, l_n$ в ортогональные действительные плоскости, которые в свою очередь с помощью ортогонального преобразования F можно перевести в координатные, комплексные прямые L_k, $1 \leqslant k \leqslant n$. Можно показать, что при подходящем выборе F преобразование $\Phi_\sigma^{-1} \circ F \circ \Phi_\sigma$ является $\mathbf{C}$-линейным, которое переводит L_k в l_k.

Пусть теперь, $l_1, l_2, \ldots, l_n$ — образы координатных прямых при некотором $\mathbf{C}$ — линейном автоморфизме T эллипсоида E_σ. Тогда преобразование $F = \Phi_\sigma \circ T \circ \Phi_\sigma^{-1}$ является R — линейным автоморфизмом шара и, поэтому — ортогонально. Следовательно, F переводит координатные комплексные прямые L_k в попарно ортогональные действительные плоскости, которые с другой стороны являются образами $l_1, l_2, \ldots, l_n$ при Φ_σ. Предложение доказано.

Из этого предложения следует, что каждой системе $\{l_1, l_2, \ldots, l_n\}$ попарно E_σ — ортогональных прямых, удовлетворяющих условиям $\delta(\sigma, l_k) = \sigma_k$, соответствует линейный автоморфизм эллипсоида E_σ, переводящий l_k в k-ю координатную прямую. Это соответствие позволяет в совокупности $\Gamma(E_\sigma)$ попарно E_σ — ортогональных прямых $l_1, \ldots, l_n$ таких, что $\delta(\sigma, l_k) = \sigma_k$, ввести групповую структуру.

ТЕОРЕМА 4. *Группа линейных автоморфизмов* $\mathrm{aut}(E_\sigma)$ *эллипсоида* E_σ *совпадает с прямым произведением групп* $\Gamma(E_\sigma) \oplus \mathrm{sp}$, *где* sp — *группа преобразований симметрии.*

Примеры. 1) Если $0 < \sigma_1 < \sigma_2 < \ldots < \sigma_n$, то группа $\Gamma(E_\sigma)$ тривиальна, т. е. состоит из системы координатных прямых. В этом случае $\mathrm{aut}(E_\sigma) = \mathrm{sp}$.

2) Если E_σ — эллипсоид в $\mathbf{C}^2$ с равными $\sigma_1 = \sigma_2 \neq 0$, то $\Gamma(E_\sigma)$ состоит из пар ортогональных прямых вида $az_1 + bz_2 = 0$, где a, b — действительные числа.

3) Пусть эллипсоид $E_\sigma \subset \mathbf{C}^n$, где $0 < \sigma_1 = \sigma_2 < \sigma_3 < \ldots < \sigma_n$. Тогда $\Gamma(E_\sigma)$ изоморфна группе, указанной в примере 2).

4) Если $0 = \sigma_1 = \sigma_2 = \ldots = \sigma_k < \ldots < \sigma_n$, то $\Gamma(E_\sigma)$ изоморфна группе унитарных преобразований пространства $\mathbf{C}^k$, факторизованной по sp.

4. Если направление $W = (W_1, \ldots, W_n)$ комплексной прямой $l = \{z \in \mathbf{C}^n: z = z^0 + W\omega, \omega \in \mathbf{C}\}$ удовлетворяет условию

$$\sigma_1 W_1^2 + \ldots + \sigma_n W_n^2 = 0, \qquad (24)$$

то сечение $l \cap E_\sigma$ является кругом. Из таких направлений всегда можно выбрать n линейно независимых направлений, за исключением случаев, когда эллипсоид E_σ имеет вид

$$E_\sigma = \{ |z|^2 + 2 \operatorname{Re} \sigma_n z_n^2 < 1\}, \qquad (25)$$

где $0 < \sigma_n < 1/2$.

ТЕОРЕМА 5. *Пусть* $f: E_\sigma \to D$ — *биголоморфное отображение эллипсоида* E_σ, *не имеющего вид* (25), *на строго псевдовыпуклую область* D *вида* (12). *Тогда* f *рационально.*

Доказательство. Так же как в доказательстве теоремы 3, для комплексных прямых $l = \{z \in \mathbf{C}^n\colon z = z^0 + W\omega,\ z^0 \in E_\sigma,\ \omega \in \mathbf{C}\}$ таких, что $l \cap E_\sigma$ — круг, мы можем доказать рациональность сужения $f\,|_l$. Так как такие прямые образуют семейство прямых, параллельных n комплексно линейно независимым направлениям, то f рационально и по совокупности переменных.

Следствие. *Эллипсоид* E_σ, *отличный от шара* ($\sigma \neq 0$), *в пространстве* $\mathbf{C}^n$, $n > 1$, *биголоморфно не эквивалентен шару.*

Доказательство проводится с помощью теоремы 5 и следующих простых утверждений:

а) Если комплексная прямая такая, что $l \cap E_\sigma$ — круг или $l = L_k = \{z_1 = \ldots = z_{k-1} = z_{k+1} = \ldots = z_n = 0\}$, то для любых точек $p, q \in l \cap E_0$

$$C_{E_\sigma}(p, q) = C_{l \cap E_\sigma}(p, q), \tag{26}$$

где C_{E_σ}, $C_{l \cap E_\sigma}$ — расстояние Каратеодори эллипсоида E_σ и сечения $l \cap E_\sigma$ соответственно.

Замечание. Когда эта статья была подготовлена к печати, нам стало известно, что Вебстером [5] анонсирована линейность биголоморфных отображений эллипсоидов. Из этого результата следует, что описание линейных автоморфизмов эллипсоида E_σ, $\sigma \neq 0$, данное в п. 3, является описанием групп всех его биголоморфных автоморфизмов.

Ташкентский государственный университет

Поступило 6.X.1977

ЦИТИРОВАННАЯ ЛИТЕРАТУРА

[1] Simha R. R., Holomorphic mappings between balls and polydiscs, Proc. Amer. Math. Soc., **54**, № 1 (1976), 241—242.

[2] Шабат Б. В., Введение в комплексный анализ, М., «Наука», 1969.

[3] Пинчук С. И., Об аналитическом продолжении голоморфных отображений, Матем. сб., **98**, № 3 (1975), 416—435.

[4] Oeljeklans H., Über die Automorphismengruppe von Ellipsoiden, Math. Ann., **206**, № 3, 1973, 225—236.

[5] Webster S. M., On the mapping problem for algebraic real hupersurfases, Notices Amer. Math. Soc., **24**, № 5 (1977), 473.