



Math-Net.Ru

Общероссийский математический портал

В. Г. Журавлев, Локализованные матрицы Пизо и совместные приближения алгебраических чисел, *Зап. научн. сем. ПОМИ*, 2017, том 458, 104–134

Использование Общероссийского математического портала Math-Net.Ru подразумевает, что вы прочитали и согласны с пользовательским соглашением

<http://www.mathnet.ru/rus/agreement>

Параметры загрузки:

IP: 18.97.14.89

22 января 2025 г., 00:27:46



В. Г. Журавлев

**ЛОКАЛИЗОВАННЫЕ МАТРИЦЫ ПИЗО И  
СОВМЕСТНЫЕ ПРИБЛИЖЕНИЯ  
АЛГЕБРАИЧЕСКИХ ЧИСЕЛ**

ВВЕДЕНИЕ

**0.1. Симплекс-модулярный алгоритм.** В [1] построен симплекс-модулярный алгоритм ( $\mathcal{SM}$ -алгоритм) разложения алгебраических чисел  $\alpha_1, \dots, \alpha_d$  в многомерные цепные дроби

$$\mathcal{SM}: \frac{P_a}{Q_a} = \left( \frac{P_{a,1}}{Q_a}, \dots, \frac{P_{a,d}}{Q_a} \right) \longrightarrow \alpha \text{ при } a \rightarrow +\infty, \quad (0.1)$$

где  $\alpha = (\alpha_1, \dots, \alpha_d)$ . Основу указанного алгоритма составляют:

1)  $d$ -мерные минимальные рациональные симплексы  $\mathbf{s}$ , содержащие точку  $\alpha$ ;

и

2) матрицы Пизо  $P_\alpha$ , обладающие свойством

$$P_\alpha \begin{pmatrix} \alpha_1 \\ \vdots \\ \alpha_d \\ 1 \end{pmatrix} = \lambda \begin{pmatrix} \alpha_1 \\ \vdots \\ \alpha_d \\ 1 \end{pmatrix}, \quad (0.2)$$

где  $\lambda > 1$  – некоторая единица Пизо поля  $\mathbb{Q}(\alpha)$ . Это означает, что все ее сопряженные  $\lambda^{(2)}, \dots, \lambda^{(d+1)}$ , кроме  $\lambda^{(1)} = \lambda$ , удовлетворяют неравенствам  $|\lambda^{(2)}| < 1, \dots, |\lambda^{(d+1)}| < 1$ .

Каждый такой симплекс  $\mathbf{s}$  имеет рациональные вершины

$$\frac{\mathbf{P}_i}{\mathbf{Q}_i} = \left( \frac{\mathbf{P}_{i1}}{\mathbf{Q}_i}, \dots, \frac{\mathbf{P}_{id}}{\mathbf{Q}_i} \right),$$

где  $i = 0, 1, \dots, d$ , со знаменателями  $\mathbf{Q}_i > 0$ , удовлетворяющими условиям

$$\text{НОД}(\mathbf{P}_{i1}, \dots, \mathbf{P}_{id}, \mathbf{Q}_i) = 1,$$

---

*Ключевые слова:* многомерные цепные дроби, симплекс-модулярный алгоритм, наилучшие приближения.

Работа выполнена при финансовой поддержке РФФ, грант No. 14-11-00433.

и обладает свойством минимальности: симплекс  $s$  не содержит

$$\frac{P}{Q} \notin s \tag{0.3}$$

никакой точки  $\frac{P}{Q} = \left(\frac{P_1}{Q}, \dots, \frac{P_d}{Q}\right)$ , координаты которой имеют общий знаменатель  $1 \leq Q < Q_{\max}$ , где  $Q_{\max} = Q_0 + Q_1 + \dots + Q_d$ . Минимальные симплексы  $s$  являются многомерным обобщением отрезков Фарей. Двумерный случай исследован в [2–8] и [9] – для произвольной размерности. Используя свойство минимальности (0.3) было доказано, что подходящие дроби  $\frac{P_a}{Q_a}$  в (0.1) являются многомерными дробями Фарей, дающими наилучшие приближения для точки  $\alpha$ .

Что касается второй составляющей  $SM$ -алгоритма – матриц Пизо  $P_\alpha$  из (0.2), то для их нахождения была указана общая схема, использующая системы основных единиц соответствующего поля  $\mathbb{Q}(\alpha)$ . При этом предполагалось, что точка  $\alpha = (\alpha_1, \dots, \alpha_d)$  и соответствующий набор алгебраических действительных чисел  $\{\alpha_1, \dots, \alpha_d\}$  являются полными. Последнее означает выполнение условия  $\mathbb{Q}[\alpha] = \mathbb{Q}(\alpha)$ . Здесь  $\mathbb{Q}[\alpha] = \mathbb{Q}[1, \alpha_1, \dots, \alpha_d]$  обозначает модуль с базисом  $\{1, \alpha_1, \dots, \alpha_d\}$  над полем рациональных чисел  $\mathbb{Q}$  и  $\mathbb{Q}(\alpha)$  – поле, полученное расширением поля  $\mathbb{Q}$  добавлением к нему чисел  $\alpha_1, \dots, \alpha_d$ . Из определения, в частности, следует иррациональность точки  $\alpha$ , т.е. линейная независимость  $1, \alpha_1, \dots, \alpha_d$  над кольцом целых рациональных чисел  $\mathbb{Z}$ .

**0.2. Подходящие дроби и рекуррентные соотношения.** Пусть матрица Пизо  $P_\alpha$  из (0.2) имеет характеристический многочлен

$$\text{ch}_{P_\alpha}(x) = \det(xE - P_\alpha) = x^{d+1} - b_d x^d - \dots - b_1 x - b_0.$$

Зададим бесконечную последовательность из рациональных точек

$$\frac{P_a}{Q_a} = \left(\frac{P_{a,1}}{Q_a}, \dots, \frac{P_{a,d}}{Q_a}\right) \tag{0.4}$$

для  $a = 0, 1, 2, \dots$ , координаты каждой из которых имеют один и тот же знаменатель  $Q_a$ , с помощью рекуррентного соотношения

$$\begin{aligned} P_{a+d+1,i} &= b_d P_{a+d,i} + \dots + b_1 P_{a+1,i} + b_0 P_{a,i}, \\ Q_{a+d+1} &= b_d Q_{a+d} + \dots + b_1 Q_{a+1} + b_0 Q_a \end{aligned} \tag{0.5}$$

для  $i = 1, \dots, d$  и  $a = 0, 1, 2, \dots$

**0.3. Основной результат.** В теореме 9.1 доказано, что можно так выбрать матрицу Пизо  $P_\alpha$  в равенстве (0.2) и начальные условия в отвечающем данной матрице рекуррентном соотношении (0.5), при которых будет выполняться следующее утверждение.

*Если  $\alpha$  – полная точка степени  $d+1$ , то для любого фиксированного  $\theta > 0$  существует матрица Пизо  $P_\alpha$ , производящая последовательность подходящих дробей (0.4) с приближением*

$$\left| \alpha_1 - \frac{P_{a,1}}{Q_a} \right| + \dots + \left| \alpha_d - \frac{P_{a,d}}{Q_a} \right| \leq \frac{c_{\alpha,\theta}}{Q_a^{1+\frac{1}{d}-\theta}} \quad (0.6)$$

для всех  $a \geq a_{\alpha,\theta}$ . Здесь константы  $a_{\alpha,\theta} > 0$  и  $c_{\alpha,\theta} > 0$  не зависят от  $a$ .

Алгебраические числа  $\alpha_1, \dots, \alpha_d$ , участвующие в приведенном выше неравенстве (0.6), относятся к классу плохо приближающихся чисел. Относительно них известен следующий результат (см., например, [10, гл. V-3]).

*Существует такая постоянная  $c^* = c_\alpha^* > 0$ , зависящая только от точки  $\alpha$ , что выполняются неравенства*

$$\left| \alpha_1 - \frac{P_1}{Q} \right| + \dots + \left| \alpha_d - \frac{P_d}{Q} \right| \geq \frac{c^*}{Q^{1+\frac{1}{d}}} \quad (0.7)$$

для любых целых чисел  $P_1, \dots, P_d$  и  $Q > 0$ .

Сравнение двух приведенных выше результатов показывает, что приближения (0.6) можно за счет выбора матриц Пизо  $P_\alpha$  в (0.2) получать сколь угодно близкими к оптимальному (0.7). Однако, в этом месте требуется дополнительное уточнение. Основываясь на свойстве минимальности (0.3) симплексов  $\mathbf{s}$ , в теореме 8.1 доказано, что при любом выборе матрицы Пизо  $P_\alpha$  получаются наилучшие приближения относительно полиэдральных норм, задаваемых симплексами  $\mathbf{s}$ . В приведенном контексте приближениям вида (0.6) отвечают симплексы  $\mathbf{s}$ , имеющие форму близкую к шару.

**0.4. История вопроса.** В [1] было доказано существование матриц Пизо  $P_\alpha$  из (0.2), позволяющих получать приближения вида (0.6) с показателем  $\theta < 1/d$ . После того, как был разработан общий симплексный алгоритм разложения вещественных чисел в многомерные цепные дроби [9], появилась возможность строить матрицы Пизо  $P_\alpha$

с любым наперед заданным параметром  $\eta$ . Это позволило для алгебраических иррациональностей  $\alpha = (\alpha_1, \dots, \alpha_d)$  произвольной степени  $d + 1$  получать приближения (0.6) с любым фиксированным  $\theta > 0$ . В неравенствах (0.7) данный показатель  $\theta = 0$ . Симплекс-модулярным алгоритмом такое значение возможно только для полей вещественных квадратичных и кубических комплексных.

Хорошо известна связь между обычными цепными дробями и рекуррентными соотношениями второго порядка [11]. Для вычисления подходящих дробей в неравенствах (0.6) также применяются рекуррентные соотношения (0.5), но уже произвольного порядка  $d + 1$ . В многомерном случае такая связь приближений с рекуррентными последовательностями была обнаружена в [12] (см. также обзоры [13, 14]).

### §1. ПРИВЕДЕНИЕ ВЕКТОРОВ К КАНОНИЧЕСКОМУ ВИДУ

**1.1. Унимодулярные матрицы.** Обозначим через  $\mathrm{GL}_t(\mathbb{Z})$  группу унимодулярных матриц, состоящую из целочисленных квадратных матриц  $U$  размерности  $t$  с определителем  $\det U = \pm 1$ .

**Лемма 1.1.** Пусть дана произвольная строка  $u = (*_1 \dots *_t)$  длины  $t$  с целыми рациональными коэффициентами. Если

$$\mathrm{НОД} (*_1, \dots, *_t) = 1, \quad (1.1)$$

то строку  $u$  можно дополнить до унимодулярной матрицы

$$U = \begin{pmatrix} u_1 \\ u_2 \\ \vdots \\ u_t \end{pmatrix} \in \mathrm{GL}_t(\mathbb{Z}), \quad (1.2)$$

где  $u_1 = u$ .

**Доказательство.** Существует полная решетка

$$\mathcal{U} = \mathbb{Z}[u_1, u_2, \dots, u_t] \subseteq \mathbb{Z}^t, \quad (1.3)$$

для которой целочисленные векторы  $u_1, u_2, \dots, u_t$  линейно независимы над  $\mathbb{R}$ . В качестве фундаментальной области  $\mathcal{F} \simeq \mathbb{R}^t / \mathcal{U}$  решетки  $\mathcal{U}$  выберем множество

$$\mathcal{F} = \{x_1 u_1 + x_2 u_2 + \dots + x_t u_t; \quad 0 \leq x_i < 1\}. \quad (1.4)$$

Оно является параллелоэдром.

Пусть  $f = [\mathbb{Z}^t : \mathcal{U}]$  – индекс подрешетки  $\mathcal{U}$  в  $\mathbb{Z}^t$ . Как обычно, полагаем  $\text{vol } \mathbb{R}^t / \mathbb{Z}^t = 1$ . При таком нормировании индекс  $f$ , объем фундаментальной области (1.4) и определитель матрицы (1.2) связаны соотношениями

$$f = \text{vol } \mathcal{F} = |\det U|. \quad (1.5)$$

Поэтому выполняется равенство

$$\mathcal{U} = \mathbb{Z}^t, \quad \text{если } f = 1, \quad (1.6)$$

и тогда в этом случае, согласно соотношениям (1.5), матрица  $U$  из (1.2) будет унимодулярной. Предположим, что индекс  $f > 1$ . Далее мы покажем, как можно перестраивать базис  $u_1, u_2, \dots, u_t$  решетки (1.3) так, чтобы это приводило к уменьшению индекса  $f$ .

Если  $f > 1$ , то существует ненулевой вектор

$$v \in \mathcal{F} \cap \mathbb{Z}^t. \quad (1.7)$$

Целочисленный вектор  $v$  не может принадлежать ребру  $\mathbf{u}_1$  параллеледэдра  $\mathcal{F}$ , направленному вдоль вектора  $u_1$ , т.к. по условию (1.1) вектор  $u_1$  является примитивным. Вектор  $v \neq 0$  также не может принадлежать сразу всем ребрам  $\mathbf{u}_i$ ,  $i \neq 1$ , параллеледэдра  $\mathcal{F}$ . Пусть  $v$  не принадлежит, например, ребру  $\mathbf{u}_i$ . Тогда от решетки  $\mathcal{U}$  перейдем к новой решетке

$$\mathcal{U}' = \mathbb{Z}[u'_1, u'_2, \dots, u'_i], \quad (1.8)$$

где  $u'_i = v$  и  $u'_j = u_j$  для остальных  $j \neq i$ . В силу (1.7) и (1.8) объемы  $\text{vol } \mathcal{F}' < \text{vol } \mathcal{F}$ , а тогда согласно (1.5) и индексы будут удовлетворять неравенству

$$f' = [\mathbb{Z}^t : \mathcal{U}'] < f. \quad (1.9)$$

По указанному выше алгоритму продолжаем процесс

$$\mathcal{U} \rightarrow \mathcal{U}' \rightarrow \dots \rightarrow \mathcal{U}^{(k)},$$

заканчивающийся ввиду неравенства (1.9) на некотором шаге  $k$ , когда соответствующий индекс

$$f^{(k)} = [\mathbb{Z}^t : \mathcal{U}^{(k)}] = 1. \quad (1.10)$$

Сопоставляя (1.10) с (1.6) и (1.5), приходим к равенствам  $\mathcal{U}^{(k)} = \mathbb{Z}^t$  и  $|\det U| = 1$ , из которых следует, что отвечающая решетке  $\mathcal{U}^{(k)}$  матрица

$$U^{(k)} = \begin{pmatrix} u_1^{(k)} \\ u_2^{(k)} \\ \vdots \\ u_t^{(k)} \end{pmatrix}$$

будет унимодулярной. По построению у ней первая строка  $u_1^{(k)} = u$ , что доказывает лемму 1.1.  $\square$

**1.2. Ранг вектора и его каноническое представление.** Попробуем в смежном классе  $\mathrm{GL}_t(\mathbb{Z})\beta$  произвольного вектора  $\beta = (\beta_1, \dots, \beta_t)$  с вещественными координатами  $\beta_i$  найти канонического представителя.

Предположим, что координаты вектора  $\beta$  линейно зависимы

$$u'_1 \beta'_1 + \dots + u'_t \beta'_t \equiv 0 \pmod{\mathbb{Z}} \quad (1.11)$$

над кольцом  $\mathbb{Z}$ , где  $\beta'_i = \beta_i$  и коэффициенты  $u'_1, \dots, u'_t$  — целые взаимно простые числа, не все равные нулю. По лемме 1.1 найдется унимодулярная матрица  $U' = \begin{pmatrix} u' \\ \vdots \end{pmatrix}$  из  $\mathrm{GL}_t(\mathbb{Z})$  с первой строкой  $u' = (u'_1 \dots u'_t)$ . Из сравнения (1.11) следует

$$U' \beta' \equiv \begin{pmatrix} 0 \\ \beta''_2 \\ \vdots \\ \beta''_t \end{pmatrix} \pmod{\mathbb{Z}}. \quad (1.12)$$

Здесь вектор  $\beta'$  записан в виде столбца. Если координаты вектора  $\beta'' = (\beta''_2, \dots, \beta''_t)$  снова окажутся линейно зависимы

$$u''_2 \beta''_2 + \dots + u''_t \beta''_t \equiv 0 \pmod{\mathbb{Z}},$$

то выбираем матрицу вида  $U'' = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & u'' \\ 0 & \vdots \end{pmatrix}$  с блоком  $\begin{pmatrix} u'' \\ \vdots \end{pmatrix}$  из группы  $GL_{t-1}(\mathbb{Z})$ . После умножения получаем сравнение

$$U''U'\beta' \equiv \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ \beta_3''' \\ \vdots \\ \beta_t''' \end{pmatrix} \pmod{\mathbb{Z}}.$$

Продолжая рассуждение, приходим к следующему сравнению

$$U^{(t')} \dots U''U'\beta' \equiv \begin{pmatrix} 0 \\ \vdots \\ \beta_{t'+1}^{(t'+1)} \\ \vdots \\ \beta_t^{(t'+1)} \end{pmatrix} \pmod{\mathbb{Z}}, \quad (1.13)$$

в котором координаты вектора  $\beta^{(t'+1)} = (\beta_{t'+1}^{(t'+1)}, \dots, \beta_t^{(t'+1)})$  будут линейно независимы над  $\mathbb{Z}$  по mod  $\mathbb{Z}$ , или – к сравнению

$$U^{(t')} \dots U''U'\beta' \equiv \begin{pmatrix} 0 \\ \vdots \\ 0 \\ \beta_t^{(t'+1)} \end{pmatrix} \pmod{\mathbb{Z}}, \quad (1.14)$$

где элемент  $\beta_t^{(t'+1)}$  – некоторое рациональное число.

Определим *ранг*  $\text{rank}_{\mathbb{Z}} \beta$  вектора или точки  $\beta = (\beta_1, \dots, \beta_t)$  как ранг модуля

$$\mathbb{Z}_{\beta} = \mathbb{Z}[\beta_1, \dots, \beta_t, 1] \quad (1.15)$$

над кольцом  $\mathbb{Z}$ . Вектор или точку  $\alpha$  назовем *иррациональными*, если выполняется условие:

$$\text{rank}_{\mathbb{Z}} \alpha = t + 1 \quad (1.16)$$

или, что равносильно –

$$\text{числа } 1, \alpha_1, \dots, \alpha_d \text{ линейно независимы над кольцом } \mathbb{Z}. \quad (1.17)$$



Для вектора  $\beta = \beta'$  из сравнений (1.13) и (1.14) следует

$$\text{rank}_{\mathbb{Z}} \beta = \text{rank}_{\mathbb{Z}} \beta^{(t'+1)} = t - t' + 1 \quad (1.18)$$

в иррациональном случае (1.13) и соответственно –

$$\text{rank}_{\mathbb{Z}} \beta = \text{rank}_{\mathbb{Z}} \beta^{(t'+1)} = 1 \quad (1.19)$$

в рациональном случае (1.14)

**Предложение 1.1.** Пусть ранг (1.15) вещественного вектора  $\beta = (\beta_1, \dots, \beta_t)$  равен

$$\text{rank}_{\mathbb{Z}} \beta = t' + 1, \quad (1.20)$$

где  $0 \leq t' \leq t$ . Тогда найдется такая матрица  $U$  из унимодулярной группы  $\text{GL}_t(\mathbb{Z})$ , что выполняется сравнение

$$\beta \equiv U\gamma \pmod{\mathbb{Z}}. \quad (1.21)$$

Здесь  $\gamma = \begin{pmatrix} 0 \\ \gamma' \end{pmatrix}$  – столбец высоты  $t$  с блоком  $\gamma' = \begin{pmatrix} \gamma_1 \\ \vdots \\ \gamma_{t'} \end{pmatrix}$ , элементы которого линейно независимы над  $\mathbb{Z}$  по  $\text{mod } \mathbb{Z}$  в случае  $t' \geq 1$ ; и  $\gamma' = (\gamma_1)$ , где  $\gamma_1$  – рациональное число, если  $t' = 0$ .

**Доказательство** вытекает из сравнений (1.13), (1.14) и равенств (1.18), (1.19).  $\square$

**Следствие 1.1.** Пусть  $\beta = (\beta_1, \dots, \beta_t)$  – любой вещественный вектор и  $\eta > 0$  – произвольное наперед заданное сколь угодно малое число. Тогда найдется такое натуральное число  $q$ , что будет выполняться неравенство

$$\|q\beta\|_s = \|q\beta_1\| + \dots + \|q\beta_t\| \leq \eta, \quad (1.22)$$

где  $\|x\|$  обозначает расстояние от  $x$  до ближайшего целого числа.

**Доказательство.** Пусть  $\text{rank}_{\mathbb{Z}} \beta \geq 2$  и  $\gamma = \begin{pmatrix} 0 \\ \gamma' \end{pmatrix}$  – столбец из (1.21).

Так как элементы блока  $\gamma' = \begin{pmatrix} \gamma_1 \\ \vdots \\ \gamma_{t'} \end{pmatrix}$  линейно независимы над кольцом  $\mathbb{Z}$  по  $\text{mod } \mathbb{Z}$ , то последовательность  $\{q\gamma'\}$  для  $q = 1, 2, 3, \dots$  всюду плотно

распределена на торе  $\mathbb{T}^{t'}$ . Поэтому для любого  $\eta' > 0$  найдется  $q$  с условием

$$\|q\gamma\|_s = \|q\gamma'\|_s = \|q\gamma_1\| + \dots + \|q\gamma_{t'}\| \leq \eta'. \quad (1.23)$$

Тогда найдется такая зависящая лишь от матрицы  $U$  граница  $\eta'_U > 0$ , что при выполнении условия  $0 < \eta' < \eta'_U$  из (1.23) и сравнения (1.21) для  $\beta$  будет следовать оценка

$$\|q\beta\|_s = \|U(q\gamma)\|_s \leq c_U \|q\gamma\|_s \leq c_U \eta' \quad (1.24)$$

с некоторой константой  $c_U > 0$ , зависящей только от  $U$ . Выбирая  $\eta' = \min\{\eta/c_U, \eta'_U\}$ , получаем неравенство (1.22).

Если  $\text{rank}_{\mathbb{Z}} \beta = 1$ , то согласно предложению 1.1 блок  $\gamma' = (\gamma_1)$  является рациональным числом  $a/b$ . Можем считать  $b \geq 1$ . В данном случае выбираем  $q = b$ . В силу сравнения (1.21) имеем

$$\|q\beta\|_s = \|U(q\gamma)\|_s = 0$$

и сразу приходим к неравенству (1.22).  $\square$

**Замечание 1.1.** В [9] был построен симплекс-ядерный алгоритм разложения в многомерные цепные дроби, применимый к векторам  $\gamma'$  с условием  $\text{rank}_{\mathbb{Z}} \gamma' = t' + 1$ . Если воспользоваться неравенствами (1.23) и (1.24), то данный алгоритм можно использовать и для нахождения приближений в случае произвольных векторов  $\beta$ .

## §2. ЕДИНИЦЫ АЛГЕБРАИЧЕСКИХ ПОЛЕЙ

**2.1. Основные единицы.** Рассмотрим вещественное алгебраическое поле

$$\mathbb{F} = \mathbb{Q}(\theta) \subset \mathbb{R} \quad (2.1)$$

— алгебраическое расширение степени  $d+1 = r+2c$  поля рациональных чисел  $\mathbb{Q}$ , где  $r \geq 1$  и  $2c$  обозначают число вещественных и комплексных сопряжений соответственно (подробности см., например, [15]). Выберем в  $\mathbb{F}$  некоторую полную систему основных единиц  $\varepsilon_1, \dots, \varepsilon_t$ , где  $t = r + c - 1$ . Они являются свободными образующими порождаемой ими группы единиц  $\mathcal{E}$ , имеющей максимально возможный ранг  $t$ . Зададим отображение

$$\varepsilon \mapsto x(\varepsilon) = (\ln|\varepsilon^{(1)}|, \dots, \ln|\varepsilon^{(r)}|, 2\ln|\varepsilon^{(r+1)}|, \dots, 2\ln|\varepsilon^{(r+c)}|) \quad (2.2)$$

множества единиц  $\mathcal{E}$  в пространство  $\mathbb{R}^{t+1}$ , где  $\varepsilon^{(1)}, \dots, \varepsilon^{(r)}$  — вещественные сопряженные значения для  $\varepsilon$  и  $\varepsilon^{(r+1)}, \dots, \varepsilon^{(r+c)}$  — комплексные, при этом полагаем  $\varepsilon^{(1)} = \varepsilon$ . Отображение (2.2) будет вложением

$x : \mathcal{E} \hookrightarrow \mathbb{R}^{t+1}$  группы  $\mathcal{E}$  в векторное пространство  $\mathbb{R}^{t+1}$  с сохранением в них операций

$$x(\varepsilon \cdot \varepsilon') = x(\varepsilon) + x(\varepsilon'). \quad (2.3)$$

**2.2. Единицы Пизо.** Единицу  $\zeta \in \mathcal{E}$  назовем *единицей Пизо*, если она удовлетворяет следующим условиям:

$$\zeta = \zeta^{(1)} > 1 \text{ и } |\zeta^{(i)}| < 1 \text{ для остальных сопряжений } i > 1. \quad (2.4)$$

Обозначим через  $\mathcal{P} \subset \mathcal{E}$  подмножество всех единиц Пизо  $\zeta$  из группы  $\mathcal{E}$ . Из определения (2.4) следует замкнутость множества  $\mathcal{P}$  относительно умножения  $\zeta \cdot \zeta' \in \mathcal{P}$  для любых  $\zeta, \zeta' \in \mathcal{P}$ . Поэтому множество  $\mathcal{P}$  образует полугруппу без единицы, поскольку 1 не является единицей Пизо (2.4).

**Предложение 2.1.** 1. Если ранг  $t \geq 1$ , то группа единиц  $\mathcal{E}$  содержит единицу Пизо (2.4) и, значит,  $\mathcal{P} \neq \emptyset$ .

2. Любая единица Пизо  $\zeta \in \mathcal{P}$  имеет степень

$$\deg(\zeta) = d + 1. \quad (2.5)$$

Здесь степень  $\deg(\zeta)$  числа  $\zeta$  определяется равенством  $\deg(\zeta) = \deg \mathbb{Q}(\zeta)$ , где справа указана степень  $\deg \mathbb{Q}(\zeta) = [\mathbb{Q}(\zeta) : \mathbb{Q}]$  расширения  $\mathbb{Q}(\zeta)$  над полем  $\mathbb{Q}$ .

Доказательство см. [1]. □

**2.3. Локализованные единицы Пизо.** Из определения отображения (2.2) следует, что образ  $\mathcal{L} = x(\mathcal{E})$  группы единиц  $\mathcal{E}$  содержится в гиперплоскости

$$P = \{x \in \mathbb{R}^{t+1}; \mathbf{n} \cdot x = 0\}, \quad (2.6)$$

где  $\mathbf{n} \cdot x$  — скалярное произведение  $x$  с вектором  $\mathbf{n} = (1, \dots, 1)$  размерности  $t + 1$ . Подмножество  $\mathcal{L} \subset P$  представляет собою *полную решетку* в пространстве (2.6) с  $\mathbb{Z}$ -базисом  $x(\varepsilon_1), \dots, x(\varepsilon_t)$ . Данное множество также образует базис в  $P$ , но уже относительно  $\mathbb{R}$ .

Вектор

$$\mathbf{d} = (d, \underbrace{-1, \dots, -1}_{r-1}, \underbrace{-2, \dots, -2}_c) \quad (2.7)$$

принадлежит гиперплоскости  $P$ . Поэтому он разложим

$$\mathbf{d} = \beta_1 x(\varepsilon_1) + \dots + \beta_t x(\varepsilon_t) \quad (2.8)$$

по базису решетки  $\mathcal{L}$  с некоторыми вещественными коэффициентами  $\beta_1, \dots, \beta_t$ . По следствию 1.1 для любого произвольного наперед заданного сколь угодно малого числа  $\eta > 0$  найдутся такие целые числа  $q \geq 1$  и  $p_1, \dots, p_t$ , что будет выполняться неравенство

$$|q\beta - p|_s = |q\beta_1 - p_1| + \dots + |q\beta_t - p_t| \leq \eta \quad (2.9)$$

в метрике  $|x|_s = |x_1| + \dots + |x_t|$  для  $x = (x_1, \dots, x_t)$  из  $\mathbb{R}^t$ .

Выберем единицу

$$\zeta = \varepsilon_1^{p_1} \dots \varepsilon_t^{p_t}. \quad (2.10)$$

Для нее, согласно свойству (2.3), имеем

$$x(\zeta) = p_1 x(\varepsilon_1) + \dots + p_t x(\varepsilon_t). \quad (2.11)$$

Из (2.7) и (2.8) следует равенство

$$q\mathbf{d} = q\beta_1 x(\varepsilon_1) + \dots + q\beta_t x(\varepsilon_t),$$

из которого и (2.11) находим разность

$$q\mathbf{d} - x(\zeta) = (q\beta_1 - p_1)x(\varepsilon_1) + \dots + (q\beta_t - p_t)x(\varepsilon_t).$$

Запишем векторы

$$x(\varepsilon_i) = (x_1(\varepsilon_i), \dots, x_{t+1}(\varepsilon_i)) \quad (2.12)$$

в координатах пространства  $\mathbb{R}^{t+1}$ . Тогда разность векторов  $q\mathbf{d} - x(\zeta)$  в силу (2.9) оценивается как

$$|q\mathbf{d} - x(\zeta)|_s \leq \eta', \quad (2.13)$$

где справа обозначили  $\eta' = \eta(t+1)\max_\varepsilon$  и

$$\max_\varepsilon = \max_{\substack{1 \leq i \leq t \\ 1 \leq j \leq t+1}} |x_j(\varepsilon_i)|. \quad (2.14)$$

Если ввести обозначение

$$\varrho = (\varrho_1, \dots, \varrho_{t+1}) = x(\zeta) - q\mathbf{d},$$

то для вектора  $x(\zeta)$  получим представление

$$x(\zeta) = q\mathbf{d} + \varrho, \quad (2.15)$$

при этом координаты вектора  $\varrho$  по (2.13) удовлетворяют неравенствам

$$|\varrho_1| \leq \eta', \quad \dots, \quad |\varrho_t| \leq \eta'. \quad (2.16)$$

По определению (2.2) записываем

$$x(\zeta) = (\ln|\zeta^{(1)}|, \ln|\zeta^{(2)}|, \dots, \ln|\zeta^{(r)}|, 2 \ln|\zeta^{(r+1)}|, \dots, 2 \ln|\zeta^{(r+c)}|), \quad (2.17)$$

а по (2.7) имеем

$$q\mathbf{d} = (qd, -q, \dots, -q, -2q, \dots, -2q). \quad (2.18)$$

Поэтому сравнивая координаты данных векторов и используя (2.15) и (2.17), (2.18), приходим к следующим формулам

$$\ln \zeta = \ln|\zeta^{(1)}| = qd + \varrho_1 \quad (2.19)$$

и

$$\ln|\zeta^{(i)}| = -q + \varrho_i \quad \text{для остальных } i \geq 2. \quad (2.20)$$

Из приведенных формул, в частности, следует

$$\ln \zeta^{1/d} + \ln|\zeta^{(i)}| = \varrho'_i, \quad (2.21)$$

где

$$\varrho'_i = \varrho_1/d + \varrho_i. \quad (2.22)$$

Из (2.21) выводим связь между  $\zeta$  и ее сопряженными  $\zeta^{(i)}$ :

$$|\zeta^{(i)}| = \zeta^{-1/d} \exp(\varrho'_i) \quad (2.23)$$

для всех  $i \geq 2$ . Здесь для показателя  $\varrho'_i$ , согласно (2.22) и (2.16), выполняются оценка

$$|\varrho'_i| \leq 2\eta'. \quad (2.24)$$

Перепишем равенство (2.23) в более удобной форме

$$|\zeta^{(i)}| = \zeta^{-1/d+\theta_i}, \quad (2.25)$$

где  $i \geq 2$  и  $\theta_i = \varrho'_i/\ln \zeta$ .

**Предложение 2.2.** Пусть  $\varepsilon = \{\varepsilon_1, \dots, \varepsilon_t\}$  – некоторая полная система основных единиц вещественного алгебраического поля  $\mathbb{F}$  из (2.1) степени  $d+1$ ,  $\zeta$  – единица (2.10), зависящая от  $\eta > 0$ , и  $\zeta^{(i)}$  – ее сопряженные. Тогда существует такая константа  $\eta_\varepsilon > 0$ , зависящая от выбора системы единиц  $\varepsilon$ , что выполняются следующие свойства:

1) если параметр  $\eta$  принадлежит интервалу

$$0 < \eta < \eta_\varepsilon, \quad (2.26)$$

то  $\zeta$  является единицей Пизо (2.4);

2) сопряженные  $\zeta^{(i)}$ , где  $\zeta = \zeta^{(1)}$ , связаны соотношением

$$\max_{2 \leq i \leq t} |\zeta^{(i)}| = \zeta^{-1/d+\theta} \quad (2.27)$$

с показателем

$$0 < \theta \leq c_\varepsilon \eta, \quad (2.28)$$

где константа  $c_\varepsilon > 0$  не зависит от выбора параметра  $\eta$  из (2.26).

**Доказательство.** Удобно начать с доказательства второго утверждения. Принимая во внимание (2.24) и (2.25), в качестве показателя  $\theta$  в равенстве (2.27) выберем

$$\theta = \max_{2 \leq i \leq t+1} \theta_i = \frac{1}{\ln \zeta} \max_{2 \leq i \leq t+1} \varrho'_i. \quad (2.29)$$

Из (2.13) и (2.14) получаем неравенства

$$\max_{2 \leq i \leq t+1} \varrho'_i \leq 2\eta' \leq 2\eta(t+1) \max_\varepsilon.$$

Поэтому  $\theta \leq c_\varepsilon \eta$ , где

$$c_\varepsilon = \frac{2}{\ln \zeta} (t+1) \max_\varepsilon, \quad (2.30)$$

что доказывает правое неравенство в (2.28).

Для доказательства левого неравенства воспользуемся нормой

$$\text{Norm}_{\mathbb{F}/\mathbb{Q}}(\zeta) = \zeta^{(1)} \dots \zeta^{(r)} \cdot |\zeta^{(r+1)}|^2 \dots |\zeta^{(r+c)}|^2 = \pm 1. \quad (2.31)$$

Оценивая величину  $|\text{Norm}_{\mathbb{F}/\mathbb{Q}}(\zeta)|$  с помощью формулы (2.27), получаем

$$1 = |\text{Norm}_{\mathbb{F}/\mathbb{Q}}(\zeta)| \leq \zeta (\zeta^{-1/d+\theta})^{r-1+2c} = \zeta (\zeta^{-1/d+\theta})^d = \zeta^{d\theta},$$

откуда следует неравенство  $\theta > 0$ .

Осталось проверить, что  $\zeta$  является единицей Пизо. Если параметр  $\eta > 0$  выбирать меньше некоторой границы  $\eta_\varepsilon > 0$ , то из формул (2.19) и (2.20) будут вытекать неравенства  $\ln \zeta = \ln |\zeta^{(1)}| > 0$  и  $\ln |\zeta^{(i)}| < 0$  для  $2 \leq i \leq t+1$ , из которых, в свою очередь, будет следовать, что  $\zeta$  удовлетворяет всем условиям в определении (2.4) единиц Пизо.  $\square$

Числа  $\zeta = \zeta_\eta > 1$ , отвечающие параметру  $\eta$  из интервала (2.26) будем называть *локализованными единицами Пизо*. Их основное свойство состоит в том, что модули всех сопряженных  $\zeta^{(i)}$  содержатся в некоторой окрестности

$$\zeta^{-1/d} - \delta_\eta \leq |\zeta^{(i)}| \leq \zeta^{-1/d} + \delta_\eta \quad (2.32)$$

для  $2 \leq i \leq t+1$ , где величина отклонения  $\delta_\eta \downarrow 0$ , если  $\eta \rightarrow 0$ . Свойство локализации (2.32) единиц Пизо  $\zeta$  вытекает из представления (2.15) и неравенств (2.16).

## §3. Модульные матрицы Пизо

**3.1. Модули.** Пусть  $\zeta \in \mathcal{P}$  – единица Пизо (2.4). По предложению 2.1 ее степени  $1, \zeta, \dots, \zeta^d$  линейно независимы над  $\mathbb{Q}$ . Поэтому алгебраическое поле  $\mathbb{Q}(\zeta)$  совпадает

$$\mathbb{Q}(\zeta) = \mathbb{F} \quad (3.1)$$

с полем (2.1) и *модуль*

$$\mathcal{M}_\zeta = \mathbb{Z}[1, \zeta, \dots, \zeta^d] \quad (3.2)$$

над кольцом  $\mathbb{Z}$  будет *полным*, т.е. числа  $1, \zeta, \dots, \zeta^d$  образуют базис поля  $\mathbb{F}$  над  $\mathbb{Q}$ .

Рассмотрим линейное отображение

$$\mathcal{M}_\zeta \xrightarrow{\zeta} \mathcal{M}_\zeta : x \mapsto \zeta \cdot x. \quad (3.3)$$

Из определения (3.2) вытекает, что отображение (3.3) задает автоморфизм модуля  $\mathcal{M}_\zeta$ . Поскольку  $1, \zeta, \dots, \zeta^d$  – базис модуля  $\mathcal{M}_\zeta$ , то найдется унимодулярная целочисленная матрица  $U_\zeta$  размера  $d+1$ , удовлетворяющая условию

$$U_\zeta \widehat{\zeta} = \zeta \cdot \widehat{\zeta}, \quad (3.4)$$

где слева записано произведение матрицы  $U_\zeta$  и столбца

$$\widehat{\zeta} = \begin{pmatrix} \zeta^d \\ \vdots \\ \zeta \\ 1 \end{pmatrix} \quad (3.5)$$

высоты  $d+1$ . Матрица  $U_\zeta$  называется *матрицей представления* элемента  $\zeta$  в базисе  $1, \zeta, \dots, \zeta^d$ .

**3.2. Матрица перехода  $T$ .** Пусть

$$\mathcal{M}_\alpha = \mathbb{Z}[1, \alpha_1, \dots, \alpha_d] \quad (3.6)$$

– произвольный полный модуль над кольцом  $\mathbb{Z}$  в поле  $\mathbb{F}$ . Точку  $\alpha = (\alpha_1, \dots, \alpha_d)$  и соответствующий набор чисел  $\{\alpha_1, \dots, \alpha_d\}$ , обладающие свойством (3.6), будем называть *полными*. Для полной точки  $\alpha$  характерно выполнение соотношения

$$\mathbb{Q}[\alpha] = \mathbb{Q}(\alpha) \quad (3.7)$$

между  $\mathbb{Q}[\alpha]$  – модулем (3.6) и  $\mathbb{Q}(\alpha)$  – расширением поля рациональных чисел  $\mathbb{Q}$  добавлением к нему чисел  $\alpha_1, \dots, \alpha_d$ . Из (3.1) и (3.6), в частности, следует иррациональность (1.17) точки  $\alpha = (\alpha_1, \dots, \alpha_d)$ , а из (3.7) – равенство  $\mathbb{Q}(\alpha) = \mathbb{F}$ . Определим для точки  $\alpha$  ее *степень*

$$\deg \alpha = \deg \mathbb{Q}(\alpha)/\mathbb{Q} = [\mathbb{Q}(\alpha) : \mathbb{Q}] \quad (3.8)$$

над полем  $\mathbb{Q}$ . Если  $\alpha$  – полная точка, то из (3.6) и (3.7) следует  $\deg \alpha = d + 1$ .

Далее, пусть  $T$  – матрица перехода

$$\hat{\alpha} = T\hat{\zeta} \quad (3.9)$$

от базиса полного модуля  $\mathcal{M}_\zeta$  к базису модуля  $\mathcal{M}_\alpha$ . Здесь столбец  $\hat{\alpha}$  определяется по модулю  $\mathcal{M}_\alpha$  добавлением единицы

$$\hat{\alpha} = \begin{pmatrix} \alpha_1 \\ \vdots \\ \alpha_d \\ 1 \end{pmatrix}. \quad (3.10)$$

Матрица перехода  $T$  имеет рациональные коэффициенты. Кроме того, поскольку модуль  $\mathcal{M}_\alpha$  также полный, то матрица  $T$  обратима и, значит,  $T \in \text{GL}_{d+1}(\mathbb{Q})$ .

**3.3. Модульные матрицы.** Воспользуемся (3.9) и подставим  $\hat{\zeta} = T^{-1}\hat{\alpha}$  в равенство (3.4). Имеем

$$U_\zeta T^{-1}\hat{\alpha} = \zeta \cdot T^{-1},$$

откуда для столбца  $\hat{\alpha}$  выводим равенство

$$M_\alpha \hat{\alpha} = \zeta \cdot \hat{\alpha} \quad (3.11)$$

с рациональной матрицей

$$M_\alpha = TU_\zeta T^{-1}, \quad (3.12)$$

сопряженной унимодулярной матрице  $U_\zeta$ . Для модуля  $\mathcal{M}_\alpha$  из (3.6) матрицу, обладающую свойством (3.11), назовем *модульной матрицей*.



**3.4. Унимодулярные модульные матрицы. Уровень**

$$l(T) = t \tag{3.13}$$

невырожденной рациональной матрицы  $T$  определяется как наименьшее натуральное число  $t$  с условием, что  $T^* = t \cdot T^{-1}$  – целочисленная матрица.

Нам потребуется еще *показатель*  $\nu_\alpha(U_\zeta) = \nu$  унимодулярной матрицы  $U_\zeta$  по модулю  $t$  – это такое наименьшее натуральное число  $\nu$ , для которого выполняется сравнение

$$U_\zeta^\nu \equiv E \pmod{t}, \tag{3.14}$$

где  $E = E_{d+1}$  – единичная матрица размера  $d + 1$ . Указанное число  $\nu$  существует и не превышает порядка конечной группы  $GL_{d+1}(\mathbb{Z}/t\mathbb{Z})$  матриц над кольцом вычетов  $\mathbb{Z}/t\mathbb{Z}$  с определителем  $\det \equiv \pm 1 \pmod{t}$ .

В [1] доказано следующее утверждение.

**Предложение 3.1.** 1. Пусть  $t$  – уровень (3.13) матрицы  $T$  и  $\nu$  – показатель унимодулярной матрицы  $U_\zeta$  по модулю  $t$ . Тогда матрица

$$P_\alpha = M_\alpha^\nu \tag{3.15}$$

является унимодулярной.

2. Пусть  $M_\alpha$  – произвольный полный модуль (3.6) из поля  $\mathbb{F}$ . Тогда имеет место равенство

$$P_\alpha \hat{\alpha} = \lambda \cdot \hat{\alpha}, \tag{3.16}$$

где  $\hat{\alpha}$  – столбец (3.10) и

$$\lambda = \zeta^\nu > 1 \tag{3.17}$$

— единица Пизо (2.4).

Матрицу  $P_\alpha$  из (3.15) назовем *модульной матрицей Пизо* или кратко – *матрицей Пизо*. Если  $\zeta$  является локализованной единицей Пизо (2.32), то  $P_\alpha$  будем также называть *локализованной матрицей Пизо*.

§4. АППРОКСИМАЦИЯ

**4.1. Разложение модульной матрицы Пизо.** Для столбцов  $\hat{\alpha}$  из (3.10) и  $\hat{\zeta}$  из (3.5) определим квадратные матрицы

$$A = (\hat{\alpha}^{(1)} \dots \hat{\alpha}^{(d+1)}), \quad Z = (\hat{\zeta}^{(1)} \dots \hat{\zeta}^{(d+1)}) \tag{4.1}$$

– порядка  $d + 1$ . Матрица  $Z$  невырождена и в силу равенства (3.9) можем записать

$$A = TZ. \quad (4.2)$$

Поэтому матрица  $A$  также невырождена и, следовательно, ее столбцы образуют базис ( $A$ -базис) в пространстве  $\mathbb{R}^{d+1}$ .

Пусть  $P_\alpha$  – модульная матрица Пизо. Из (3.15) получаем

$$P_\alpha A = (\lambda^{(1)} \widehat{\alpha}^{(1)} \dots \lambda^{(d+1)} \widehat{\alpha}^{(d+1)}) = A\Lambda,$$

где

$$\Lambda = \begin{pmatrix} \lambda^{(1)} & \dots & 0 \\ & \dots & \\ 0 & \dots & \lambda^{(d+1)} \end{pmatrix}. \quad (4.3)$$

Отсюда для матрицы  $P_\alpha$  выводим разложение

$$P_\alpha = A\Lambda A^{-1}. \quad (4.4)$$

**4.2. Линейные отображения модульной матрицей Пизо.** Для произвольного вектора  $x \in \mathbb{R}^d$  соответствующий ему столбец  $\widehat{x}$  разложим

$$\widehat{x} = Ax' \quad (4.5)$$

по  $A$ -базису, где  $x' = \begin{pmatrix} x'_1 \\ \vdots \\ x'_{d+1} \end{pmatrix}$ . Используя разложения (4.4) и (4.5), имеем

$$P_\alpha^a \widehat{x} = A\Lambda^a A^{-1} \widehat{x} = A\Lambda^a x' = A \begin{pmatrix} \lambda_1^a x'_1 \\ \vdots \\ \lambda_{d+1}^a x'_{d+1} \end{pmatrix},$$

где обозначили  $\lambda_j = \lambda^{(j)}$ . Теперь умножая на матрицу  $A$ , окончательно получаем формулу

$$P_\alpha^a \widehat{x} = \begin{pmatrix} \Lambda_1^a \\ \vdots \\ \Lambda_d^a \\ \Lambda_{d+1}^a \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \alpha_{11} \lambda_1^a x'_1 + \dots + \alpha_{1,d+1} \lambda_{d+1}^a x'_{d+1} \\ \dots \\ \alpha_{d1} \lambda_1^a x'_1 + \dots + \alpha_{d,d+1} \lambda_{d+1}^a x'_{d+1} \\ \lambda_1^a x'_1 + \dots + \lambda_{d+1}^a x'_{d+1} \end{pmatrix}, \quad (4.6)$$

где  $\Lambda_i^a$  – линейные формы от  $\lambda_1^a, \dots, \lambda_{d+1}^a$  и  $\alpha_{ij}$  – коэффициенты матрицы  $A = (\alpha_{ij})$ . Из определения (4.1) следует

$$\alpha_{11} = \alpha_1, \quad \dots, \quad \alpha_{d1} = \alpha_d \quad (4.7)$$

равны коэффициентам столбца  $\widehat{\alpha}$  из (3.10); и у матрицы  $A$  коэффициенты последней строки  $\alpha_{d+1,j} = 1$  для всех  $j = 1, \dots, d+1$ . Из последних равенств вытекает вид формы  $\Lambda_{d+1}^a$ .

**4.3. Дробно-линейные преобразования.** Определим дробно-линейные преобразования в пространстве  $\mathbb{R}^d$ . Если  $M = (a_{ij})$  – вещественная квадратная матрица порядка  $d+1$  и  $x \in \mathbb{R}^d$ , то полагаем

$$M\langle x \rangle = \left( \frac{\Lambda_1(M, x)}{\Lambda_{d+1}(M, x)}, \dots, \frac{\Lambda_d(M, x)}{\Lambda_{d+1}(M, x)} \right), \quad (4.8)$$

где

$$\Lambda_i(M, x) = a_{i1}x_1 + \dots + a_{id}x_d + a_{i,d+1}$$

– линейные неоднородные формы для  $i = 1, \dots, d+1$ . Преобразования (4.8) обладают свойством ассоциативности

$$M_1\langle M_2\langle x \rangle \rangle = (M_1 \cdot M_2)\langle x \rangle, \quad (4.9)$$

где через  $M_1 \cdot M_2$  обозначено произведение матриц  $M_1$  и  $M_2$ . Поскольку  $E_{d+1}\langle x \rangle = x$  для единичной матрицы  $E_{d+1}$  порядка  $d+1$ , то из свойства (4.9) следует, что для  $x \mapsto x' = M\langle x \rangle$  обратным отображением будет

$$x' \mapsto x = M^{-1}\langle x' \rangle. \quad (4.10)$$

Используя формулу (4.6) и определение (4.8), приходим к формуле

$$P_\alpha^a\langle x \rangle = \left( \frac{\Lambda_1^a}{\Lambda_{d+1}^a}, \dots, \frac{\Lambda_d^a}{\Lambda_{d+1}^a} \right). \quad (4.11)$$

**4.4. Оценка расстояния.** Нас будет интересовать расстояние

$$|\alpha - P_\alpha^a\langle x \rangle|_s = \left| \alpha_1 - \frac{\Lambda_1^a}{\Lambda_{d+1}^a} \right| + \dots + \left| \alpha_d - \frac{\Lambda_d^a}{\Lambda_{d+1}^a} \right| \quad (4.12)$$

между точкой

$$\alpha = (\alpha_1, \dots, \alpha_d) \quad (4.13)$$

и точкой  $P_\alpha^a\langle x \rangle$  из (4.11).

Чтобы привести явную формулу для расстояния, нам потребуются следующие обозначения

$$\lambda_{2,\max} = \max_{2 \leq j \leq d+1} |\lambda_j| = \max_{2 \leq j \leq d+1} |\lambda^{(j)}|, \quad (4.14)$$

где  $\lambda$  определено в (3.17), и

$$l_\alpha(x) = \ln \frac{2|x'_s|}{|x'_1|} \bigg/ \ln \frac{\lambda_1}{\lambda_{2,\max}} \quad (4.15)$$

для вектора  $x'$  из (4.5), (4.6).

**Предложение 4.1.** Пусть точка  $x \in \mathbb{R}^d$  имеет первую координату  $x'_1 \neq 0$  в  $A$ -базисе (4.5) и степень  $a$  удовлетворяет неравенству

$$a \geq l_\alpha(x). \quad (4.16)$$

Тогда расстояние между точкой  $\alpha$  из (4.13) и образом  $P_\alpha^a(x)$  точки  $x$  из (4.11) относительно дробно-линейного преобразования с модульной матрицей Пизо  $P_\alpha$  из (3.15) оценивается как

$$|\alpha - P_\alpha^a(x)|_s \leq c_{\alpha,x} \left( \frac{\lambda_{2,\max}}{\lambda_1} \right)^a. \quad (4.17)$$

Здесь константа

$$c_{\alpha,x} = 4d |A|_{\max} \frac{|x'_s|}{|x'_1|} \quad (4.18)$$

не зависит от степени  $a$ ,

$$|A|_{\max} = \max_{1 \leq i,j \leq d+1} |\alpha_{ij}| \quad (4.19)$$

–  $\max$ -норма матрицы  $A$  и  $\lambda_{2,\max}$  определено в (4.14).

**Доказательство** приведено в [1]. □

## §5. МИНИМАЛЬНЫЕ СИМПЛЕКСЫ

**5.1. Минимальные рациональные симплексы.** Пусть открытый  $d$ -мерный симплекс  $\mathbf{s}$  имеет рациональные вершины

$$\frac{\mathbf{P}_i}{\mathbf{Q}_i} = \left( \frac{\mathbf{P}_{i1}}{\mathbf{Q}_i}, \dots, \frac{\mathbf{P}_{id}}{\mathbf{Q}_i} \right) \quad (5.1)$$

для  $i = 0, 1, \dots, d$  с условием

$$\mathbf{Q}_i > 0, \quad \text{НОД}(\mathbf{P}_{i1}, \dots, \mathbf{P}_{id}, \mathbf{Q}_i) = 1. \quad (5.2)$$

Назовем  $s$  *минимальным симплексом*, если он не содержит

$$\frac{\mathbf{P}}{\mathbf{Q}} \notin s \tag{5.3}$$

никакой точки

$$\frac{\mathbf{P}}{\mathbf{Q}} = \left( \frac{\mathbf{P}_1}{\mathbf{Q}}, \dots, \frac{\mathbf{P}_d}{\mathbf{Q}} \right), \tag{5.4}$$

координаты которой имеют общий знаменатель  $1 \leq \mathbf{Q} < \mathbf{Q}_{\max}$ , где использовали обозначение

$$\mathbf{Q}_{\max} = \mathbf{Q}_0 + \mathbf{Q}_1 + \dots + \mathbf{Q}_d. \tag{5.5}$$

В [1] доказаны следующие свойства минимальных симплексов.

**Предложение 5.1.** *Следующие утверждения равносильны:*

- 1) *симплекс  $s$  минимальный;*
- 2) *матрица*

$$\mathbf{S} = \begin{pmatrix} \mathbf{P}_{01} & \mathbf{P}_{11} & \dots & \mathbf{P}_{d1} \\ \mathbf{P}_{0d} & \mathbf{P}_{1d} & \dots & \mathbf{P}_{dd} \\ \mathbf{Q}_0 & \mathbf{Q}_1 & \dots & \mathbf{Q}_d \end{pmatrix} \tag{5.6}$$

*унимодулярна;*

- 3) *симплекс  $s$  имеет объем*

$$\text{vols} = \frac{1}{d!} \left( \prod_{0 \leq i \leq d} \mathbf{Q}_i \right)^{-1}. \tag{5.7}$$

**5.2. Точка Фарей.** Рассматриваемый здесь минимальный симплекс  $s$  имеет рациональные вершины (5.1). Следуя аналогии с отрезками Фарей [16], симметризуем данные вершины, используя операцию сложения Фарей для дробей. В результате получим точку Фарей, содержащуюся в симплексе  $s$ .

Пусть симплекс  $s$  имеет вершины  $\frac{\mathbf{P}_i}{\mathbf{Q}_i}$ , где  $i = 0, 1, \dots, d$ , вида (5.1), (5.2). Определим сумму вершин

$$\frac{\mathbf{P}_0}{\mathbf{Q}_0} \hat{+} \frac{\mathbf{P}_1}{\mathbf{Q}_1} \hat{+} \dots \hat{+} \frac{\mathbf{P}_d}{\mathbf{Q}_d} \stackrel{\text{def}}{=} \frac{\mathbf{P}_0 + \mathbf{P}_1 + \dots + \mathbf{P}_d}{\mathbf{Q}_0 + \mathbf{Q}_1 + \dots + \mathbf{Q}_d}, \tag{5.8}$$

используя операцию *сложения Фарей* дробей

$$\frac{a}{b} \hat{+} \frac{c}{d} = \frac{a+b}{c+d}. \tag{5.9}$$

Используя операцию (5.8), определим *точку Фарея*

$$\frac{P_{\max}}{Q_{\max}} = \frac{P_0}{Q_0} \hat{+} \frac{P_1}{Q_1} \hat{+} \dots \hat{+} \frac{P_d}{Q_d}. \quad (5.10)$$

**Предложение 5.2.** *Минимальный симплекс s содержит*

$$\frac{P}{Q} \in s \quad (5.11)$$

*единственную точку  $\frac{P}{Q} = \frac{P_{\max}}{Q_{\max}}$  со знаменателем  $1 \leq Q \leq Q_{\max}$  и, значит, – единственную точку со знаменателем  $Q = Q_{\max}$ , где значение  $Q_{\max}$  было определено в (5.5).*

**Доказательство** см. в [1]. □

## §6. УНИМОДУЛЯРНЫЙ БАЗИСНЫЙ СИМПЛЕКС

**6.1. Линейные унимодулярные преобразования.** Основной областью для нас будет замкнутый  $d$ -мерный *единичный симплекс*  $\Delta_e = \Delta_e^d$  с вершинами в точках

$$e_0 = (0, \dots, 0), \quad e_1 = (1, \dots, 0), \quad \dots, \quad e_d = (0, \dots, 1)$$

из пространства  $\mathbb{R}^d$ .

Выделим в группе унимодулярных матриц  $GL_{d+1}(\mathbb{Z})$  с определителем  $\pm 1$  *подгруппу*  $G_0 = GL_{d+1,0}(\mathbb{Z})$  из матриц

$$U = \begin{pmatrix} V & L \\ 0 & 1 \end{pmatrix}, \quad (6.1)$$

где  $V \in GL_d(\mathbb{Z})$  и  $L = \begin{pmatrix} l_1 \\ \vdots \\ l_d \end{pmatrix}$  – произвольный целочисленный столбец.

Группа  $G_0$  действует на точки  $\alpha = (\alpha_1, \dots, \alpha_d)$  из  $\mathbb{R}^d$  по формуле

$$U\alpha = V\alpha + L, \quad (6.2)$$

где  $\alpha$  рассматривается как столбец  $\begin{pmatrix} \alpha_1 \\ \vdots \\ \alpha_d \end{pmatrix}$ . Таким образом, группа  $G_0$

соответствует целочисленным унимодулярным преобразованиям пространства  $\mathbb{R}^d$ .

**6.2. Унимодулярные симплексы.** В следующем предложении, доказанном в [1], содержатся важные для дальнейшего базисные симплексы.

**Предложение 6.1.** *Если  $\alpha$  – иррациональная точка (1.17), то существует такая матрица  $U \in G_0$ , что выполняется включение*

$$\alpha \in \Delta_U^d, \quad (6.3)$$

где  $\Delta_U^d = U\Delta_e^d$ .

Симплекс  $\Delta_U^d$  из (6.3) назовем *базисным*. Его основное свойство состоит в том, что он является *унимодулярным*: векторы, выходящие из одной его вершины во все остальные вершины, образуют *унимодулярный базис*, т.е. некоторый базис кубической решетки  $\mathbb{Z}^d$ .

## §7. СИМПЛЕКСЫ ПИЗО

**7.1. Базисный симплекс.** Выберем в качестве *базисный симплекс*

$$\Delta = \Delta_U^d \quad (7.1)$$

из предложения 6.1. Он имеет целочисленные вершины

$$v_i = Ue_i = \frac{P_i}{Q_i}, \quad (7.2)$$

где полагаем  $Q_i = 1$  для всех  $i = 0, 1, \dots, d$ . Векторы

$$v'_i = v_i - v_0 = Ve_i \quad (7.3)$$

для  $i = 1, \dots, d$  с матрицей  $V \in GL_d(\mathbb{Z})$  образуют унимодулярный базис. Поэтому симплекс (7.1) имеет объем

$$\text{vol } \Delta = \frac{1}{d!}.$$

Из этого равенства и предложения 5.1 следует, что симплекс  $\Delta$  будет минимальным.

**7.2. Симплексы Пизо.** Подействуем на симплекс  $\Delta$  дробно-линейным преобразованием  $P_\alpha^a \langle \Delta \rangle$ , где  $a = 1, 2, 3, \dots$ , с матрицей Пизо  $P_\alpha$  из (3.15). Чтобы исследовать новый симплекс, воспользуемся формулой связи

$$P_\alpha^a \langle \Delta \rangle = \text{pr } P_\alpha^a \Delta, \quad (7.4)$$

где

$$\text{pr} : \begin{pmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_d \\ x_{d+1} \end{pmatrix} \longrightarrow \begin{pmatrix} x_1/x_{d+1} \\ \vdots \\ x_d/x_{d+1} \end{pmatrix} \quad (7.5)$$

– проекция множества векторов  $\mathbb{R}_*^{d+1} \subset \mathbb{R}^{d+1}$  с координатой  $x_{d+1} \neq 0$  на пространство  $\mathbb{R}^d$ . Здесь  $V = \{\widehat{v}_0, \widehat{v}_1, \dots, \widehat{v}_d\}$  обозначает целочисленный базис из векторов (3.5), соответствующих вершинам (7.2).

Согласно (7.2) координаты векторов данного базиса образуют унимодулярную матрицу

$$S = \begin{pmatrix} P_{01} & P_{11} & \dots & P_{d1} \\ P_{0d} & P_{1d} & \dots & P_{dd} \\ Q_0 & Q_1 & \dots & Q_d \end{pmatrix}. \quad (7.6)$$

Поскольку матрица Пизо  $P_\alpha$  унимодулярная, то матрица

$$P_\alpha^a S = \begin{pmatrix} P_{a,01} & P_{a,11} & \dots & P_{a,d1} \\ P_{a,0d} & P_{a,1d} & \dots & P_{a,dd} \\ Q_{a,0} & Q_{a,1} & \dots & Q_{a,d} \end{pmatrix} \quad (7.7)$$

также унимодулярная. Принимая во внимание формулу (4.6) и условие  $Q_i = 1$ , можем записать значения элементов нижней строки  $Q_{a,i}$  матрицы  $P_\alpha^a S$  в явном виде

$$Q_{a,i} = \lambda_1^a v'_{i1} + \dots + \lambda_{d+1}^a v'_{i,d+1}, \quad (7.8)$$

где  $v'_{ij}$  – координаты вектора  $\widehat{v}'_i$  из разложения

$$\widehat{v}_i = A\widehat{v}'_i \quad (7.9)$$

вектора  $\widehat{v}_i$  по  $A$ -базису из (4.1).

Введем обозначения

$$l_\alpha(\Delta) = \max_{0 \leq i \leq d} l_\alpha(v_i), \quad (7.10)$$

где

$$l_\alpha(v_i) = \ln \frac{2|v'_i|_s}{|v'_{i1}|} \Big/ \ln \frac{\lambda_1}{\lambda_{2,\max}}.$$



**Предложение 7.1.** Для степеней  $a$ , удовлетворяющих неравенству

$$a \geq l_\alpha(\Delta) \quad (7.11)$$

симплексы  $P_\alpha^a \langle \Delta \rangle$  являются минимальными (5.3)–(5.5).

**Доказательство** см. в [1].  $\square$

Назовем степени  $a$ , для которых выполняется условие (7.11), *допустимыми*, а отвечающие им  $P_\alpha^a \langle \Delta \rangle$  *симплексами Пизо*.

**7.3. Рекуррентные последовательности.** Пусть

$$v_a = \frac{P_a}{Q_a} = \left( \frac{P_{a,1}}{Q_a}, \dots, \frac{P_{a,d}}{Q_a} \right) \quad (7.12)$$

– одна из вершин  $v_{a,i} = \frac{P_{a,i}}{Q_{a,i}}$  для  $i = 0, 1, \dots, d$  симплекса  $P_\alpha^a \langle \Delta \rangle$ . Вершине (7.12) поставим в соответствие целочисленный столбец

$$\mathbf{v}_a = \begin{pmatrix} P_{a1} \\ \vdots \\ P_{ad} \\ Q_a \end{pmatrix}. \quad (7.13)$$

Из формулы связи (7.4) следует равенство

$$\mathbf{v}_a = P_\alpha^a \mathbf{v}_0 \quad (7.14)$$

для  $a = 0, 1, 2, \dots$ , где  $v_0$  – вершина базисного симплекса  $\Delta$ , определенного в (7.1). В [1] доказано, что столбцы  $\mathbf{v}_a$  удовлетворяют рекуррентному соотношению.

**Предложение 7.2.** Пусть матрица Пизо  $P_\alpha$  имеет характеристический многочлен

$$\text{ch}_{P_\alpha}(x) = \det(xE - P_\alpha) = x^{d+1} - b_d x^d - \dots - b_1 x - b_0. \quad (7.15)$$

Тогда столбцы  $\mathbf{v}_a$  из (7.14) удовлетворяют рекуррентному соотношению

$$\mathbf{v}_{a+d+1} = b_d \mathbf{v}_{a+d} + \dots + b_1 \mathbf{v}_{a+1} + b_0 \mathbf{v}_a \quad (7.16)$$

для  $a = 0, 1, 2, \dots$ . Начальные условия

$$\mathbf{v}_d = P_\alpha^d \mathbf{v}_0, \dots, \mathbf{v}_1 = P_\alpha \mathbf{v}_0, \mathbf{v}_0 \quad (7.17)$$

задаются матрицей Пизо  $P_\alpha$  из (3.15) и столбцом  $\mathbf{v}_0$  из (7.13).

Если применить операцию сложения Фарея для дробей (5.9), то рекуррентное соотношение (7.16) можно применить

$$\frac{P_{a+d+1}}{Q_{a+d+1}} = \frac{b_d P_{a+d}}{b_d Q_{a+d}} \hat{+} \dots \hat{+} \frac{b_1 P_{a+1}}{b_1 Q_{a+1}} \hat{+} \frac{b_0 P_a}{b_0 Q_a} \quad (7.18)$$

непосредственно к рациональным вершинам  $v_a = \frac{P_a}{Q_a}$  из (7.12). В этих терминах начальные условия (7.17) примут вид

$$v_d = \text{pr } P_\alpha^d \mathbf{v}_0, \quad \dots, \quad v_1 = \text{pr } P_\alpha \mathbf{v}_0, \quad v_0 = \text{pr } \mathbf{v}_0, \quad (7.19)$$

где  $\text{pr}$  обозначает проекцию (7.5).

## §8. ТЕОРЕМЫ О СОВМЕСТНЫХ ПРИБЛИЖЕНИЯХ

Собранные вместе конструкции §§ 1-7 позволяют сформировать некоторый общий *алгоритм*

$$\mathcal{SM}: \quad \alpha \approx \frac{P_a}{Q_a} = \left( \frac{P_{a,1}}{Q_{a,1}}, \dots, \frac{P_{a,d}}{Q_{a,d}} \right) \quad (8.1)$$

разложения в *многомерные цепные дроби*  $\frac{P_a}{Q_a}$  из (7.12) полных точек  $\alpha = (\alpha_1, \dots, \alpha_d)$  степени  $\deg \alpha = d + 1$ , определенных в (3.6)–(3.8). Основными составляющими конструкции алгоритма (8.1) являются базовый симплекс  $\Delta$  и модульные матрицы Пизо  $P_\alpha = M_\alpha^\nu$  из (3.15), в совокупности задающие геометрию приближений. По этой причине (8.1) в [1] был назван *симплекс-модульным алгоритмом* или кратко – *SM-алгоритмом*.

В этом разделе мы покажем, как применяя SM-алгоритм можно получать приближения алгебраических иррациональностей  $\alpha$  произвольной степени. Первый результат – чисто геометрический, касающийся наилучших приближений, второй – аналитический, содержащий метрическую оценку указанных приближений.

**8.1. Геометрическая теорема.** Симплекс Пизо  $P_\alpha^a \langle \Delta \rangle$  имеет рациональные вершины  $v_{a,i} = \frac{P_{a,i}}{Q_{a,i}}$  для  $i = 0, 1, \dots, d$ . Согласно (5.10) данный симплекс содержит *точку Фарея*

$$\frac{P_{a,\max}}{Q_{a,\max}} = \frac{P_{a,0}}{Q_{a,0}} \hat{+} \frac{P_{a,1}}{Q_{a,1}} \hat{+} \dots \hat{+} \frac{P_{a,d}}{Q_{a,d}}. \quad (8.2)$$

Из этого определения следует, что точки Фарея  $\frac{P_{a,\max}}{Q_{a,\max}}$  для степеней  $a = 0, 1, 2, \dots$  также, как и вершины  $\frac{P_{a,i}}{Q_{a,i}}$  симплекса Пизо  $P_\alpha^a \langle \Delta \rangle$ , удовлетворяют

$$\frac{P_{a+d+1,\max}}{Q_{a+d+1,\max}} = \frac{b_d P_{a+d,\max}}{b_d Q_{a+d,\max}} \hat{+} \dots \hat{+} \frac{b_1 P_{a+1,\max}}{b_1 Q_{a+1,\max}} \hat{+} \frac{b_0 P_{a,\max}}{b_0 Q_{a,\max}} \quad (8.3)$$

– рекуррентному соотношению (7.18) с новыми начальными условиями

$$v_{d,\max} = \text{pr } P_\alpha^d \mathbf{v}_{\max}, \dots, v_{1,\max} = \text{pr } P_\alpha \mathbf{v}_{\max}, v_{0,\max} = \text{pr } \mathbf{v}_{\max}, \quad (8.4)$$

где вектор  $\mathbf{v}_{\max} = \mathbf{v}_{0,\max}$  определен равенством

$$\mathbf{v}_{\max} = \hat{v}_0 + \hat{v}_1 + \dots + \hat{v}_d. \quad (8.5)$$

Здесь  $v_i$  обозначают вершины (7.2) базисного симплекса  $\Delta = \Delta_U^d$  из (7.1), а  $\hat{v}_i$  – соответствующие им векторы (3.10). В координатах вектор (8.5) запишется в виде

$$\mathbf{v}_{\max} = \begin{pmatrix} P_{01} \\ \vdots \\ P_{0d} \\ 1 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} P_{11} \\ \vdots \\ P_{1d} \\ 1 \end{pmatrix} + \dots + \begin{pmatrix} P_{d1} \\ \vdots \\ P_{dd} \\ 1 \end{pmatrix}. \quad (8.6)$$

**Теорема 8.1.** Пусть  $\alpha$  – полная точка степени  $\text{deg}(\alpha) = d + 1$ . Если  $a$  – допустимая степень или, в частности, если  $a \geq l_\alpha(\Delta)$ , где  $l_\alpha(\Delta)$  определено в (7.10), и  $P_\alpha^a \langle \Delta \rangle$  – отвечающий ей симплекс Пизо, то имеют место следующие утверждения.

1. Симплекс Пизо  $P_\alpha^a \langle \Delta \rangle$  обладает свойством минимальности (см. определение (5.3)-(5.5)):

$$\frac{P}{Q} \notin P_\alpha^a \langle \Delta \rangle, \quad (8.7)$$

если  $1 \leq Q < Q_{a,\max}$ ; единственная точка

$$\frac{P}{Q} \in P_\alpha^a \langle \Delta \rangle \quad (8.8)$$

со знаменателем  $Q = Q_{a,\max}$  есть точка Фарея  $\frac{P}{Q} = \frac{P_{a,\max}}{Q_{a,\max}}$ , определенная в (8.2).

2. Выполняется неравенство

$$\left| \alpha - \frac{P_{a,\max}}{Q_{a,\max}} \right|_s \leq \max_{0 \leq i \leq d} \left| \frac{P_{a,i}}{Q_{a,i}} - \frac{P_{a,\max}}{Q_{a,\max}} \right|_s. \quad (8.9)$$

Доказательство см. в [1].  $\square$

**8.2. Аналитическая теорема.** Теперь покажем, как используя результаты предложения 4.1 можно получать количественные оценки приближений  $\left| \alpha - \frac{P_{a,\max}}{Q_{a,\max}} \right|_s$  из (8.9).

**Теорема 8.2.** Пусть  $\alpha$  – полная точка степени  $\deg(\alpha) = d + 1$  и  $a$  удовлетворяет неравенству

$$a \geq l_{\alpha,\max}(\Delta). \quad (8.10)$$

Здесь

$$l_{\alpha,\max}(\Delta) = \max\{l_{\alpha}(v_{\max}), l_{\alpha}(\Delta)\}$$

в обозначениях из (7.10); и

$$v'_{\max} = \begin{pmatrix} v'_{\max,1} \\ \vdots \\ v'_{\max,d+1} \end{pmatrix} \quad (8.11)$$

определяется из разложения  $\hat{v}_{\max} = Av'_{\max}$  по  $A$ -базису (4.1), где  $v_{\max} = \text{pr } \mathbf{v}_{\max}$  – проекция вектора (8.6); кроме того,  $\lambda = \zeta^{\nu} > 1$ ,  $\zeta$  – единица Пизо (2.4) и  $0 < \lambda_{2,\max} < 1$  определено в (4.14). Тогда при этом условии:

- 1) существует симплекс Пизо  $P_{\alpha}^a(\Delta)$ ; и
- 2) имеет место неравенство

$$\left| \alpha - \frac{P_{a,\max}}{Q_{a,\max}} \right|_s \leq c_{\alpha,\max} \varrho^a, \quad (8.12)$$

где

$$\varrho = \frac{\lambda_{2,\max}}{\lambda} < 1 \quad (8.13)$$

и константа

$$c_{\alpha,\max} = 4d |A|_{\max} \frac{|v'_{\max}|_s}{|v'_{\max,1}|} \quad (8.14)$$

не зависит от степени  $a$ . Здесь  $|A|_{\max}$  –  $\max$ -норма (4.19) матрицы  $A$ .

Доказательство см. в [1].  $\square$

§9. ДИОФАНТОВА ЭКСПОНЕНТА

**9.1. Асимптотические разложения для знаменателей.** В данном параграфе будет показано, как можно переписать неравенства (8.12) непосредственно в терминах знаменателей подходящих дробей  $\frac{P_{a,\max}}{Q_{a,\max}}$ . Для этого нам потребуется один асимптотический результат о  $Q_{a,\max}$ .

**Лемма 9.1.** Пусть  $Q_{a,\max}$  – знаменатели точек Фарея  $\frac{P_{a,\max}}{Q_{a,\max}}$  из (8.2). Для них выполняется асимптотическое разложение

$$Q_{a,\max} = \kappa \lambda^a + \mathcal{O}(\lambda_{2,\max}^a) \tag{9.1}$$

при  $a \rightarrow +\infty$ . Здесь  $\lambda > 1$  – единица Пизо (3.17), значение  $\lambda_{2,\max}$ , удовлетворяющее неравенству  $|\lambda_{2,\max}| < 1$ , определено в (4.14) и коэффициент  $\kappa > 0$  не зависит от  $a$ .

**Доказательство.** Из формулы (7.8) следуют асимптотические равенства

$$Q_{a,i} = \kappa_i \lambda^a + \mathcal{O}(\lambda_{2,\max}^a) \tag{9.2}$$

для всех  $i = 0, 1, \dots, d$ , где  $|\lambda_{2,\max}| < 1$  согласно (4.14) и предложению 3.1. По определению точек Фарея (8.2) имеем

$$Q_{a,\max} = Q_{a,1} + \dots + Q_{a,d}. \tag{9.3}$$

Поэтому складывая все равенства (9.2), получаем асимптотическое разложение (9.1) с коэффициентом  $\kappa = \kappa_0 + \kappa_1 + \dots + \kappa_d$ .

Покажем, что  $\kappa > 0$ . Данное неравенство будет вытекать из уже доказанного разложения (9.1), если будет известно, что

$$Q_{a,\max} \rightarrow +\infty \text{ при } a \rightarrow +\infty. \tag{9.4}$$

По (3.16) столбец  $\hat{\alpha} = \begin{pmatrix} \alpha_1 \\ \vdots \\ \alpha_d \\ 1 \end{pmatrix}$  является собственным  $P_\alpha \hat{\alpha} = \lambda \cdot \hat{\alpha}$  для матрицы Пизо  $P_\alpha$  из (3.15) с собственным значением  $\lambda > 1$ . С другой стороны, ввиду (7.13) существует связь

$$\mathbf{v}_{a,i} = \begin{pmatrix} \vdots \\ Q_{a,i} \end{pmatrix} = P_\alpha^a \mathbf{v}_{0,i}$$

чисел  $Q_{a,i}$  с матрицей  $P_\alpha$ . Отсюда заключаем, что  $Q_{a,i} \rightarrow +\infty$  при  $a \rightarrow +\infty$ ; и тогда из (9.3) будет следовать (9.4).  $\square$

**9.2. Основная теорема.** Асимптотическое разложение (9.1) в совокупности с предложением 2.2, содержащим формулу о собственных значениях единиц Пизо, позволяют оценку (8.12) представить непосредственно в терминах знаменателей  $Q_{a,\max}$  подходящих дробей  $\frac{P_{a,\max}}{Q_{a,\max}}$ .

**Теорема 9.1.** *В условиях теоремы 8.2 для любого фиксированного  $\theta > 0$  существует такая локализованная матрица Пизо  $P_\alpha$  из предложения 3.1, что выполняются неравенства*

$$\left| \alpha - \frac{P_{a,\max}}{Q_{a,\max}} \right|_s \leq \frac{c}{Q_{a,\max}^{1+\frac{1}{d}-\theta}} \quad (9.5)$$

для всех  $a \geq a_{\alpha,\theta}$ . Здесь константы  $a_{\alpha,\theta} > 0$  и  $c = c_{\alpha,\theta} > 0$  не зависят от  $a$ .

**Доказательство.** По определению (3.17) имеем  $\lambda = \zeta^\nu$ . Поэтому, используя (4.14) и предложение 2.2, находим значение

$$\lambda_{2,\max} = \max_{2 \leq i \leq t} |\lambda^{(i)}| = \lambda^{-1/d+\theta} \quad (9.6)$$

с показателем  $0 < \theta \leq c_\varepsilon \eta$ . Применяя лемму 9.1 и (9.6), выводим неравенство

$$\varrho^a = \frac{\lambda_{2,\max}^a}{\lambda^a} \leq \frac{c'}{Q_{a,\max}^{1+\frac{1}{d}-\theta}} \quad (9.7)$$

с некоторой константой  $c' > 0$  для всех достаточно больших  $a \geq a_{\alpha,\theta}$ , где  $\varrho$  было определено в (8.13). Теперь оценка (9.5) вытекает из теоремы 8.2 и неравенства (9.7).  $\square$

*Диофантову экспоненту* определим как супремум показателей  $\Theta$ , для которых неравенство

$$\left| \alpha - \frac{p_a}{q_a} \right|_s \leq \frac{1}{q_a^{1+\Theta}} \quad (9.8)$$

имеет бесконечно много целых решений  $p_{a1}, \dots, p_{ad}$  и  $q_a > 0$ .

**Следствие 9.1.** *Для полной точки  $\alpha$  степени  $\deg(\alpha) = d+1$  диофантова экспонента  $\Theta$  удовлетворяет неравенствам*

$$\frac{1}{d} - \theta \leq \Theta \leq \frac{1}{d}, \quad (9.9)$$

где  $\theta > 0$  – любое фиксированное число.

**Доказательство.** Из неравенства (0.7) для диофантовой экспоненты  $\Theta$  следует верхняя оценка, а из теоремы 9.1 – нижняя оценка в (9.9).  $\square$

**Замечание 9.1.** Метод локализованных матриц Пизо позволяет получить для диофантовой экспоненты в (9.8) равенство

$$\Theta = \frac{1}{d}$$

только для полей ранга один: вещественных квадратичных и кубических с комплексным сопряжением. Это как раз те вещественные алгебраические поля, у которых группы единиц  $\mathcal{E}$  порождаются одним элементом. Для данных полей показатель  $\theta = 0$  в неравенствах (9.5).

#### ЛИТЕРАТУРА

1. В. Г. Журавлев, *Симплекс-модульный алгоритм разложения алгебраических чисел в многомерные цепные дроби*. — Зап. научн. семин. ПОМИ **449** (2016), 168–195.
2. V. Brun, *Algorithmes euclidiens pour trois et quatre nombres*. — In Treizieme congres des mathematiens scandinaves, tenu a Helsinki 18-23 aout (1957), 45–64. Mercators Tryckeri, Helsinki, 1958.
3. E. S. Selmer, *Continued fractions in several dimensions*. — Nordisk Nat. Tidskr. **9** (1961), 37–43.
4. A. Nogueira, *The three-dimensional Poincare continued fraction algorithm*. — Israel J. Math. **90**, No. 1-3, (1995), 373–401.
5. F. Schweiger, *Multidimensional Continued Fraction*. — Oxford Univ. Press, New York, 2000.
6. V. Berthe, S. Labbe, *Factor complexity of S-adic words generated by the Arnoux-Rauzy-Poincare algorithm*. — Adv. in Appl. Math. **63** (2015), 90–130.
7. P. Arnoux, S. Labbe, *On some symmetric multidimensional continued fraction algorithms*. — arXiv:1508.07814, August 2015.
8. J. Cassaigne, *Un algorithme de fractions continues de complexite lineaire*. — October 2015. ДунА3S meeting, LIAFA, Paris, October 12th, 2015.
9. В. Г. Журавлев, *Симплекс-ядерный алгоритм разложения в многомерные цепные дроби*. — Современные проблемы математики, МИ РАН (2017), 1–25. (в печати)
10. Дж. В. С. Касселс, *Введение в теорию диофантовых приближений*. — М., 1961.
11. А. Я. Хинчин, *Цепные дроби*. 4-ое изд. — М., 1978.
12. J. Lagarias, *Best simultaneous Diophantine approximations. I. Groth rates of best approximation denominators*. — Trans. Amer. Math. Soc. **272**, No. 2 (1982), 545–554.

13. N. G. Moshchevitin, *On some open problems in Diophantine approximation*. — [arXiv:1202.4539v5](https://arxiv.org/abs/1202.4539v5) [math.NT], 22 Dec 2012, 1–42.
14. N. Chevallier, *Best Simultaneous Diophantine Approximations and Multidimensional Continued Fraction Expansions*. Moscow J. Comb. Number Theory **3**, No. 3 (2013), 3–56.
15. З. И. Борович, И. Р. Шафаревич, *Теория чисел*. 2-ое изд. М., 1972.
16. И. М. Виноградов, *Основы теории чисел*. 8-ое изд. М., 1972.

Zhuravlev V. G. Local Pisot matrices and mutual approximations of algebraic numbers.

A further development of the simplex-modular algorithm for decomposition of algebraic numbers into multidimensional continued fractions is proposed. With this aim we construct localized Pisot matrices. They have moduli of all eigenvalues less than 1 fall into the interval of small length. Such Pisot matrices generate continued fractions with the best approximations.

Владимирский государственный университет  
пр. Строителей 11,  
600024 Владимир, Россия  
*E-mail*: [vzhuravlev@mail.ru](mailto:vzhuravlev@mail.ru)

Поступило 5 апреля 2017 г.