В. Н. Чубариков, Кратные тригонометрические суммы,
Чебышевский сб., 2011, том 12, выпуск 4, 134–173

https://www.mathnet.ru/cheb117

ЧЕБЫШЕВСКИЙ СБОРНИК
Том 12 Выпуск 4 (2011)

УДК 511.3

КРАТНЫЕ ТРИГОНОМЕТРИЧЕСКИЕ СУММЫ[1]

В. Н. Чубариков (г. Москва)

СОДЕРЖАНИЕ

[1]Данная статья подготовлена по материалам кандидатской диссертации, которую в 1977г. В. Н. Чубариков защитил в Московском государственном университете им. М. В. Ломоносова под руководством доктора физико–математических наук, профессора А. А. Карацубы.

Обозначения

A– набор вещественных чисел $\alpha_{t_1,\dots,t_r}$, с условием $0 \le t_1,\dots,t_r \le n$, где $r \ge 1$ и $n \ge 2$ – целые числа;

$$f(x_1,\dots,x_r) = f_A(x_1,\dots,x_r) = \sum_{t_1=0}^{n} \dots \sum_{t_r=0}^{n} \alpha_{t_1,\dots,t_r}\ x_1^{t_1},\dots,x_r^{t_r};$$

$M = (n+1)^r$; E – единичный M–мерный куб;

$exp(x) = e^x$;

$J_n(k,P)$ – число решений полной системы уравнений

$$\sum_{j=1}^{2k} (-1)^j x_{1,j}^{t_1},\dots,x_{r,j}^{t_r} = 0; \quad 0 \le t_1,\dots,t_r \le n;$$

Через $S(A)$ обозначим тригонометрическую сумму

$$S(A) = \sum_{x_1=1}^{P} \cdots \sum_{x_r=1}^{P} exp(2\pi i f_A(x_1,\dots,x_r));$$

Jmz – мнимая часть комплексного числа z;

$\|\alpha\| = min(\{\alpha\}, 1-\{\alpha\})$, где $\{\alpha\}$ – дробная часть числа α.

Введение

Полной системой уравнений назовем следующую систему

$$\sum_{j=1}^{2k} (-1)^j x_{1j}^{t_1},\dots,x_{r,j}^{t_r} = 0, \qquad (0 \le t_1,\dots,t_r \le n) \tag{1}$$

где неизвестные $x_{1,j},\dots,x_{r,j}$, $1 \le j \le k$ пробегают целые значения от 1 до P.

И. М. Виноградов полностью исследовал систему (1) в принципиально важном случае $r = 1$ и получил точную оценку сверху для числа решений ее (см. [1], гл. 4, теорема 1). Эта оценка называется теоремой о среднем И. М. Виноградова и одним из известных приложений ее являются оценки тригонометрических сумм Г. Вейля.

В 1952 году китайский математик Хуа Ло-Кен, существенно опираясь на теорему о среднем и оценки тригонометрических сумм, полученные И. М. Виноградовым, доказал асимптотическую формулу для числа решений полной системы уравнений в случае $r = 1$ при правильном порядке количества неизвестных (см. [6]). В этой же работе Л. К. Хуа подробно исследовал вопрос сходимости особого ряда и особого интеграла, которые возникают при изучении полной системы уравнений. Для показателя сходимости особого ряда он получил неулучшаемую оценку.

К. К. Марджанишвили в задаче о разрешимости систем уравнений, похожих на систему (1), получил наиболее точную оценку количества неизвестных, начиная с которого наступает разрешимость (см. [7]).

В последние годы А. А. Карацуба предложил схему построения теории кратных тригонометрических сумм (см. [8]-[14], [16], [17]). В реализации этой схемы первый шаг был сделан Г. И. Архиповым. В 1973 году он доказал теорему о среднем значении модуля двукратной тригонометрической суммы (см. [8]-[11]). Для многократной тригонометрической суммы подобная теорема является прямым обобщением этой теоремы и опубликована в совместной работе Г. И. Архиповн и автора диссертации [12], [13].

Дальнейшие результаты по теории кратных тригонометрических сумм связаны с приложениями полученной теоремы о среднем значении модуля кратной тригонометрической суммы. А. А. Карацуба поставил задачу о получении асимптотической формулы для числа решений полной системы уравнений (1) при произвольном r и возможно меньшем количестве неизвестных.

Решение этой задачи является основным результатом настоящей диссертации.

Вывод асимптотической формулы для числа решений полной системы уравнений (1) опирается на теорему о среднем для кратных тригонометрических сумм, на оценки сверху модуля кратных тригонометрических сумм и оценки сверху модуля кратного тригонометрического интеграла и полных кратных рациональных тригонометрических сумм.

Основные моменты решения этой задачи таковы.

Полная система уравнений (1) состоит из $M = (n+1)^r$ диофантовых уравнений. Число ее решений выражается через тригонометрический интеграл;

$$\int_E \Big| \sum_{x_1=1}^{P} \cdots \sum_{x_r=1}^{P} exp(2\pi i f_A(x_1,\ldots,x_r)) \Big|^{2k} dA$$

где

$$f_A(x_1,\ldots,x_r) = \sum_{t_1=0}^{n} \cdots \sum_{t_r=0}^{n} \alpha_{t_1,\ldots,t_r} x_1^{t_1},\ldots,x_r^{t_r}$$

и интегрирование ведется по единичному M – мерному кубу E, определяемому условиями

$$0 \le \alpha_{t_1,\ldots,t_r} \le 1,\ 0 \le t_1,\ldots,t_r \le n,\ \alpha_{0,\ldots,0} = 0$$

Область интегрирования E разбивается на два множества E_1 и E_2. Точками множества E_1 являются точки, координаты которых — рациональные числа, имеющие малые знаменатели, и их достаточно малые окрестности (окрестности выбраны так, чтобы они не пересекались). Эти точки называются точками первого класса. Остальные точки куба E относятся к множеству E_2 и называются точками второго класса.

Интеграл по точкам второго класса дает остаточный член асимптотической формулы. Его исследование основано на оценках сверху модуля тригонометрической суммы и теореме о среднем.

Интеграл по точкам первого класса дает главный член асимптотической формулы. Тригонометрическую сумму в точках первого класса с большой точностью можно заменить на произведение полной кратной рациональной тригонометрической суммы и кратного тригонометрического интеграла. После суммирования по точкам первого класса главный член асимптотики выразится через произведение особого ряда и особого интеграла.

При этом возникает вопрос о сходимости особого ряда и особого интеграла. Это, в свою очередь, связано с необходимостью получения достаточно точных оценок полных кратных рациональных тригонометрических сумм и кратных тригонометрических интегралов (теоремы 1-5 диссертации). Эти теоремы являются оригинальными.

Диссертация состоит из четырех глав.

В первой главе получены оценки сверху модуля кратных тригонометрических интегралов (теоремы 1, 2). В §2 (теорема 3) установлено, что эти оценки нельзя существенно улучшить. В §3 находится оценка показателя сходимости особого интеграла.

Вторая глава содержит теоремы об оценках сверху модуля полных кратных рациональных тригонометрических сумм (теорема 4). Как и в случае тригонометрических интегралов, устанавливается неулучшаемость этих оценок (теорема 5) и оценка показателя сходимости особого ряда.

В §2 третьей главы даны оценки кратных тригонометрических сумм общего вида. Эти результаты носят вспомогательный характер в исследуемой задаче (используются при оценке остаточного члена); получены автором совместно с А. А. Карацубой и Г. И. Архиповым и помещены здесь для полноты изложения.

В последней, четвертой главе, на основе результатов предыдущих глав выводится асимптотическая формула для числа решений полной системы уравнений (1). В §1 выделяется главный член асимптотики. Для этого используются результаты первой и второй глав. В §2 оценивается остаточный член.

Основные результаты диссертации опубликованы в работах автора [16], [17].

Перейдем к формулировке основной теоремы диссертации.

Обозначим через $J_n(k, P)$ число решений полной системы уравнений (1).

Основная теорема. *Пусть*

$$k_0 = 10Mr^2 n \log(rn).$$

Тогда при $k \geq k_0$ справедлива асимптотическая формула

$$\begin{aligned} J_n(k,P) =& \sigma\theta P^{2kr-\frac{rnM}{2}} + O\left(P^{2kr-\frac{rnM}{2}-\frac{1}{10M}}\right) + \\ &+ O\left(P^{2kr-\frac{rnM}{2}-\frac{1}{500r^2\log(rn)}}\right), \end{aligned} \tag{2}$$

где σ и θ – соответственно особый ряд и особый интеграл и определяются следующим образом:

$$\begin{aligned} \theta = &\int_{-\infty}^{\infty}\dots\int_{-\infty}^{\infty}\Big|\int_0^1\dots\int_0^1 \exp(2\pi i f_A(x_1,\dots,x_r))dx_1\dots dx_r\Big|^{2k}\cdot \\ &\cdot d\alpha_{n,\dots,n}\dots d\alpha_{0,\dots,1}; \end{aligned} \tag{3}$$

$$f_A(x_1,\dots,x_r) = \sum_{t_1=0}^{n}\cdots\sum_{t_r=0}^{n}\alpha_{t_1,\dots,t_r}x_1^{t_1}\cdots x_r^{t_r};\ \alpha_{0,\dots,0}=0.$$

$$\begin{aligned} \sigma = &\sum_{q_{n,\dots,n}=1}^{\infty}\dots\sum_{q_{0,\dots,1}=1}^{\infty}\ \sum_{\substack{a_{n,\dots,n}=1\\(a_{n,\dots,n},\ q_{n,\dots,n})=1}}\ \dots \sum_{\substack{a_{0,\dots,1}=1\\(a_{0,\dots,1},\ q_{0,\dots,1})=1}} 1\cdot \\ &\cdot\Big|q^{-r}\cdot\sum_{x_1=1}^{q}\dots\sum_{x_r=1}^{q}\exp\left(2\pi i\sum_{t_1=0}^{n}\dots\sum_{t_r=0}^{n}\frac{a_{t_1\dots t_r}}{q_{t_1\dots t_r}}x_1^{t_1}\dots x_r^{t_r}\right)\Big|^{2k}; \end{aligned} \tag{4}$$

$$q = \prod_{t_1=0}^{n}\cdots\prod_{t_r=0}^{n}q_{t_1\dots t_r},\quad q_{0,\dots,0}=1.$$

Заметим, что при фиксированном r число k_0 в основной теореме нельзя существенно уменьшить.

Действительно, пусть $x_{1,2j-1},\dots,x_{r,2j-1}$, $j=1,\dots,k$ пробегают независимо целые значения от 1 до P.

Тогда $x_{s,2j-1}=x_{s,2j}$; $s=1,\dots,r$; $j=1,\dots,k$ является решением полной системы (1). Поэтому

$$J_n(k,P)\geq P^{kr}.$$

С другой стороны, в силу основной теоремы

$$J_n(k,P)\leq c(n,k)P^{2kr-\frac{rnM}{2}}, \tag{5}$$

при некоторой постоянной $c(n,k)>0$.

Отсюда следует, что для справедливости неравенства (5), а значит, и асимптотической формулы для числа решений полной системы уравнений (1), необходимо, чтобы $k_0\geq\frac{1}{2}nM$. А в диссертации получена асимптотическая формула при $k_0=cMn\log n$, где $c>0$ – постоянная, зависящая только от r.

В заключение автор выражает глубокую благодарность профессору А. А. Карацубе за научное руководство и кандидату физико-математических наук Г. И. Архипову за полезные советы.

1 Кратные тригонометрические интегралы

В этой главе содержатся теоремы об оценках сверху модуля кратных тригонометрических интегралов (теоремы 1 и 2). В теореме 3 показано, что на классе многочленов от r переменных со степенями по каждой переменной, не превосходящими n, эти оценки нельзя существенно улучшить. В §3 оценка интеграла теоремы 1 используется для исследования сходимости особого интеграла проблемы.

1.1 Оценки сверху кратных тригонометрических интегралов

В дальнейшем нам будут необходимы следующие леммы.

Лемма 1. *Пусть* $0 \le y \le 1$, $f(x) = u_n x^n + \ldots + u_1 x$, *где* $u_n, \ldots, u_1$ – *вещественные числа,* $u = \max(|u_n|, \ldots, |u_1|)$.

Тогда для интеграла

$$I(y) = \int_0^y \exp(2\pi i f(x)) dx$$

справедливо неравенство

$$|I(y)| \le \min(y, 62nu^{-\frac{1}{n}}).$$

Эта лемма — незначительного вида изменение леммы 4 из главы 2 книги И. М. Виноградова [1].

Условие $y = 1$ заменено на $0 \le y \le 1$, но это не изменяет доказательства.

Лемма 2. *Пусть* $f(x) = \alpha_n x^n + \ldots + \alpha_1 x + \alpha_0$ *где* $\alpha_n, \ldots, \alpha_1, \alpha_0$ – *вещественные числа,*

$$\alpha = \max_{0 \le j \le n} |\alpha_j|, \ \ 0 \le \beta \le 1, \ \ 0 \le x \le 1.$$

Тогда мера точек x, *для которых* $|f(x)| \le \alpha^\beta$, *не превосходит* $8n^2 \alpha^{\frac{\beta-1}{n}}$.

Доказательство. Достаточно рассмотреть случай $n \ge 2$. (При $n = 1$ и 0 лемма тривиально верна). Разобьем интервал $0 \le x \le 1$ на интервалы монотонности $f(x)$. Их количество не превосходит n. Возьмем один из них и оценим длину $x_1 \le x \le x_2$, на котором $|f(x)| \le \alpha^\beta$. Положим $t = \dfrac{x_2 - x_1}{n}$. Из формулы Тейлора имеем

$$f(x_1 + mt) = \sum_{k=0}^{n} \frac{f^{(k)}(x_1)}{k!}(mt)^k, \ \ (m = 1, \ldots, n).$$

Рассмотрим эти равенства как систему линейных уравнений с неизвестными $\frac{1}{k!}f^{(k)}(x_1)t^k$. Получим

$$\frac{f^{(k)}(x_1)}{k!} = \sum_{m=1}^{n} |f(x_1+mt) - f(x_1)| \cdot \frac{1}{m} \cdot \frac{\Delta_m}{\Delta}, \tag{6}$$

где $\Delta_m,\ \Delta$ – определители матриц

$$\Delta_m = |1, \nu, \dots, \nu^{k-2},\ \nu^k, \dots, \nu^{n-1}|,$$
$$(\nu = 1, \dots, m-1,\ m+1, \dots, n),$$

$$\Delta = |1, \nu, \dots, \nu^{n-1}|,\ \ (\nu = 1, \dots, n).$$

Известно (см, [15], ч II, отдел VII, §1, задача 10)

$$\Delta_m = \frac{\Delta S_{n-k}}{(n-m)!}$$

где S_{n-k} есть $n-k$ – элементарная симметрическая функция $n-1$ числа: $1, \dots, m-1,\ m+1, \dots, n$.

Подставим в (6) последнее равенство и воспользуемся тем, что на интервале $x_1 \le x \le x_2$ многочлен $|f(x)| \le \alpha^\beta$. Имеем

$$|f^{(k)}(x_1)|t^k \le 2\alpha^\beta \sum_{m=1}^{n} \frac{1}{m(n-m)!} S_{n-k}k! \le 4k!S_{n-k}\alpha^\beta.$$

Пусть $\alpha = |\alpha_k|$. Тогда

$$k!\alpha = |f^{(k)}(o)| = |\sum_{r=k}^{n} \frac{f^{(r)}(x_1)}{(r-k)!}(-x_1)^{r-k}| \le \sum_{r=k}^{n} \frac{4r!S_{n-r}\alpha^\beta t^{-r}}{(r-k)!} \tag{7}$$

Так как $t < \frac{1}{n}$, то

$$\frac{t^{-k}}{(r-k)!} < \frac{t^{-n}}{(n-k)!}$$

Кроме того

$$S_{n-r} \le \frac{n!}{r!(n-r)!} \cdot \frac{n!}{r!}.$$

Поэтому из неравенства (7) следует, что

$$t^n \le \sum_{r=k}^{n} 4\alpha^{\beta-1} \frac{r!}{k!(n-k)} \frac{n!}{r!(n-r)!} \frac{n!}{r!} \le 2^{2n+2}\alpha^{\beta-1}.$$

Далее имеем

$$t \le 8\alpha^{\frac{\beta-1}{n}}.$$

Значит, на интервале $0 \le x \le 1$ мера того множества, на котором $|f(x)| \le \alpha^\beta$ не превосходит $8n^2\alpha^{\frac{\beta-1}{n}}$.

Лемма 2 доказана.

Лемма 3. *Пусть* $g(x)$ *– кусочно монотонная и кусочно – непрерывная функция,* $f(x)$, u, $I(y)$ *те же, что и в лемме 1, кроме того* $\max\limits_{0\le x\le 1}|g(x)| \le H$. *Тогда для интеграла*

$$G_1 = \int_0^1 g(x)\exp(2\pi i f(x))dx$$

справедлива оценка

$$|G_1| \ll H\min(1, u^{-\frac{1}{n}})$$

где постоянная в знаке $\ll$ *зависит от числа отрезков монотонности функции* $g(x)$ *и степени многочлена* $f(x)$.

Доказательство. Разобьем интервал $0 \le x \le 1$ на интервалы монотонности $g(x)$. Пусть $x_1 \le x \le x_2$ – один из них. Проинтегрируем по частям. Получим

$$V = \int_{x_1}^{x_2} g(x)\exp(2\pi i f(x))dx = \int_{x_1}^{x_2} g(x)d\left(\int_0^x \exp(2\pi i f(\xi))d\xi\right) =$$
$$= g(x_2)\int_0^{x_2}\exp(2\pi i f(\xi))d\xi - g(x_1)\int_0^{x_1}\exp(2\pi i f(\xi)d\xi -$$
$$-\int_{x_1}^{x_2}\left(\int_0^x \exp(2\pi i f(\xi)d\xi)\right)dg(x).$$

Отсюда имеем

$$|V| \le 4H\max_{x_1\le y\le x_2}\left|\int_0^y \exp(2\pi i f(\xi))d\xi\right|$$

Поэтому из леммы 1 следует, что

$$|V| \le 4H\min(1, 62nu^{-\frac{1}{n}}).$$

А так как $g(x)$ имеет, конечное число интервалов монотонности, то для G_1 справедлива сформулированная оценка.

Лемма 3 доказана.

Теорема 1. *Пусть* $\alpha = \max\limits_{0\le t_1,\dots,t_r\le n}|\alpha_{t_1,\dots,t_r}|$, $\alpha_{0,\dots,0} = 0$,

$$I_r = \int_0^1\cdots\int_0^1 \exp(2\pi i f(x_1,\dots,x_r))dx_1\cdots dx_r.$$

Тогда

$$|I_r| \le \min(1, (6n)^{2r}\alpha^{-\frac{1}{n}}(\ln(\alpha+1)+1)^{r-1}).$$

Доказательство проведем методом математической индукции по числу переменных многочлена. При $r=1$ теорема верна (лемма 1). Предположим, что она справедлива для $r-1$ переменной. Докажем ее для r переменных.

Пусть

$$
\begin{aligned}
&\alpha = |\alpha_{s_1,\dots,s_r}|;\ s_1>0;\ t=[\ln(\alpha+1)]+1;\\
&E_0 = \left\{x_r \middle| |\varphi_{s_1,\dots,s_{r-1}}(x_r)| \le 1\right\};\\
&E_k = \left\{x_r \middle| \alpha^{\frac{k-1}{t}} < |\varphi_{s_1,\dots,s_{r-1}}(x_r)| \le \alpha^{\frac{k}{t}}\right\},\ k=1,\dots,t-1;\\
&E_t = \left\{x_r \middle| \alpha^{\frac{t-1}{t}} < |\varphi_{s_1,\dots,s_{r-1}}(x_r)|\right\};\\
&f(x_1,\dots,x_r) = \sum_{t_1=0}^{n}\cdots\sum_{t_r=0}^{n} x_1^{t_1}\cdots x_{r-1}^{t_{r-1}}\varphi_{t_1,\dots,t_{r-1}}(x_r).
\end{aligned}
$$

Тогда

$$
\begin{aligned}
&|I_r| \le mesE_0 + \sum_{k=1}^{t-1} mesE_k \times\\
&\times \max_{x_r\in E_k}\left|\int_0^1\cdots\int_0^1 \exp(2\pi i f(x_1,\dots,x_r))dx_1\cdots d_{x_{r-1}}\right| +\\
&+\max_{x_r\in E_t}\left|\int_0^1\cdots\int_0^1 \exp(2\pi i f(x_1,\dots,x_r))d_{x_1}\cdots dx_{r-1}\right|
\end{aligned}
$$

Из леммы 2 имеем,

$$
\begin{aligned}
&mesE_k \le 8n^2\alpha^{-\frac{1}{n}+\frac{k}{tn}},\ k=1,\dots,t-1;\\
&mesE_0 \le 8n^2\alpha^{-\frac{1}{n}}.
\end{aligned}
$$

А из предположения индукции следует, что

$$
\begin{aligned}
&\max_{x_r\in E_k}\left|\int_0^1\cdots\int_0^1 \exp(2\pi i f(x_1,\dots,x_r))d_{x_1}\cdots dx_{r-1}\right| \le\\
&\le \min(1,(6n)^{2(r-1)}\alpha^{-\frac{k-1}{tn}}(\ln(\alpha+1)+1)^{r-2}),\ \ k=1,\dots,t
\end{aligned}
$$

При $\alpha>1$ из этого получаем

$$
\begin{aligned}
&|I_r| \le 8n^2\alpha^{-\frac{1}{n}} + \sum_{k=1}^{t-1} 8n^2\alpha^{-\frac{1}{n}+\frac{k}{tn}}(6n)^{2(r-1)}\alpha^{-\frac{k-1}{tn}}\cdot\\
&\cdot(\ln(\alpha+1)+1)^{r-2} + (6n)^{2(r-1)}\alpha^{-\frac{t-1}{tn}}(\ln(\alpha+1)+1)^{r-2} \le\\
&\le (6n)^{2r}\alpha^{-\frac{1}{n}}(\ln(\alpha+1)+1)^{r-1}.
\end{aligned}
$$

Кроме того, справедлива тривиальная оценка

$$|I_r| \leq 1.$$

Соединяя вместе последние оценки для I_r, получим сформулированную в лемме оценку.

Теорема 1 доказана.

Теорема 2. *Пусть $g(x_1, \ldots, x_r)$ кусочно-непрерывная и кусочно монотонная по каждой переменной при произвольных фиксированных значениях других переменных, $H = \max\limits_{0 \leq x_1, \ldots, x_r \leq 1} |g(x_1, \ldots, x_r)|$. Далее, пусть $f(x_1, \ldots x_2)$, α, I_r – те же, что и в теореме 1. Тогда для интеграла*

$$G_r = \int_0^1 \cdots \int_0^1 g(x_1, \ldots, x_r) \exp(2\pi i f(x_1, \ldots, x_r)) dx_1 \ldots dx_r$$

справедлива оценка

$$|G_r| \ll H \min(1, \alpha^{-\frac{1}{n}} (\ln(\alpha + 1) + 1)^{r-1}).$$

Доказательство проведем по индукции. При числе переменных $r = 1$ теорема верна (лемма 3). Предложим ее справедливость для $r - 1$ переменной. Докажем ее для r переменных. Пусть $\alpha = |\alpha_{s_1, \ldots, s_r}|$; $s_1 > 0$; t; $E_0, \ldots, E_t$; $\varphi_{t_1, \ldots, t_{r-1}}(x_r)$ – те же, что и в доказательстве теоремы 1. Тогда

$$|G_r| \leq H mes E_0 + \sum_{k=1}^{t-1} mes E_k \cdot \max_{x_r \in E_k} \left| \int_0^1 \cdots \int_0^1 g(x_1, \ldots, x_r) \cdot \right.$$
$$\left. \cdot \exp(2\pi i f(x_1, \ldots, x_r)) dx_1 \cdots d_{x_{r-1}} \right| + \max_{x_r \in E_t} \left| \int_0^1 \cdots \int_0^1 g(x_1, \ldots, x_r) \cdot \right.$$
$$\left. \cdot \exp(2\pi i f(x_1, \ldots, x_r)) dx_1 \cdots d_{x_{r-1}} \right|$$

В силу леммы 2 и предложения индукции имеем

$$|G_r| \ll H\alpha^{-\frac{1}{n}} + \sum_{k=1}^{t-1} \alpha^{-\frac{1}{n} + \frac{k}{tn}} H \min(1, \alpha^{-\frac{k-1}{tn}} (\ln(\alpha + 1) + 1)^{r-2}) +$$
$$+ H \min(1, \alpha^{-\frac{t-1}{tn}} (\ln(\alpha + 1) + 1)^{r-2}) \ll H \min(1, \alpha^{-\frac{1}{n}} (\ln(\alpha + 1) + 1)^{r-1}).$$

Теорема 2 доказана.

1.2 Оценки снизу

Здесь мы покажем, что оценку I_r при фиксированных n и r и растущем α в теореме 1 нельзя существенно улучшить. Это следует из того, что при $\alpha > 1$

для интеграла

$$I_r(\alpha) = \int_0^1 \cdots \int_0^1 \exp(2\pi i \alpha x_1^n \cdots x_r^n) dx_1 \cdots dx_r$$

справедливо неравенство

$$|I_r(\alpha)| \geq \frac{1}{2\pi n^r (r-1)!} \alpha^{-\frac{1}{n}} (\ln \alpha)^{r-1}. \tag{8}$$

Прежде всего, справедлива формула

Лемма 4. *Пусть α — вещественное число. Тогда*

$$I_r(\alpha) = \frac{(-1)^{r-1}}{(r-1)!} \int_0^1 \exp(2\pi i \alpha x^n)(\ln x)^{r-1} dx.$$

Доказательство проведем по индукции. При $r = 1$ лемма верна. Предположим ее справедливость для $r-1$ переменной. Докажем ее для r переменных. По предположению индукции имеем

$$I_r(\alpha) = \int_0^1 I_{r-1}(\alpha x^n) dx = \int_0^1 \frac{(-1)^{r-2}}{(r-2)!} \left(\int_0^1 \exp(2\pi i \alpha x^n y^n)(\ln y)^{r-2} dy \right) dx$$

После замены переменных $z = xy$ получим

$$I_r(\alpha) = \frac{(-1)^{r-2}}{(r-2)!} \int_0^1 (d \ln x) \int_0^x \exp(2\pi i \alpha z^n)(\ln z - \ln x)^{r-2} dx$$

Проинтегрируем последний интеграл по частям

$$I_r(\alpha) = \frac{(-1)^{r-2}}{(r-2)!} \int_0^1 d \ln x \int_0^x \exp(2\pi i \alpha z^n) \left(\sum_{k=0}^{r-2} (-1)^k C_{r-2}^k (\ln x)^k (\ln z)^{r-2-k} \right) dz =$$
$$= \frac{(-1)^{r-2}}{(r-2)!} \sum_{k=0}^{r-2} \frac{(-1)^k}{k+1} C_{r-2}^k \int_0^1 d(\ln x)^{k+1} \int_0^x \exp(2\pi i \alpha z^n)(\ln z)^{r-2-k} dz =$$
$$= \frac{(-1)^{r-1}}{(r-2)!} \sum_{k=0}^{r-2} \frac{(-1)^k}{k+1} C_{r-2}^k \int_0^x \exp(2\pi i \alpha z^n)(\ln z)^{r-1} dz.$$

Так как

$$\frac{1}{r-1} \sum_{k=0}^{r-2} (-1)^k \frac{r-1}{k+1} C_{r-2}^k = \frac{1}{r-1},$$

то отсюда и следует справедливость утверждения леммы для r переменных.

Лемма 4 доказана.

Теорема 3. *При $\alpha > 1$ справедливо неравенство (8).*

Доказательство. Пусть $J = Jm(I_n(\alpha))$. Сделаем замену переменной интегрирования $z = y^n$ и проинтегрируем по частям. Получим

$$\begin{aligned} J &= \frac{1}{(r-1)!}\int_0^1 \sin 2\pi\alpha y^n \left(\ln\frac{1}{y}\right)^{r-1} dy = \\ &= \frac{1}{n^r(r-1)!}\int_0^1 \sin(2\pi\alpha z)\left(\ln\frac{1}{z}\right)^{r-1} z^{\frac{1}{n}-1}dx = \\ &= \frac{1}{\pi\alpha n^r(r-1)!}\int_0^1 \left(\ln\frac{1}{z}\right)^{r-1} z^{\frac{1}{n}-1} d\sin^2\pi\alpha z = \\ &= \frac{1}{\pi\alpha n^r(r-1)!}\int_0^1 \sin^2\pi\alpha z d\left(\left(\ln\frac{1}{z}\right)^{r-1} z^{\frac{1}{n}-1}\right). \end{aligned}$$

Кроме того, если заменить z на $z - \frac{1}{2\alpha}$, будем иметь

$$J = -\frac{1}{\pi\alpha n^r(r-1)!}\int_{\frac{1}{2\alpha}}^{1+\frac{2}{2\alpha}} \cos^2\pi\alpha z d\left(\left(\ln\frac{1}{z-\frac{1}{2\alpha}}\right)^{r-1}\left(z-\frac{1}{2\alpha}\right)^{\frac{1}{n}-1}\right).$$

Так как при $0 < z \leq 1$ функция $-\dfrac{d}{dz}\left(\left(\ln\frac{1}{z}\right)^{r-1} z^{\frac{1}{n}-1}\right)$ неотрицательная и монотонно убывающая, то складывая выражения J, получим

$$\begin{aligned} 2J &> -\frac{1}{\pi\alpha n^r(r-1)!}\int_{\frac{1}{\alpha}}^1 d\left(\left(\ln\frac{1}{z}\right)^{r-1} z^{\frac{1}{n}-1}\right) = \\ &= \frac{1}{\pi n^r(r-1)!}\alpha^{-1}(\ln\alpha)^{r-1}\alpha^{-\frac{1}{n}+1} = \\ &= \frac{1}{\pi n^r(r-1)!}\alpha^{-\frac{1}{n}}(\ln\alpha)^{r-1}. \end{aligned}$$

Таким образом

$$|I_r(\alpha)| \geq J \geq \frac{1}{2\pi n^r(r-1)!}\alpha^{-\frac{1}{n}}(\ln\alpha)^{r-1}$$

Теорема 3 доказана.

1.3 Об одном особом интеграле

Здесь мы находим нижнюю границу для числа переменных полной системы уравнений, начиная с которой особый интеграл рассматриваемой задачи будет сходиться.

Лемма 6. *Пусть*

$$\theta = \int |I_r|^{2k} dA$$

где интегрирование ведется по всем $-\infty < \alpha_{t_1,\ldots,t_r} < +\infty,\ 0 \le t_1,\ldots,t_r \le n$ *кроме* $\alpha_{0,\ldots,0} = 0$*. Тогда* θ *сходится при* $k > \frac{nM}{2}$.

Доказательство. Пусть, как и в теореме 1 величина $\alpha = \max\limits_{0\le t_1,\ldots,t_r\le n} |\alpha_{t_1,\ldots,t_r}|$. Тогда из этой теоремы следует, что выполняется следующая оценка

$$|I_r| \ll \min(1, \alpha^{-\frac{1}{n}+\varepsilon}),$$

где $\frac{1}{nM} > \varepsilon > 0$ – любое фиксированное вещественное число. Заметим, что справедливо неравенство

$$\min(1, \alpha^{-\frac{1}{n}+\varepsilon}) = \min_{0\le t_1,\ldots,t_r\le n}(1, |\alpha_{t_1,\ldots,t_r}|^{-\frac{1}{n}+\varepsilon}) \le$$
$$\le \prod_{0\le t_1,\ldots,t_r\le n}{}' \min(1, |\alpha_{t_1,\ldots,t_r}|^{(-\frac{1}{n}+\varepsilon)\frac{1}{M-1}}),$$

где $\prod\limits_{0\le t_1,\ldots,t_r\le n}{}'$ означает, что произведение берется по всем указанным $t_1,\ldots,t_r$, кроме $t_1 = \cdots = t_r = 0$. Подставим эту оценку интеграла I_r в θ. Получим, что θ сходится при

$$2k\left(-\frac{1}{n} + \varepsilon\right)\frac{1}{M-1} < -1; \quad k > \frac{nM}{2}.$$

Лемма 6 доказана.

2 Кратные рациональные тригонометрические суммы

Полной кратной рациональной тригонометрической суммой назовем сумму вида

$$S\left(\frac{f(x_1,\ldots x_r)}{q}\right) = \sum_{x_1=1}^{q}\cdots\sum_{x_r=1}^{q}\exp\left(2\pi i\frac{f(x_1,\ldots,x_r)}{q}\right),$$

где $q > 1$ - целое число;

$$f(x_1,\ldots,x_r) = \sum_{t_1=0}^{n}\cdots\sum_{t_r=0}^{n} a_{t_1,\ldots,t_r}x_1^{t_1}\cdots x_r^{t_r}$$

многочлен с целыми коэффициентами.

Эта глава содержит оценки сверху модуля таких сумм (теорема 4). В теореме 5 показано, что эти оценки нельзя существенно улучшить при фиксированных n и r и растущем q. В §3 на основе оценок теоремы 4 устанавливается сходимость особого ряда σ.

2.1 Оценки сверху кратных рациональных тригонометрических сумм

Здесь мы определим верхнюю границу модуля полной кратной рациональной тригонометрической суммы. Для этого нам будут необходимы следующие леммы

Лемма 1. *(Хуа) Пусть p – простое число, $l \geq 1$ – целое, и пусть* $\varphi(x) = a_1x + \cdots + a_nx^n$, $(a_1, \ldots, a_n, p) = 1$,

$$S\left(\frac{\varphi(x)}{p^l}\right) = \sum_{x=1}^{p^l} \exp\left(2\pi i \frac{\varphi(x)}{p^l}\right).$$

Тогда имеем

$$S\left(\frac{\varphi(x)}{p^l}\right) < n^{2n} p^{l\left(1-\frac{1}{n}\right)}.$$

(лемма 6, гл. III, [1])

Лемма 2. *Пусть* $f(x) = a_0 + a_1x + ... + a_nx^n$, $(a_0, a_1, ..., a_n, p) = 1$ *и пусть* $N_p(\alpha, \beta)$ *число решений сравнения* $f(x) \equiv 0(mod\ p^\beta)$, $\alpha \geq \beta$, $1 \leq x \leq p^\alpha$. *Тогда имеем*

$$N_p(\alpha, \beta) \leq 5n^{2n} p^{\alpha - \frac{\beta}{n}}.$$

Доказательство. Без ограничения общности можно считать, что

$$(a_1, \ldots, a_n, p) = 1,$$

(в противном случае сравнение $f(x) \equiv o(mod\ p^\beta)$ не имеет решений), $n \geq 2$ (при $n = 1$ оценка тривиально верна). Так как из $x \equiv x_1(modp^\beta)$ следует, что и $f(x) \equiv f(x_1)(mod\ p^\beta)$, то

$$N_p(\alpha, \beta) = p^{\alpha - 2\beta} \sum_{a=1}^{p^\beta} \sum_{x=1}^{p^\beta} \exp\left(2\pi i \frac{af(x)}{p^\beta}\right).$$

Разобьем сумму по a на $\beta{+}1$ сумм, собирая вместе те слагаемые a, для которых $(a, p) = 1$; $p\,|\,a$, но p^2 не делит a и т.д.

$$N_p(\alpha, \beta) = p^{\alpha - 2\beta} \sum_{k=0}^{\beta} S_k;$$

$$S_k = \sum_{\substack{1 \leq a \leq p^\beta \\ p^k \| a}} \sum_{x=1}^{p^\beta} \exp\left(2\pi i \frac{af(x)}{p^\beta}\right).$$

По лемме 1 имеем, что $(a = a_1p^k, (a_1, p) = 1)$

$$|S_k| \le p^{\beta-k}\left|\sum_{x=1}^{p^\beta} \exp\left(2\pi i \frac{a_1 f(x)}{p^{\beta-k}}\right)\right| \le n^{2n} p^{2\beta-k-\frac{\beta-k}{n}}.$$

Отсюда следует, что

$$N_p(\alpha,\beta) \le p^{\alpha-2\beta}\sum_{k=0}^{\beta}|S_k| \le n^{2n}p^{\alpha-\frac{\beta}{n}}\sum_{k=0}^{\beta}p^{-k+\frac{k}{n}} \le 5n^{2n}p^{\alpha-\frac{\beta}{n}}.$$

Лемма 2 доказана.

Лемма 3. *Пусть*

$$f(x_1,\ldots,x_r) = \sum_{t_1=0}^{n}\cdots\sum_{t_r=0}^{n} a_{t_1,\ldots,t_r}x_1^{t_1}\cdots x_r^{t_r}; \qquad (a_{0,\ldots,0,1},\ldots,a_{n,\ldots,n,p}) = 1;$$

$$S\left(\frac{f(x_1,\ldots,x_r)}{p^\alpha}\right) = \sum_{x_1=1}^{p^\alpha}\cdots\sum_{x_r=1}^{p^\alpha}\exp\left(2\pi i\frac{f(x_1,\ldots,x_r)}{p^\alpha}\right).$$

Тогда имеем

$$\left|S\left(\frac{f(x_1,\ldots,x_r)}{p^\alpha}\right)\right| \le (5n^{2n})^r(\alpha+1)^{r-1}p^{r\alpha-\frac{\alpha}{n}}.$$

Доказательство проведем индукцией по числу переменных многочлена. При $r = 1$ и любых $\alpha \geqslant 1$ утверждение леммы справедливо (лемма 1).

Предположим, что теорема верна для $r-1$ переменной и любых $\alpha \ge 1$. Докажем ее для r переменных и любого $\alpha \ge 1$. Пусть $(a_{s_1,\ldots,s_r}, p) = 1$, $S_1 > 0$. Запишем многочлен $f(x_1,\ldots,x_r)$ в виде

$$f(x_1,\ldots,x_r) = \sum_{t_1=0}^{n}\cdots\sum_{t_{r-1}=0}^{n} x_1^{t_1}\cdots x_{r-1}^{t_{r-1}}\varphi_{t_1,\ldots,t_{r-1}}(x_r).$$

Тогда

$$\left|S\left(\frac{f(x_1,\ldots,x_r)}{p^\alpha}\right)\right| \le \sum_{k=0}^{\alpha} S_k,$$

$$S_k = \sum_{\substack{1\le x_r\le p^\alpha \\ p^k||\varphi_{s_1,\ldots,s_{r-1}}(x_r)}}\left|\sum_{x_1=1}^{p^\alpha}\cdots\sum_{x_r=1}^{p^\alpha}\exp\left(2\pi i\frac{f(x_1,\ldots,x_r)}{p^\alpha}\right)\right|$$

Из леммы 2 следует, что

$$\sum_{\substack{1\le x_r\le p^\alpha \\ p^k||\varphi_{s_1,\ldots,s_{r-1}}(x_r)}} 1 \le 5n^{2n}p^{\alpha-\frac{k}{n}}, \quad (1\le k\le\alpha).$$

По предложению индукции и из предыдущего неравенства имеем

$$S_k \le (5n^{2n})^{r-1}(\alpha+1)^{r-2}p^{(r-1)\alpha-\frac{\alpha-k}{n}}5n^{2n}P^{\alpha-\frac{k}{n}} \le$$
$$\le (5n^{2n})^{r}(\alpha+1)^{r-2}p^{r\alpha-\frac{\alpha}{n}}, \quad (0\le k\le \alpha).$$

Из этого и следует утверждение леммы 3.

Лемма 4. *Пусть $q=q_1\cdots q_k$ произведение положительных попарно простых чисел $q=q_sQ_s,\ 1\le s\le k$. Тогда имеем*

$$S\left(\frac{f(x_1,\ldots,x_r)}{q}\right)=S\left(\frac{Q_1^{-1}f(Q_1x_1,\ldots,Q_1x_r)}{q_1}\right)\ldots S\left(\frac{Q_k^{-1}f(Q_kx_1,\ldots,Q_kx_r)}{q_k}\right).$$

Доказательство. Если $y_{i,j},\ i=1,\ldots,r,\ j=1,\ldots,k,$ пробегает полную систему вычетов по $\mathrm{mod} q_i$ то

$$x_i=Q_1y_{i,1}+...+Q_ky_{i,k}, \quad (i=1,...,r)$$

пробегает полную систему вычетов по $\mathrm{mod} q$. Отсюда получаем, что $(a_{0,\ldots,0}=0)$

$$f(x_1,...,x_r)=\sum_{i=1}^{k}f(Q_iy_{1,i},...,Q_iy_{r,i}) \quad (mod q)$$

Из этого сравнения утверждение леммы следует тривиально.

Теорема 4. *Пусть коэффициенты многочлена $f(x_1,...,x_r)$ в совокупности просты с q, то есть*

$$(a_{0,\ldots,0,1},...,a_{n,\ldots,n},q)=1.$$

Тогда

$$\left|S\left(\frac{f(x_1,\ldots,x_r)}{q}\right)\right|\le (5n^{2n})^{r\nu(q)}(\tau(q))^{r-1}q^{r-\frac{1}{n}}$$

где $\nu(q)$ – количество различных простых чисел в разложении на простые множители q, $\tau(q)$ – количество делителей числа q.

Доказательство. Пусть $q=p_1^{\alpha_1}\cdots p_k^{\alpha_k}$ каноническое разложение на простые множители числа q. Тогда из мультипликативности $S\left(\frac{f(x_1,\ldots,x_r)}{q}\right)$ (лемма 4) и из оценки $S\left(\frac{f(x_1,\ldots,x_r)}{p^\alpha}\right)$ (лемма 3) имеем, что

$$\left|S\left(\frac{f(x_1,\ldots,x_r)}{q}\right)\right|\le (5n^{2n})^{r\nu(q)}(\tau(q))^{r-1}q^{r-\frac{1}{n}}.$$

Теорема 4 доказана.

Заметим, что $2^{\nu(q)}<c(\varepsilon)q^{\varepsilon},\ \tau(q)<c_1(\varepsilon)q^{\varepsilon},\ \varepsilon>0$ (леммы 4,5, главы 1, [1]). Подставим это в оценку $S\left(\frac{f(x_1,\ldots,x_r)}{q}\right)$ теоремы 4. Тогда справедливо следующее следствие.

Следствие. *При условиях теоремы 4 выполняется неравенство*

$$\left|S\left(\frac{f(x_1,\ldots,x_r)}{q}\right)\right| < c(n,r,\varepsilon)q^{r-\frac{1}{n}+\varepsilon}$$

где $\varepsilon > 0$ – сколь угодно малое число.

2.2 Оценки снизу

Покажем, что при растущем q и фиксированных n и r оценку теоремы 4 нельзя существенно улучшить.

Теорема 5. *Пусть $p \geq 3$ – простое число, m, n – натуральные числа, $n > 1$, $(n,p) = 1$, $\alpha = mn$, $(a,p) = 1$. Тогда*

$$S\left(\frac{ax_1^n\cdots x_r^n}{p^\alpha}\right) \geq \frac{m^{r-1}}{(r-1)!}\left(1-\frac{1}{p}\right)^{r-1} p^{r\alpha-m}.$$

Доказательство проведем по индукции. При $r = 1$ теорема верна ([2], стр.270). Предположим ее справедливость для $r-1$ – переменной. Докажем ее для r переменных. Запишем сумму $S\left(\frac{ax_1^n\cdots x_r^n}{p^\alpha}\right)$ в виде

$$S\left(\frac{ax_1^n\cdots x_r^n}{p^\alpha}\right) = \sum_{k=0}^{m-1} S_k + p^{r\alpha-m},$$

$$S_k = \sum_{x_1=1}^{p^\alpha}\cdots\sum_{x_{r-1}=1}^{p^\alpha}\sum_{\substack{p^k\|x_r\\1\leq x_r\leq p^\alpha}} \exp\left(2\pi i\frac{ax_1^n\cdots x_r^n}{p^\alpha}\right).$$

Из предположения индукции имеем

$$S_k \geq \varphi(p^{\alpha-k})p^{(r-1)kn}\frac{(m-k)^{r-2}}{(r-2)!}\left(1-\frac{1}{p}\right)^{r-2} p^{(\alpha-kn)(r-1)-m+k} =$$
$$= \frac{(m-k)^{r-2}}{(r-2)!}\left(1-\frac{1}{p}\right)^{r-1} p^{r\alpha-m}.$$

Отсюда следует, что

$$S\left(\frac{ax_1^n\cdots x_r^n}{p^\alpha}\right) \geq \left(1-\frac{1}{p}\right)^{r-1} p^{r\alpha-m}\sum_{k=0}^{m-1}\frac{(m-k)^{r-2}}{(r-2)!} \geq$$
$$\geq \frac{m^{r-1}}{(r-1)!}\left(1-\frac{1}{p}\right)^{r-1} p^{r\alpha-m}.$$

Теорема 5 доказана.

2.3 Об одном особом ряде

Ряд σ называется особым рядом рассматриваемой проблемы. Заметим, что он положителен, если сходится. На основе теоремы 4 установим сходимость σ.

Лемма 5. *Ряд σ сходится при $k > \dfrac{nM}{2}$.*

Доказательство. Соберем вместе в σ все члены, для которых $q_{t_1,\ldots,t_r}$, $0 \leq t_1,\ldots,t_r \leq n$ имеют одинаковое наименьшее общее кратное, равное Q. Тогда получим (следствие теоремы 4)

$$\sigma \ll \sum_{Q=1}^{\infty} \sigma(Q) Q^{(-\frac{1}{n}+\varepsilon)2k}$$

где

$$\sigma(Q) = \sum_{q} \prod_{0\leq t_1,\ldots,t_r\leq n}{}' q_{t_1,\ldots,t_r},$$

$\sum\limits_{q}$ означает, что суммирование ведется по $q_{t_1,\ldots,t_r}$ $(0 \leq t_1,\ldots,t_r \leq n,\ t_1+\cdots+t_r \geq 1)$, имеющим Q общим наименьшим кратным, $\prod\limits_{0\leq t_1,\ldots,t_r\leq n}$ означает, что в указанном произведении не рассматривается $t_1=\cdots=t_r=0$, $\dfrac{1}{3n^2M} > \varepsilon > 0$ – любое сколь угодно малое фиксированное число.

Так как $q_{t_1,\ldots,t_r} \leq Q$, $q_{t_1,\ldots,t_r} \,|\, Q$, то

$$\sigma(Q) \leq Q^{M-1}(\tau(Q))^{M-1} \leq c(\varepsilon) Q^{(1+\varepsilon)(M-1)}.$$

Из этой оценки для $\sigma(Q)$ следует, что при выполнении условия

$$(1+\varepsilon)(M-1) + \left(-\frac{1}{n}+\varepsilon\right)2k < -1$$

ряд σ сходится. Так как $\dfrac{1}{3n^2M} > \varepsilon > 0$, то предыдущее неравенство выполняется при $k > \dfrac{1}{2}nM$.

Лемма 5 доказана.

3 Оценка кратной тригонометрической суммы Г. Вейля

Результаты этой главы получены автором совместно с А. А. Карацубой и Г. И. Архиповым и помещены здесь для полноты изложения. В работах [8], [11] доказаны леммы "о кратности пересечения областей" в случае многочленов от двух переменных. В §1 они обобщаются на полиномы любой кратности (леммы 1,2).

При этом, мы следуем идее И. М. Виноградова о сведении задача о числе решений системы нелинейных диофантовых неравенств к аналогичному вопросу относительно системы линейных неравенств (ср.[1], глава IV, лемма 7).

В теореме 6 дана общая оценка сверху модуля кратной тригонометрической суммы Г. Вейля в зависимости от приближения коэффициентов полинома рациональной дробью (ср.[1], теорема 3, глава IV).

Эта теорема может быть обобщена на кратные тригонометрические суммы, у которых длины интервалов суммирования почти одинаковы (то есть отношение длины интервала суммирования по одной переменной к длине интервала по другой не превосходит некоторой постоянной).

3.1 Общие леммы

Для дальнейших исследований определим функции $B_{u_1,\dots,u_r}, A^{(s)}_{u_1,\dots,u_r}$,

$$\begin{aligned}
&f(x_1+y_1,\dots,x_r+y_r)-f(x_1+z_1,\dots,x_r+z_r)=\\
&=\sum_{t_1=0}^{n}\dots\sum_{t_r=0}^{n}\alpha_{t_1,\dots,t_r}\left((x_1+y_1)^{t_1}\cdots(x_r+y_r)^{t_r}-(x_1+z_1)^{t_1}\dots(x_r+z_r)^{t_r}\right)=\\
&=\sum_{k_1=0}^{n}\cdots\sum_{k_r=0}^{n}x_1^{u_1}\cdots x_r^{u_r}B_{u_1,\dots u_r},
\end{aligned}$$

$$B_{u_1,\dots,u_r}=\sum_{t_1=u_1}^{n}\cdots\sum_{t_r=u_r}^{n}\alpha_{t_1,\dots,t_r}C_{t_1}^{u_1}\cdots C_{t_1}^{u_r}\left(y_1^{t_1-u_1}\cdots y_r^{t_r-u_r}-z_1^{t_1-u_1}\cdots z_r^{t_r-u_r}\right),$$

$$\begin{aligned}
A^{(s)}_{u_1,\dots,u_r}=&\sum_{\substack{t_1=u_1\\ t_1+\dots+t_r=s+k_1+\dots+k_r}}^{n}\cdots\sum_{t_r=u_r}^{n}\alpha_{t_1,\dots,t_r}C_{t_1}^{u_1}\cdots C_{t_1}^{u_r}\times\\
&\times\left(y_1^{t_1-u_1}\cdots y_r^{t_r-u_r}-z_1^{t_1-u_1}\cdots z_r^{t_r-u_r}\right).
\end{aligned}$$

Лемма 1. *Справедливо следующее равенство*

$$A^{(s)}_{u_1,\dots,u_r}=\frac{1}{u_1!\dots u_r!s!}\sum_{\substack{v_1=u_1\\ v_1+\dots+v_r=s-1+u_1+\dots+u_r}}^{n}\cdots\sum_{v_r=u_r}^{n}v_1!\dots v_r!H^{(u_1,\dots,u_r,s)}_{v_1,\dots,v_r}A^{(1)}_{v_1,\dots,v_r},$$

причем коэффициенты полинома $H^{(u_1\cdots u_r,s)}_{v_1\cdots v_r}$ целочисленны, неотрицательны и их сумма не превосходит sr^{s-1}.

Доказательство. Определим производящую функцию

$$g(W_1,...,W_r) = \sum_{\substack{v_1=u_1 \\ v_1+...+v_r=s-1+u_1+...+u_r}}^{n} \cdots \sum_{v_r=u_r}^{n} H^{(u_1,...,u_r,s)}_{v_1,...,v_r} W_1^{v_1}\cdots W_r^{v_r} =$$

$$= W_1^{u_1}\cdots W_r^{u_r}\frac{(y_1W_1+...+y_rW_r)^s-(z_1W_1+...+z_rW_r)^s}{(y_1W_1+...+y_rW_r)-(z_1W_1+...+z_rW_r)}.$$

Отсюда следует, что

$$g(W_1,...,W_r)\,((y_1-z_1)W_1+\cdots+(y_r-z_r)\,W_r =$$

$$= \sum_{\substack{v_1=u_1 \\ v_1+...+v_r=s-1+u_1+...+u_r}}^{n} \cdots \sum_{v_r=u_r}^{n} H^{(u_1,...,u_r,s)}_{v_1,...,v_r} W_1^{v_1}\ldots W_r^{v_r}\,((y_1-z_1)W_1+\ldots+(y_r-z_r) =$$

$$= \sum_{\substack{v_1=u_1 \\ v_1+...+v_r=s-1+u_1+...+u_r}}^{n} \cdots \sum_{v_r=u_r}^{n} W_1^{v_1}\ldots W_r^{v_r}\cdot\left(\sum_{j=1}^{r}(y_j-z_j)H^{(u_1,...u_r,s)}_{v_1,...,v_j-1,...,v_r}\right) =$$

$$= W_1^{u_1}\ldots W_r^{u_r}(y_1W_1+...+y_rW_r)^s-(z_1W_1+...+z_rW_r)^s =$$

$$= \sum_{\substack{v_1=u_1 \\ v_1+...+v_r=s-1+u_1+...+u_r}}^{n} \cdots \sum_{v_r=u_r}^{n} W_1^{v_1}\ldots W_r^{v_r}(y_1^{v_1-u_1}\ldots y_r^{v_r-u_r}-z_1^{v_1-u_1}\ldots z_r^{v_r-u_r})\times$$

$$\times\frac{s!}{(v_1-u_1)!\cdots(v_r-u_r)!}.$$

Приравняем коэффициенты при $W_1^{v_1}\ldots W_r^{v_r}$. Получим

$$\frac{s!}{(v_1-u_1)!\ldots(v_r-u_r)!}(y_1^{v_1-u_1}\ldots y_r^{v_r-u_r}-z_1^{v_1-u_1}\ldots z_r^{v_r-u_r}) =$$

$$= \sum_{j-1}^{r}(y_j-z_j)H^{(u_1,...,u_r,s)}_{v_1,...,v_j-1,...,v_r}.$$

Из определения $A_{u_1,...,u_r}$ и из полученного равенства имеем

$$A^{(s)}_{u_1,...,u_r} = \sum_{\substack{v_1=u_1 \\ v_1+...+v_r=s+u_1+...+u_r}}^{n} \cdots \sum_{v_r=u_r}^{n} \frac{1}{s!}\cdot\frac{v_1!}{u_1!}\cdots\frac{v_r!}{u_r!}\cdot\alpha_{v_1,...,v_r}\times$$

$$\times\frac{s!}{(v_1-u_1)!\ldots(v_r-u_r)!}(y_1^{v_1-u_1}\ldots y_r^{v_r-u_r}-z_1^{v_1-u_1}\ldots z_r^{v_r-u_r}) =$$

$$= \frac{1}{u_1!\ldots u_r!s!}\sum_{\substack{v_1=u_1 \\ v_1+...+v_r=s+u_1+...+u_r}}^{n} \cdots \sum_{v_r=u_r}^{n} v_1!\ldots v_r!\alpha_{v_1,...,v_r}\times$$

$$\times\left(\sum_{j=1}^{r}H^{(u_1,...,u_r,s)}_{v_1,...,v_j-1,...,v_r}(y_j-z_j)\right) =$$

$$= \frac{1}{u_1!\dots u_r!s!} \sum_{\substack{v_1=u_1 \\ v_1+\ldots+v_r=s+u_1+\ldots+u_r}}^{n} \cdots \sum_{v_r=u_r}^{n} v_1!\dots v_r! H^{(u_1,\ldots,u_r,s)}_{v_1,\ldots,v_j-1,\ldots,v_r} \times$$
$$\times \left(\sum_{j=1}^{r} (v_j+1)(y_j-z_j)\alpha_{v_1,\ldots,v_j+1,\ldots,v_r} \right) =$$
$$= \frac{1}{u_1!\dots u_r!s!} \sum_{\substack{v_1=u_1 \\ v_1+\ldots+v_r=s-1+u_1+\ldots+u_r}}^{n} \cdots \sum_{v_r=u_r}^{n} v_1!\dots v_r! H^{(u_1,\ldots,u_r,s)}_{v_1,\ldots,v_r} A^{(r)}_{v_1,\ldots,v_r}.$$

Таким образом лемма 1 доказана.

Лемма 2. *Пусть*

$$|B_{u_1,\ldots,u_r}| < P^{-(u_1+\ldots+u_r)}, \quad (0 \le u_1,\ldots,u_r \le n), \tag{9}$$

причем переменные $y_1,\ldots,y_r,z_1,\ldots,z_r$ *изменяются в интервале от* 1 *до* $Y \le P$.

Тогда количество целочисленных наборов $(y_1,...,y_r)$, *удовлетворяющих неравенствам (9) при любых фиксированных значениях переменных* $z_1,...,z_r$, *не превосходит количества решений системы неравенств:*

$$\left\| \frac{(rn)!}{(u_1+...+u_r+1)!} \cdot \frac{(rn+1)!}{(u_1+...+u_r+2)!} \cdot A^{(1)}_{u_1,\ldots,u_r} \right\| \le$$
$$\le \frac{(rn)!}{(u_1+...+u_r+1)!} \frac{(rn+1)!}{(u_1+...+u_r+2)!} (4r^2n^2)^{rn-u_1-\ldots-u_r-1} P^{-(u_1+\ldots+u_r)},$$
$$(0 \le u_1,\ldots,u_r \le n, \quad 1 \le u_1+\ldots,u_r \le rn-1).$$

Доказательство проведем индукцией по величине суммы $\sum_{j=1}^{r} u_j$ Лемма верна при $\sum_{j=1}^{r} u_j = rn-1$ Действительно,

$$B_{n,\ldots,n-1,\ldots,n} = A^{(1)}_{n,\ldots,n-1,\ldots,n} = n\alpha_{n,\ldots,n}(y_k-z_k),$$
$$|B_{n,\ldots,n-1,\ldots,n}| < P^{-rn+1},$$

где $n-1$ в выражении $B_{n,\ldots,n-1,\ldots,n}$ и $A^{(1)}_{n,\ldots,n-1,\ldots,n}$ стоит на k – том месте. Предположим, что лемма справедлива при всех $u_1,\ldots,u_r$, удовлетворяющих неравенству

$$\sum_{j=1}^{r} u_j \ge s+1.$$

Докажем ее для всех $u_1,\ldots,u_r$ для которых выполнено равенство

$$u_1+\ldots+u_r = s$$

Из леммы 1 следует, что

$$B_{u_1,\dots,u_r} = \sum_{s=1}^{rn-u_1-\ldots-u_r} A^{(s)}_{u_1,\dots,u_r} =$$
$$= \sum_{s=1}^{rn-u_1-\ldots-u_r} \sum_{\substack{v_1=u_1 \\ v_1+\ldots+v_r=s-1+u_1+\ldots+u_r}}^{n} \cdots \sum_{v_r=u_r}^{n} \frac{v_1!\dots v_s!}{u_1!\dots u_r!s!} H^{(u_1,\dots,u_r,s)}_{v_1,\dots,v_r} A^{(1)}_{v_1,\dots,v_r}.$$

Домножим обе части равенства на

$$\frac{(rn!)}{(u_1+\ldots+u_r+1)} \cdot \frac{(rn+1)!}{(u_1+\ldots+u_r+2)!}$$

Получим

$$\begin{gathered}\frac{(rn!)}{(u_1+\ldots+u_r+1)} \cdot \frac{(rn+1)!}{(u_1+\ldots+u_r+2)!} A^{(1)}_{u_1,\dots,u_r} = \\ = \frac{(rn)!}{(u_1+\ldots+u_r+1)} \cdot \frac{(rn+1)!}{(u_1+\ldots+u_r+2)!} B_{u_1,\dots,u_r} - \\ - \sum_{s=2}^{rn-u_1-\ldots-u_r} \sum_{\substack{v_1=u_1 \\ v_1+\ldots+v_r=s-1+u_1+\ldots+u_r}}^{n} \cdots \sum_{v_r=u_r}^{n} \frac{v_1!\dots v_s!}{u_1!\dots u_r!} \times \\ \times \frac{(v_1+\ldots+v_r+2)!}{s!(u_1+\ldots+u_r+1)!} \frac{(v_1+\ldots+v_r+1)!}{(u_1+\ldots+u_r+2)!} \times \\ \times H^{(u_1,\dots,u_r,s)}_{v_1,\dots,v_r} \frac{(rn!)}{(v_1+\ldots+v_r+1)} \frac{(rn+1)!}{(v_1+\ldots+v_r+2)!} A^{(1)}_{v_1,\dots,v_r};\end{gathered} \tag{10}$$

Коэффициенты, которые находятся при

$$\frac{(rn)!}{(v_1+\ldots+v_r+1)!} \quad \frac{(rn+1)!}{(v_1+\ldots+v_r+2)!} A^{(1)}_{v_1,\dots,v_r}$$

будут целыми числами, так как

$$\frac{(v_1+\ldots+v_r+2)!}{s!(u_1+\ldots+u_r+1)}, \quad \frac{(v_1+\ldots+v_r+1)!}{(u_1+\ldots+u_r+2)!}, \quad \frac{v_1!\dots v_r!}{u_1!\dots u_r!},$$

в силу условий

$$v_1+\ldots+v_r+2 = s+u_1+\ldots+u_r+1, \quad s>1;$$
$$u_j \le v_j \le n, \quad j=1,\dots r.$$

будут целыми числами.

Поэтому выражение (10) можно заменить числом сравнимым с ним по$mod 1$:

$$\begin{aligned}
&\left\|\frac{(rn)!}{(u_1+\ldots u_r+1)!}\cdot\frac{(rn+1)!}{(u_1+\ldots+u_r+2)!}\quad A^{(1)}_{u_1,\ldots u_r}\right\|\le\\
&\le\frac{(rn)!}{(u_1+\ldots,u_r+1)!}\cdot\frac{(rn+1)!}{(u_1+\ldots+u_r+2)!}\quad P^{-(u_1+\ldots+u_r)}+\\
&+\sum_{s=2}^{rn-u_1-\ldots-u_r}\quad\sum_{\substack{v_1=u_1\\ v_1+\ldots+v_r=s-1+u_1+\ldots+u_r}}^{n}\cdots\sum_{v_r=u_r}^{n}\quad\frac{v_1!\ldots v_s!}{u_1!\ldots u_r!}\times\\
&\times\frac{(v_1+\ldots+v_r+2)!}{s!(u_1+\ldots+u_r+1)!}\cdot\frac{(v_1+\ldots+v_r+1)!}{(u_1+\ldots+u_r+2)!}\times\\
&\times sr^{s-1}P^{s-1}\frac{(rn)!}{(u_1+\ldots,u_r+1)!}\cdot\frac{(rn+1)!}{(u_1+\ldots+u_r+2)!}\times\\
&\times(4r^2n^2)^{rn-v_1-\ldots-v_r-1}P^{-(v_1+\ldots+v_r)}.
\end{aligned}$$

Воспользуемся тем, что

$$\begin{aligned}
&\frac{v_1!\ldots v_r!}{u_1!\ldots u_r!}\le n^{s-1},\quad v_1+\ldots+v_s=s-1+u_1+\ldots+u_r,\\
&u_j\le v_j\le n,\quad j=1,\ldots,r;
\end{aligned}$$

$$\sum_{\substack{v_1=u_1\\ v_1+\ldots+v_r=s-1+u_1+\ldots+u_r}}^{n}\cdots\sum_{v_r=u_r}^{n}\quad 1\le C_{s+r-2}^{s-1}\le(2rn)^{s-1}.$$

Получим

$$\begin{aligned}
&\left\|\frac{(rn)!}{(u_1+\ldots+u_r+1)!}\quad\frac{(rn+1)!}{(u_1+\ldots+u_r+2)!}\quad A^{(1)}_{u_1,\ldots u_r}\right\|\le\\
&\le\frac{(rn)!}{(u_1+\ldots+u_r+1)!}\quad\frac{(rn+1)!}{(u_1+\ldots+u_r+2)!}(4r^2n^2)^{rn-u_1-\ldots-u_r-1}\times\\
&\times P^{-(u_1+\ldots+u_r)}\left((4r^2n^2)^{-rn+u_1+\ldots+u_r+1}+\sum_{s=2}^{rn-u_1-\ldots-u_r}\frac{1}{(s-1)!}\left(\frac{1}{2}\right)^{s-1}\right)\le\\
&\le\frac{(rn)!}{(u_1+\ldots+u_r+1)!}\quad\frac{(rn+1)!}{(u_1+\ldots+u_r+2)!}(4r^2n^2)^{rn-u_1-\ldots-u_r-1}P^{-(u_1+\ldots+u_r)}\times\\
&\left(e^{\frac{1}{2}}-1+\frac{1}{16}\right)\le\\
&\le\frac{(rn)!}{(u_1+\ldots+u_r+1)!}\quad\frac{(rn+1)!}{(u_1+\ldots+u_r+2)!}(4r^2n^2)^{rn-u_1-\ldots-u_r-1}P^{-(u_1+\ldots+u_r)}.
\end{aligned}$$

Лемма 2 доказана.

Следующая лемма есть незначительное видоизменение леммы 8 гл.IV книги И. М. Виноградова [1].

Лемма 3. *Пусть m – целое положительное, λ, β – вещественные числа,*

$$\Phi(y) = m\frac{ay+\lambda y}{q} + \beta; \quad (a,q) = 1, \quad q > 0,$$

причем y пробегает $\le Y$ последовательных целых чисел. Тогда при $V \ge 0$ число значений y с условием

$$\|\Phi(y)\| \le Vq^{-1}$$

не превосходит

$$\begin{aligned} &\lambda Ym + m + 2V, \quad \text{если} \quad Y \le q, \\ &(\lambda Ym + m + 2V)\frac{2Y}{q}, \quad \text{если} \quad Y > q. \end{aligned}$$

Лемма 4. *Пусть $P \ge (50r^4n^4)^{2rn}$, $\tau_{t_1,\dots,t_r} = P^{t_1+\dots+t_r-\frac{1}{2r}}$,*

$$\alpha_{t_1,\dots,t_r} = \frac{a_{t_1,\dots,t_r}}{q_{t_1,\dots,t_r}} + \frac{\theta_{t_1,\dots,t_r}}{q_{t_1,\dots,t_r}\tau_{t_1,\dots,t_r}}, \quad |\theta_{t_1,\dots,t_r}| \le 1,$$

$$\begin{aligned} &(a_{t_1,\dots,t_r}, q_{t_1,\dots,t_r}) = 1, \quad 0 < q_{t_1,\dots,t_r} \le \tau_{t_1,\dots,t_r}, \\ &(0 \le t_1,\dots,t_r \le n,\ 2 \le t_1,\dots,t_r), \end{aligned}$$

Q_0 – общее наименьшее кратное $q_{t_1,\dots,t_r}$

$$(0 \le t_1,\dots,t_r \le n, \quad 2 \le t_1+,\dots,+t_r),$$

$$f(x_1+y_1,\dots,x_r+y_r) - f(x_1,\dots,x_r) = \sum_{t_1=0}^{n}\dots\sum_{t_r=0}^{n} B_{t_1,\dots,t_r}x_1^{t_1}\dots x_r^{t_r}.$$

Кроме того, пусть $E(y_1,\dots,y_r)$ – область задаваемая условиями

$$\begin{aligned} &|\gamma_{t_1,\dots,t_r} - B_{t_1,\dots,t_r}| < P^{-(t_1+\dots+t_r)} \\ &(0 \le t_1,\dots,t_r \le n,\ 1 \le t_1+\dots+t_r \le rn-1), \end{aligned}$$

и пусть G обозначает количество областей $E(y_1,\dots,y_r)$, $1 \le y_1,\dots,y_r \le Y \le P$, пересекающихся с произвольной фиксированной областью $E(z_1,\dots,z_r)$. Тогда при

$$Q_0 > P^{\frac{1}{2r}-\frac{1}{10M}}$$

справедливо неравенство

$$G \le (8r^4n^4)^{2rn}Y^{r-1}P^{1-\frac{1}{2r}+\frac{1}{10M}}.$$

Доказательство. Рассмотрим два случая:

а) при $0 \le t_1, \dots, t_r \le n,\ 2 \le t_1 + \dots + t_r$ найдется $(t_1, \dots, t_r)$, что

$$q_{t_1,\dots,t_r} \ge P^{\frac{1}{2r} - \frac{1}{10M}}.$$

(Без ограничения общности можно считать, что $t_1 > 0$)

б) для всех $0 \le t_1, \dots, t_r \le n,\ 2 \le t_1 + \dots + t_r$ количество $q_{t_1,\dots,t_r}$ удовлетворяют неравенствам

$$q_{t_1,\dots,t_r} < P^{\frac{1}{2r} - \frac{1}{10M}}.$$

Докажем сначала лемму для случая а). По лемме 2 имеем, что G не превосходит числа решений диофантова неравенства, когда переменные $u_1, \dots y_r$ изменяются от 1 до $Y \le P$:

$$\left\| \frac{(rn)!}{(t_1, \dots, t_r)!} \cdot \frac{(rn+1)!}{(t_1 + \dots + t_r + 1)!} A^{(1)}_{t_1-1,\dots,t_r} \right\| \le$$

$$\frac{(rn)!}{(t_1, \dots, t_r)!} \cdot \frac{(rn+1)!}{(t_1, \dots, t_r + 1)!} (4r^2n^2)^{rn - t_1 - \dots - t_r} P^{-(t_1,\dots,t_r - 1)}.$$

Применим лемму 3 при фиксированных значениях переменных $y_1, \dots, y_r$. Получим

$$\begin{aligned} G < \Bigg(&\frac{(rn)!}{(t_1, \dots, t_r)!} \cdot \frac{(rn+1)!}{(t_1 + \dots + t_r + 1)!} t_1 P^{-(t_1,\dots,t_r) + \frac{1}{2r}} Y + 1 + \\ &+ 2q_{t_1,\dots,t_r} \frac{(rn)!}{(t_1, \dots, t_r)!} \cdot \frac{(rn+1)!}{(t_1, \dots, t_r + 1)!} (4r^2n^2)^{rn - t_1 - \dots - t_r} P^{-(t_1,\dots,t_r - 1)} \Bigg) \times \\ &\times (Y q_{t_1,\dots,t_r} + 1) \le (8r^4n^4)^{2rn} Y^{r-1} P^{1 - \frac{1}{2r} + \frac{1}{10M}}. \end{aligned}$$

Перейдем к случаю б). Пусть

$$\begin{aligned} &Q_{u_1,\dots u_r} = O.H.K.(q_{u_1+1,\dots,u_r}, q_{u_1,u_2+1,\dots,u_r} \dots, q_{u_1,u_2,\dots,u_r+1}) \\ &(0 \le u_1, \dots, u_r \le n, 1 \le u_1 + \dots + u_r \le rn - 1). \end{aligned}$$

Так как

$$\begin{aligned} &\frac{(rn)!}{(u_1 + \dots + u_r + 1)!} \cdot \frac{(rn+1)!}{(u_1 + \dots + u_r + 2)!} (4r^2n^2)^{rn - u_1 - \dots - u_r - 1} P^{-(u_1 + \dots + u_r)} \times \\ &\times Q_{u_1,\dots u_r} < \frac{1}{10}, \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} &\frac{(rn)!}{(u_1 + \dots + u_r + 1)!} \cdot \frac{(rn+1)!}{(u_1 + \dots + u_r + 2)!} \Big((u_1 + 1) Y \tau^{-1}_{u_1+1,\dots u_r} Q_{u_1,\dots,u_r} \times \\ &\times q^{-1}_{u_1+1,\dots,u_r} + (u_r + 1) Y \tau^{-1}_{u_1,\dots,u_r+1} Q_{u_1,\dots,u_r+1} q^{-1}_{u_1,\dots,u_r+1} < \frac{1}{10}, \end{aligned}$$

то по лемме 2 имеем, что

$$\frac{(rn)!}{(u_1+\ldots+u_r+1)!}\frac{(rn+1)!}{(u_1+\ldots+u_r+2)!}\times \\ \times\left(\frac{(u_1+1)a_{u_1+1,\ldots u_r}y_1}{q_{u_1+1,\ldots u_r}}+\ldots+\frac{(u_r+1)a_{u_1,\ldots u_r+1}y_r}{q_{u_1,\ldots u_r+1}}\right) \tag{11}$$

будет целым числом. Пусть каноническое разложение на простые множители числа таково

$$Q_0=p_1^{\alpha_1}\ldots p_s^{\alpha_s}=Q_kp_k^{\alpha_k}\quad (k=1,\ldots,s).$$

Тогда найдутся такие номера $(u_1^{(k)},\ldots,u_r^{(k)})$, что

$$p_k^{\alpha_k}\mid Q_{u_1^{(k)},\ldots,u_r^{(k)}},\quad p_k^{\alpha_k+1}\nmid Q_{u_1^{(k)},\ldots,u_r^{(k)}},\quad p_k^{\alpha_k}\parallel q_{u_1^{(k)}+1,\ldots,u_r^{(k)}}.$$

Так как (11) – целое число, то G не превосходит количества решений системы сравнений при некоторых

$$b_{u_1^{(k)}+1,\ldots,u_r^{(k)}},\ldots,b_{u_1^{(k)}+,\ldots,u_r^{(k)}+1},\qquad (b_{u_1^{(k)}+1,\ldots,u_r^{(k)}},\ldots b_{u_1^{(k)},\ldots,u_r^{(k)}+1})=1:$$

$$\frac{(rn)!}{(u_1^{(k)}+\ldots+u_r^{(k)}+1)!}\frac{(rn+1)!}{(u_1^{(k)}+\ldots+u_r^{(k)}+2)!}((u_1^{(k)}+1)b_{u_1^{(k)}+1,\ldots,u_r^{(k)}}y_1+\ldots+ \\ +(u_r^{(k)}+1)b_{u_1^{(k)},\ldots,u_r^{(k)}+1}y_r)\equiv 0\pmod{Q_{u_r^k,\ldots,u_r^{(k)}}}, \tag{12}$$

$$k=1,\ldots,s;\quad 1\le y_1,\ldots,y_r\le Y.$$

Если $Y\le Q_0$, то y_1 можно единственным способом записать в виде

$$y_1=Q_1y_{1,1}+\ldots+Q_sy_{1,s},\quad 0<y_{1,k}\le p_k^{\alpha_k},\quad k=1,\ldots,s.$$

Тогда число решений (12) не превосходит числа решений следующий системы

$$\frac{(rn)!}{(u_1^{(k)}+\ldots+u_r^{(k)}+1)!}\frac{(rn+1)!}{(u_1^{(k)}+\ldots+u_r^{(k)}+2)!}((u_1^k+1)d_{u_1^{(k)}+1,\ldots,u_r^{(k)}}y_{1,k}+\ldots+ \\ (u_r^k+1)d_{u_1^{(k)},\ldots,u_r^{(k)}+1}y_r)\equiv 0\pmod{p_k^{\alpha_k}}, \tag{13}$$

при некоторых $d_{u_1^{(k)}+1,\ldots,u_r^{(k)}},\ldots,d_{u_1^{(k)},\ldots,u_r^{(k)}+1}$

$$\left(d_{u_1^{(k)}+1,\ldots,u_r^{(k)}},\ldots,d_{u_1^{(k)},\ldots,u_r^{(k)}+1}\right)=1.$$

В силу выбора $(u_1^{(k)},\ldots,u_r^{(k)})$, имеем

$$(d_{u_1^{(k)}+1,\ldots,u_r^{(k)}},p_k)=1.$$

Определим β_k следующим образом

$$p_k^{\beta_k}\Big|\Big|\frac{(rn)!}{(u_1^{(k)}+\ldots+u_r^{(k)}+1)!}\frac{(rn+1)!}{(u_1^{(k)}+\ldots+u_r^{(k)}+2)!}(u_1^k+1).$$

Тогда число решений k- того сравнения не превосходит количества наборов $(y_{1,k},y_2,\ldots,y_r)$, причем $y_{1,k}$ принимает не более $p_k^{\beta_k}$ значений, а остальные $y_2,\ldots,y_r$ принимают любые значения, определяемые условиями $1\le y_2,\ldots,y_r\le Y$. Отсюда следует, что

$$G\le p_1^{\beta_1}\ldots p_s^{\beta_s}Y^{r-1}\le (rn)!(rn+1)!n!Y^{r-1}.$$

В случае $Y>Q_0$ имеем, что

$$G\le (rn)!(rn+1)!n!Q_0^{r-1}\left(\frac{Y}{Q_0}+1\right)^r.$$

Оценка для G в случае б) получена.

Тем самым, лемма 4 доказана

Для дальнейших исследований нам будет необходима теорема о среднем значении модуля кратной тригонометрической суммы. Эта теорема обобщает известную теорему И. М. Виноградова. Доказательство ее проводится по p-адической схеме А. А. Карацубы (см. совместную статью Г. И. Архипова и автора [13]). Приведем формулировку этой теоремы.

Лемма 5. *Пусть $\tau\ge 0$ –целое, $P\ge 1$ – целое,*

$$k_\tau=M(\tau+r),\quad u_\tau=\min(\tau,rn).$$

Тогда при любом $k\ge k_\tau$ имеет место оценка

$$\int_E|S(A)|^{2k}dA\le k^{rnM+M\tau}3^{3r^2nM\tau}(nr)^{3rnMu_\tau}P^{2kr-\frac{rnM}{2}+\delta_\tau},$$

где

$$\delta_\tau=\frac{rnM}{2}\left(1-\frac{1}{rn}\right)\tau.$$

Лемма 6. *Пусть $f(x_1,\ldots,x_r)$ вещественная дифференцируемая функция при $A_j\le x_j\le B_j$, $j=1,\ldots,r$, $\max\limits_j(B_j-A_j)=P$. Причем $\left(\dfrac{\partial f(x_1,\ldots,x_r)}{\partial x_j}\right)$ кусочно монотонна и знакопостоянна при $A_j<x_j<B_j$ и любых фиксированных значениях остальных переменных и пусть при $0<\delta<1$*

$$\left|\frac{\partial f(x_1,\ldots,x_r)}{\partial x_j}\right|\le\delta,\quad j=1,\ldots,r.$$

Тогда имеем

$$\sum_{A_1\le x_1\le B_1}\dots\sum_{A_r\le x_r\le B_r}\exp(2\pi i f(x_1,\dots,x_r))=$$
$$=\int_{A_1}^{B_1}\dots\int_{A_r}^{B_r}\exp(2\pi i f(x_1,\dots,x_r))dx_1\dots dx_r+O\left(\frac{P^{r-1}}{1-\delta}\right).$$

Доказательство этой леммы получается применением леммы Ван-дер Корпута ([1], гл.II, лемма 3) по одной переменной при фиксированных остальных переменных.

3.2 Оценка кратной тригонометрической суммы Г. Вейля

Данный параграф посвящен доказательству оценки сверху модуля кратной тригонометрической суммы (теорема 6). Существенную роль при выводе ее играет теорема о среднем значении модуля кратной тригонометрической суммы (лемма 5) (см.[13]).

Аналогично тому, как И. М. Виноградов [1] разбивает единичный n - мерный куб $(\alpha_n,\dots,\alpha_1)$ на точки первого и второго класса и для тригонометрической суммы с многочленом $f(x)=\alpha_n x^n+\dots+\alpha_1 x$ получает оценку в зависимости от рациональных приближений коэффициентов полинома, мы разбиваем единичный M-мерный куб. Точками первого класса мы называем те точки, которые находятся в малых окрестностях точки с рациональными координатами, имеющими наименьшее общее кратное знаменателей этих координат, не превосходящие $P^{\frac{1}{M}}$. Остальные точки называем точками второго класса. Для всех точек второго класса мы получаем единообразную оценку.

$$|S(A)|\le c(n,r)P^{r-\rho},$$

где

$$\rho=\frac{1}{50Mr^2n\log(4r^2nM)}.$$

Из теоремы о среднем следует, что оценка $|S(A)|$ с противоположным неравенством выполняется на некоторой области единичного M – мерного куба, имеющей малый объем. С другой стороны, с помощью сдвигов интервалов суммирования, удается построить достаточно много сумм с почти одинаковой величиной их модуля. Из соображений непрерывности модуль таких сумм будет почти одинаков и в некоторых окрестностях точек единичного M – мерного куба. Этот объем при соответствующем выборе оценки $|S(A)|$ превосходит тот, который получается из теоремы о среднем. Такова схема доказательства оценки для точек второго класса. Чтобы показать, что с помощью сдвигов получится много различных сумм нам необходимы леммы "о кратности пересечения областей" (леммы 2, 4).

Для точек 1 класса с помощью леммы 6 задача об оценке суммы сводится к оценке кратного тригонометрического интеграла и кратной рациональной тригонометрической суммы (см. главы 1 и II). Полученная оценка кратной тригонометрической суммы для точек первого класса на рассматриваемом классе A полиномов неулучшаема в смысле порядка роста величины P (см. теоремы 3 и 5).

Перейдем к формулировке и доказательству теоремы 6.

Теорема 6. *Пусть*

$$\alpha_{t_1,\dots,t_r} = \frac{q_{t_1,\dots,t_r}}{q_{t_1,\dots,t_r}} + z_{t_1,\dots,t_r}, \quad (a_{t_1,\dots,t_r}, q_{t_1,\dots,t_r}) = 1, \quad (0 \le t_1, \dots, t_r \le n)$$

и пусть Q – общее наименьшее кратное натуральных чисел $q_{t_1,\dots,t_r}$ с условием $t_1+\dots+t_r \ge 1,\ 0 \le t_1, \dots, t_r \le n$. Точкой первого класса назовем точку $\alpha_{t_1,\dots,t_r}$, если

$$Q < P^{\frac{1}{M}}, \quad |z_{t_1,\dots,t_r}| < P^{-(t_1+\dots+t_r)+\frac{1}{M}}.$$

Остальные точки назовем точками второго класса. Тогда для точек второго класса имеем

$$|S(A)| \ll P^{r-\rho}$$

где

$$\rho = \frac{1}{50Mr^2 n \log(4r^2 nM)}$$

а для точек первого класса

$$|S(A)| \ll P^r Q^{-\frac{1}{n}+\varepsilon}$$

где $\varepsilon > 0$ – любое сколь угодно малое число, а если положить

$$\delta_{t_1,\dots,t_r} = z_{t_1,\dots,t_r} P^{t_1+\dots+t_r}, \quad \delta = \max_{0 \le t_1,\dots,t_r \le n} |\delta_{t_1,\dots,t_r}|,$$

то

$$|S(A)| \ll P^r Q^{-\frac{1}{n}+\varepsilon} \delta^{-\frac{1}{n}} (\ln(\delta+1)+1)^{r-1}, \quad \delta \le 1.$$

Доказательство. Рассмотрим точку первого класса. Пусть

$$x_j = Q\xi_j + \eta_j, \quad 1 \le \eta_j \le Q, \quad -\frac{\eta_j}{Q} < \xi_j \le \frac{P-\eta_j}{Q}, \quad j = 1, \dots, r.$$

Тогда

$$S(A) = \sum_{\eta_1=1}^{Q} \cdots \sum_{\eta_r=1}^{Q} \exp\left(2\pi i \sum_{t_1=0}^{n} \cdots \sum_{t_r=0}^{n} \frac{a_{t_1,\dots,t_r}}{q_{t_1,\dots,t_r}} \eta_1^{t_1} \cdots \eta_r^{t_r}\right) W_{\eta_1,\dots,\eta_r},$$

$$W_{\eta_1,\dots,\eta_r} = \sum_{\xi_1} \cdots \sum_{\xi_r} \exp\left(2\pi i \sum_{t_1=0}^{n} \cdots \sum_{t_r=0}^{n} z_{t_1,\dots,t_r} (Q\xi_1+\eta_1)^{t_1}, \cdots, (Q\xi_r+\eta_r)^{t_r}\right).$$

Без ограничения общности рассуждений можно предположить что $P \geq (50r^4n^4)^{2rnM}$. К сумме $W_{\eta_1,\ldots,\eta_r}$ применима лемма 6. Действительно, производная по ξ_j $(1 \leq j \leq r)$ от полинома в экспоненте не превосходит по модулю

$$nMQP^{-1+\frac{1}{M}} < 0.01.$$

В силу этого, после замены переменных интегрирования

$$x_1 = \frac{Q\xi_1 + \eta_1}{P}, \ldots, x_r = \frac{Q\xi_r + \eta_r}{P},$$

будем иметь

$$W_{\eta_1,\ldots,\eta_r} = P^rQ^{-r}\int_0^1 \cdots \int_0^1 \exp\left(2\pi i \sum_{t_1=0}^{n} \cdots \sum_{t_r=0}^{n} \delta_{t_1,\ldots,t_r} x_1^{t_1} \cdots x_r^{t_r}\right) dx_1 \cdots$$
$$\cdots dx_r + O(P^{r-1}Q^{1-r}).$$

Стало быть, тригонометрическая сумма $S(A)$ примет вид

$$S(A) = UV + O(P^{r-1}Q),$$
$$U = Q^{-r}\sum_{\eta_1=0}^{Q} \cdots \sum_{\eta_r=0}^{Q} \exp\left(2\pi i \sum_{t_1=0}^{n} \cdots \sum_{t_r=0}^{n} \frac{a_{t_1,\ldots,t_r}}{q_{t_1,\ldots,t_r}} \eta_1^{t_1} \cdots \eta_r^{t_r}\right),$$
$$V = P^r \int_0^1 \cdots \int_0^1 \exp\left(2\pi i \sum_{t_1=0}^{n} \cdots \sum_{t_r=0}^{n} \delta_{t_1,\ldots,t_r} x_1^{t_1} \cdots x_r^{t_t}\right) dx_1 \cdots dx_r.$$

Из теоремы 1 оценим сверху модуль тригонометрического интеграла V, а из теоремы 4 — кратную рациональную тригонометрическую сумму U. Отсюда и получим утверждение для точек первого класса.

Перейдем к оценке суммы $S(A)$ для точек второго класса.

Возьмем величину

$$\tau_{t_1,\ldots,t_r} = P^{t_1+\cdots+t_r-\frac{1}{2r}}$$
$$(0 \leq t_1, \ldots, t_r \leq n, \quad 1 \leq t_1 + \cdots + t_r)$$

По известному утверждению из элементарной теории чисел любое вещественное число $\alpha_{t_1,\ldots,t_r}$ приближается несократимой рациональной дробью $a_{t_1,\ldots,t_r}q_{t_1,\ldots,t_r}^{-1}$, $(a_{t_1,\ldots,t_r}, q_{t_1,\ldots,t_r}) = 1$ со следующими свойствами:

$$\alpha_{t_1,\ldots,t_r} = \frac{a_{t_1,\ldots,t_r}}{q_{t_1,\ldots,t_r}} + \frac{\theta_{t_1,\ldots,t_r}}{q_{t_1,\ldots,t_r}\tau_{t_1,\ldots,t_r}},$$
$$0 < q_{t_1,\ldots,t_r} \leq \tau_{t_1,\ldots,t_r}, \quad |\theta_{t_1,\ldots,t_r}| \leq 1.$$

Пусть как и раньше Q — общее наименьшее кратное $q_{t_1,\ldots,t_r}$ с условиями $0 \leq t_1, \ldots, t_r \leq n$, $2 \leq t_1 + \cdots + t_r$. Рассмотрим две возможности
а) $Q_0 > P^{\frac{1}{2r}-\frac{1}{10M}}$, б) $Q_0 \leq P^{\frac{1}{2r}-\frac{1}{10M}}$.

Докажем теорему для случая а).

Произведем сдвиг интервала суммирования по переменным $x_1,\dots,x_r$ на величины $y_1,\dots,y_r$. Получим

$$S(A)=\sum_{x_1=1}^{P}\cdots\sum_{x_r=1}^{P}\exp(2\pi if(x_1+y_1,\dots,x_r+y_r))+2\theta_0P^{r-1}(y_1+\cdots+y_r),\quad |\theta_0|\le 1.$$

Просуммируем обе части равенства по переменным $y_1,\dots,y_r$ в пределах от 1 до $Y=[P^{1-\rho}]$ и перейдем к неравенствам, имеем

$$|S(A)|\le Y^{-r}\sum_{y_1=1}^{Y}\cdots\sum_{y_r=1}^{Y}\left|\sum_{x_1=1}^{P}\cdots\sum_{x_r=1}^{P}\exp(2\pi if(x_1+y_1,\dots,x_r+y_r))\right|+2rP^{r-1}Y.$$

Положим $\tau=[rn\log(4r^2nM)]+1,\ t=M(\tau+r)$. Возведем обе части предыдущего неравенства в степень $2t$, а затем воспользуемся неравенством $(a+b)^{2t}\le 2^{2t}(a^{2t}+b^{2t}),\ a,b\ge 0$ и неравенством Гельдера. Тогда для модуля суммы $|S(A)|^{2t}$ справедлива оценка

$$|S(A)|^{2t}\le 2^{2t}Y^{-r}\sum_{y_1=1}^{Y}\cdots\sum_{y_r=1}^{Y}\left|\sum_{x_1=1}^{P}\cdots\sum_{x_r=1}^{P}\exp(2\pi if(x_1+y_1,\dots,x_r+y_r))\right|^{2t}+$$
$$+(4r)^{2t}P^{2t(r-\rho)}.$$

Определим $D_{t_1,\dots,t_r}$ из равенства

$$f(x_1+y_1,\dots,x_r+y_r)-f(y_1,\dots,y_r)=\sum_{t_1=0}^{n}\cdots\sum_{t_r=0}^{n}D_{t_1,\dots,t_r}x_1^{t_1}\cdots x_r^{t_r}.$$

Множество точек $\gamma_{t_1,\dots,t_r}$ с условием $0\le t_1,\dots,t_r\le n,\ 1\le t_1+\cdots+t_r\le rn-1$, удовлетворяющих неравенствам

$$|\gamma_{t_1,\dots,t_r}-D_{t_1,\dots,t_r}|\le P^{-(t_1+\cdots+t_r)+\rho},$$

обозначим через $E(y_1,\dots,y_r)$. Введем обозначения для тригонометрических сумм

$$S(y_1,\dots,y_r)=\sum_{x_1=1}^{P}\cdots\sum_{x_r=1}^{P}\exp(2\pi if(x_1+y_1,\dots,x_r+y_r)),$$
$$S_\gamma(y_1,\dots,y_r)=\sum_{x_1=1}^{P}\cdots\sum_{x_r=1}^{P}\exp(2\pi if_\gamma(x_1,\dots,x_r)).$$

Для всякой точки γ принадлежащей области $E(y_1,\dots,y_r)$ имеем

$$|S(y_1,\dots,y_r)-S_\gamma(y_1,\dots,y_r)|\le 2\pi MP^{r-\rho}.$$

В силу очевидного неравенства получим

$$|S(A)|^{2t} \leq 2^{2t} Y^{-r} \sum_{y_1=1}^{Y} \cdots \sum_{y_r=1}^{Y} |S_\gamma(y_1, \ldots, y_r)|^{2t} + (8\pi M)^{2t} P^{2t(r-\rho)}.$$

Проинтегрируем обе части неравенства для $|S(A)|^{2t}$ по области $E(y_1, \ldots, y_r)$. Будем иметь.

$$|S(A)|^{2t} \leq \sum_{y_1,\ldots,y_r=1}^{Y} P^{-\frac{rnM}{2}+M\rho} Y^{-r} \times$$
$$\times \int_{E(y_1,\ldots,y_r)} |S_\gamma(y_1, \ldots, y_r)|^{2t} d\gamma + (8\pi M)^{2t} + P^{2t(r-\rho)}.$$

В лемме 4 мы оценили сверху число тех областей $E(y_1, \ldots, y_r)$ которые содержат заданную точку $\gamma_{t_1,\ldots,t_r}$, $0 \leq t_1, \ldots, t_r \leq n$. Из этой леммы следует, что каждая точка E покрывается

$$\ll Y^{r-1} P^{1-\frac{1}{2r}+\frac{1}{10M}}$$

областями $E(y_1, \ldots, y_r)$. Учитывая это обстоятельство, прийдем к неравенству

$$|S(A)|^{2t} \ll P^{-\frac{rnM}{2}+M\rho} Y^{-r} Y^{r-1} P^{1-\frac{1}{2r}+\frac{1}{10M}} \int_E |S(\beta)|^{2t} d\beta + P^{2t(r-\rho)}.$$

Воспользуемся теоремой о среднем (лемма 5)

$$|S(A)|^{2t} \ll P^{2tr-\frac{1}{2r}+\frac{1}{10M}+(M+1)\rho+\delta_\tau} P^{2t(r-\rho)}.$$

Так как

$$-(M+1)\rho - \frac{1}{10M} - \delta_\tau + \frac{1}{2r} \geq 2t\rho,$$

то теорема для случая а) доказана.

В случае б) сделаем замену переменных суммирования

$$x_j = Q_0\xi_j + \eta_j, \quad 1 \leq \eta_j \leq Q_0, \quad -\frac{\eta_j}{Q_0} < \xi_j \leq \frac{P-\eta_j}{Q_0}, \quad j = 1, \ldots, r.$$

Очевидно

$$S(A) = \sum_{\eta_1=0}^{Q} \cdots \sum_{\eta_r=0}^{Q} \exp\left(2\pi i \sum_{t_1=0}^{n} \cdots \sum_{t_r=0}^{n} \frac{a_{t_1,\ldots,t_r}}{q_{t_1,\ldots,t_r}} \eta_1^{t_1} \cdots \eta_r^{t_r}\right) W_{\eta_1\ldots,\eta_r},$$

$$W_{\eta_1,\ldots,\eta_r} = \sum_{\xi_1} \cdots \sum_{\xi_r} \exp\left(2\pi i \sum_{t_1=0}^{n} \cdots \sum_{\substack{t_r=0 \\ t_1+\cdots+t_r \geq 2}}^{n} z_{t_1,\ldots,t_r} \times \right.$$
$$\times (Q_0\xi_1 + \eta_1)^{t_1} \cdots (Q_0\xi_1 + \eta_r)^{t_r} +$$
$$\left. + 2\pi i \sum_{j=1}^{r} \left(\xi_j \left(Q_0 \frac{a_{0,\ldots,1,\ldots,0}}{q_{0,\ldots,1,\ldots,0}} + Q_0 z_{0,\ldots,1,\ldots,0}\right) + \eta_j z_{0,\ldots,1,\ldots,0}\right)\right);$$

где $0,\dots,1,\dots,0$ в записи $a_{0,\dots,1,\dots,0}, q_{0,\dots,1,\dots,0}$ означают, что на j месте стоит 1, а на остальных 0. Положим

$$Q_0 a_{0,\dots,1,\dots,0} \equiv a'_{0,\dots,1,\dots,0} (mod\ q_{0,\dots,1,\dots,0}), \quad |a_{0,\dots,1,\dots,0}| < \frac{q_{0,\dots,1,\dots,0}}{2}.$$

Тогда к сумме $W_{\eta_1,\dots,\eta_r}$ применим лемму 6

$$W_{\eta_1,\dots,\eta_r} = P^r Q_0^{-r} \int_0^1 \cdots \int_0^1 \exp\left(2\pi i \sum_{\substack{t_1=0^n \\ t_1+\dots+t_r \geq 2}} \cdots \sum_{t_r=0}^{n} z_{t_1,\dots,t_r} P^{t_1+\dots+t_r} \times \right.$$

$$\times \xi_1^{t_1} \cdots \xi_r^{t_r} + 2\pi i \sum_{j=1}^{r} \left(\frac{P\xi_j - \eta_j}{Q_0} \left(\frac{a_{0,\dots,1,\dots,0}}{q_{0,\dots,1,\dots,0}} + Q_0 z_{0,\dots,1} \right) + \right.$$

$$\left.\left. + \eta_j z_{0,\dots,1,\dots,0} \right) \right) d\xi_1 \cdots d\xi_r + O(P^{r-1} Q_0^{1-r}).$$

Если $Q_0 < Q$, то при некотором j имеем, что коэффициент, который стоит при переменной x_j превосходит

$$\geq \left(\frac{1}{q_{0,\dots,1,\dots,0}} - \frac{Q_0}{q_{0,\dots,1,\dots,0} P^{1-\frac{1}{2r}}} \right) \frac{P}{Q_0} > \frac{P}{2q_{0,\dots,1,\dots,0} Q_0} \geq \frac{P^{\frac{1}{10M}}}{2}.$$

Поэтому из теоремы 1 следует, что

$$|W_{\eta_1,\dots,\eta_r}| \ll P^r Q_0^{-r} P^{-\frac{1}{10Mn}} (\log P)^{r-1} + P^{r-1} Q_0^{1-r}.$$

Отсюда очевидным образом получим

$$|S(A)| \ll P^{r-\rho}.$$

Пусть $Q_0 = Q$. Тогда в силу леммы 6 справедлива формула

$$S(A) = UV + O(P^{r-1}Q),$$

$$U = Q^{-r} \sum_{\eta_1=0}^{Q} \cdots \sum_{\eta_r=1}^{Q} \exp\left(2\pi i \sum_{t_1=0}^{n} \cdots \sum_{t_r=1}^{n} \frac{a_{t_1,\dots,t_r}}{q_{t_1,\dots,t_r}} \eta_1^{t_1} \cdots \eta_r^{t_r} \right)$$

$$V = P^r \int_0^1 \cdots \int_0^1 \exp\left(2\pi i \sum_{t_1=0}^{n} \cdots \sum_{t_r=0}^{n} \delta_{t_1,\dots,t_r} x_1^{t_1} \cdots x_r^{t_t} \right) dx_1 \cdots dx_r.$$

Применим теорему 4 для оценка U, а теорему 1 для оценки V. Так как либо Q, либо δ больше чем $P^{\frac{1}{M}}$, то подставим в выражение для $S(A)$ либо оценку U, либо оценку V, получим утверждение теоремы 6. Теорема полностью доказана.

4 Асимптотическая формула для числа решений полной системы уравнений

Полной системой уравнений (см. введение) назовем следующую систему

$$\sum_{j=1}^{2k}(-1)^j x_{1,j}^{t_1}\cdots x_{r,j}^{t_r}=0, \qquad (0\le t_1,\dots,t_r\le n) \tag{14}$$

где неизвестные $x_{1,j},\dots,x_{r,j}$, $1\le j\le 2k$ принимают целые значения в пределах от 1 до P. В данной главе будет доказана основная теорема, сформулированная во введении.

Запишем аналитической формулой число решений системы уравнений (1). Пусть $S(A)$ обозначает кратную тригонометрическую сумму Г. Вейля

$$S(A)=\sum_{x_1=1}^{P}\cdots\sum_{x_r=1}^{P}\exp\left(2\pi i\sum_{t_1=0}^{n}\cdots\sum_{t_r=0}^{n}\alpha_{t_1,\dots,t_r}x_1^{t_1}\cdots x_r^{t_r}\right),$$

где A – набор вещественных чисел $\alpha_{t_1,\dots,t_r}$,

$$(0\le t_1,\dots,t_r\le n).$$

Тогда из того, что для любого целого m справедливо равенство

$$\int_0^1 e^{2\pi i\alpha m}d\alpha=\begin{cases}1, & m=0\\ 0, & m\ne 0\end{cases}$$

следует, что

$$J_n(k,P)=\int_E |S(A)|^{2k}dA.$$

Положим

$$\tau_{t_1,\dots,t_r}=P^{t_1+\dots+t_r-\frac{1}{2r}}$$

и через E' обозначим единичный M – мерный куб с условиями $-\tau_{t_1,\dots,t_r}^{-1}\le\alpha_{t_1,\dots,t_r}\le 1-\tau_{t_1,\dots,t_r}^{-1}$. Так как $\exp(2\pi i\alpha m)$ при целом m периодична по α с периодом 1, то

$$J_n(k,P)=\int_{E'}|S(A)|^{2k}dA.$$

Все точки E' разобъем на точки двух классов. К первому классу E_1 принадлежат точки A областей $E(a_{t_1,\dots,t_r},q_{t_1,\dots,t_r})$, заданные условиями

$$\alpha_{t_1,\dots,t_r}=\frac{a_{t_1,\dots,t_r}}{q_{t_1,\dots,t_r}}+\beta_{t_1,\dots,t_r}, \qquad (a_{t_1,\dots,t_r},q_{t_1,\dots,t_r})=1,\quad |\beta_{t_1,\dots,t_r}|\le P^{-(t_1+\dots+t_r-\frac{1}{M})} \tag{15}$$

и общее наименьшее кратное Q всех $q_{t_1,\dots,t_r}$, $0\le t_1,\dots,t_r\le n$, $1\le t_1+\dots+t_r$ не превосходит $P^{\frac{1}{M}}$.

Все остальные точки отнесем ко второму классу E_2. Тогда

$$J_n(k,P)=J_1+J_2,$$

где

$$J_1=\int_{E_1}|S(A)|^{2k}dA,$$

$$J_2=\int_{E_2}|S(A)|^{2k}dA.$$

Из интеграла J_1 будет выделен главный член асимптотической формулы для $J_n(k,P)$, а J_2 дает остаточный член.

4.1 Главный член проблемы

Здесь, основываясь на результатах глав I и II, из интеграла J_1 выделяется главный член асимптотической формулы для числа решений полной системы уравнений.

Покажем, что множество точек первого класса E_1 есть объединение непересекающихся областей $E(a_{t_1,\dots,t_r},q_{t_1,\dots,t_r})$, определенных условиями (15). Пусть $E(a_{t_1,\dots,t_r},q_{t_1,\dots,t_r})$ и $E(a'_{t_1,\dots,t_r},q'_{t_1,\dots,t_r})$ – две различные области, тогда существует $(s_1,\dots,s_r)$ что

$$\frac{a_{s_1,\dots,s_r}}{q_{s_1,\dots,s_r}}\ne\frac{a'_{s_1,\dots,s_r}}{q'_{s_1,\dots,s_r}};\qquad \left|\frac{a_{s_1,\dots,s_r}}{q_{s_1,\dots,s_r}}-\frac{a'_{s_1,\dots,s_r}}{q'_{s_1,\dots,s_r}}\right|\ge\frac{1}{q_{s_1,\dots,s_r}q'_{s_1,\dots,s_r}}.$$

Условие пересечения этих областей запишется так

$$\left|\frac{a_{s_1,\dots,s_r}}{q_{s_1,\dots,s_r}}-\frac{a'_{s_1,\dots,s_r}}{q'_{s_1,\dots,s_r}}\right|\le\frac{2}{\tau_{s_1,\dots,s_r}}.$$

Отсюда следует, что

$$\tau_{s_1,\dots,s_r}\le 2q_{s_1,\dots,s_r}q'_{s_1,\dots,s_r}\le P^{\frac{2}{M}}.$$

В силу выбора $\tau_{s_1,\dots,s_r}$ это неравенство не верно, поэтому области

$$E(a_{t_1,\dots,t_r},q_{t_1,\dots,t_r}),$$

образующие первый класс не пересекаются. Пусть Q, как и прежде, равно общему наименьшему $q_{t_1,\dots,t_r}$

$$0\le t_1,\dots,t_r\le n,\quad 1\le t_1+\dots+t_r$$

Величина J_1 равна

$$J_1=\sum_{Q=1}^{P^{\frac{1}{M}}}\sum_{\substack{q_{0,\ldots,1}=1\\ OHK(q_{0,\ldots,1},\ldots,q_{n,\ldots,n})=1}}^{P^{\frac{1}{M}}}\cdots\sum_{q_{n,\ldots,n}=1}^{P^{\frac{1}{M}}}\ \sum_{\substack{a_{0,\ldots,1}=1\\(a_{0,\ldots,1},q_{0,\ldots,1})=1}}^{q_{0,\ldots,1}}\cdots\sum_{\substack{a_{n,\ldots,n}=1\\(a_{n,\ldots,n},q_{n,\ldots,n})=1}}^{q_{n,\ldots,n}} J_1',$$

$$J_1'=\int_{E(a_{t_1,\ldots,t_r},\,q_{t_1,\ldots,t_r})}|S(A)|^{2k}dA.$$

Положим

$$x_j=Qy_j+z_j;\quad 1\le z_j\le Q,\quad \frac{1-z_j}{Q}\le y_j\le\frac{P-z_j}{Q},\quad j=1,\ldots,r.$$

Тогда

$$S(A)=\sum_{z_1=1}^{Q}\cdots\sum_{z_r=1}^{Q}\exp\left(2\pi i\sum_{t_1=0}^{n}\cdots\sum_{t_r=0}^{n}\frac{a_{t_1,\ldots,t_r}}{q_{t_1,\ldots,t_r}}z_1^{t_1}\cdots z_r^{t_r}\right)\sum_{\frac{1-z_1}{Q}\le y_1\le\frac{P-z_1}{Q}}\cdots$$
$$\cdots\sum_{\frac{1-z_r}{Q}\le y_r\le\frac{P-z_r}{Q}}\exp\left(2\pi i\sum_{t_1=0}^{n}\cdots\sum_{t_r=0}^{n}\beta_{t_1,\ldots t_r}(Qy_1+z_1)^{t_1}\cdots(Qy_r+z_r)^{t_r}\right).$$

Так как

$$\left|\frac{\partial}{\partial y_j}\left(\sum_{t_1=0}^{n}\cdots\sum_{t_r=0}^{n}\beta_{t_1,\ldots t_r}(Qy_1+z_1)^{t_1}\cdots(Qy_r+z_r)^{t_r}\right)\right|\le$$
$$\le nMP^{\frac{1}{M}-1}Q<\frac{1}{2},$$

то отсюда в силу леммы 6 из главы III имеем

$$\sum_{\frac{1-z_1}{Q}\le y_1\le\frac{P-z_1}{Q}}\ \sum_{\frac{1-z_r}{Q}\le y_r\le\frac{P-z_r}{Q}}\exp\left(2\pi i\sum_{t_1=0}^{n}\cdots\sum_{t_r=0}^{n}\beta_{t_1,\ldots t_r}(Qy_1+z_1)^{t_1}\cdots\right.$$
$$\left.\cdots(Qy_r+z_r)^{t_r}\right)=\int_{\frac{1-z_1}{Q}}^{\frac{P-z_1}{Q}}\cdots\int_{\frac{1-z_r}{Q}}^{\frac{P-z_r}{Q}}\exp\left(2\pi i\sum_{t_1=0}^{n}\cdots\sum_{t_r=0}^{n}\beta_{t_1,\ldots t_r}(Qy_1+z_1)^{t_1}\cdots\right.$$
$$\left.\cdots(Qy_r+z_r)^{t_r}\right)dy_1\cdots dy_r+O(P^{r-1}Q^{1-r})=P^rQ^{-r}V(\beta)+O(P^{r-1}Q^{1-r}),$$

$$V(\beta)=\int_0^1\cdots\int_0^1\exp\left(2\pi i\sum_{t_1=0}^{n}\cdots\sum_{t_r=0}^{n}\beta_{t_1,\ldots t_r}P^{t_1+\cdots+t_r}x_1^{t_1}\cdots x_r^{t_r}\right)dx_1\cdots dx_r.$$

А значит,

$$S(A)=P^rU(Q)V(\beta)+O(QP^{r-1}),$$
$$U(Q)=Q^{-r}\sum_{z_1=1}^{Q}\cdots\sum_{z_r=1}^{Q}\exp\left(2\pi i\sum_{t_1=0}^{n}\cdots\sum_{t_r=0}^{n}\frac{a_{t_1,\ldots,t_r}}{q_{t_1,\ldots,t_r}}z_1^{t_1}\cdots z_r^{t_r}\right).$$

Сделаем замену переменных

$$\gamma_{t_1,\dots,t_r} = \beta_{t_1,\dots,t_r} P^{t_1+\dots+t_r}, \quad 0 \le t_1,\dots,t_r \le n.$$

Область интегрирования по $\beta_{t_1,\dots,t_r}$ при этом перейдет в область E_3, определяемую условиями

$$|\gamma_{t_1,\dots,t_r}| \le P^{\frac{1}{M}}, \quad 0 \le t_1,\dots,t_r \le n.$$

Тогда

$$J_1' = P^{2rk-\frac{rnM}{2}} |U(Q)|^{2k} \int_{E_3} |V(\gamma)|^{2k} d\gamma + O\Big(P^{r(2k-1)-\frac{rnM}{2}} |U(Q)|^{2k-1} \times$$
$$\times \int_{E_3} |V(\gamma)|^{2k-1} d\gamma Q P^{r-1}\Big) + O\left(P^{(r-1)2k} Q^{2kr} P^{-\frac{rnM}{2}+\frac{M-1}{M}}\right).$$

Рассмотрим интеграл

$$\theta = \int_{\mathbb{R}^{M-1}} |V(\gamma)|^{2k} d\gamma,$$

где интегрирование ведется по всем $\alpha_{t_1,\dots,t_r}$, удовлетворяющим неравенствам

$$-\infty < \alpha_{t_1,\dots,t_r} < \infty, \quad 0 \le t_1,\dots,t_r \le n, \quad 1 \le t_1,\dots,t_r.$$

Оценим интеграл

$$V_1 = \int_{\mathbb{R}^{M-1}\setminus E_3} |V(\gamma)|^{2k} d\gamma.$$

Так как интегрирование ведется по точкам, не принадлежащим E_3, то выполняется неравенство

$$\gamma = \max_{0 \le t_1,\dots,t_r \le n} |\gamma_{t_1,\dots,t_r}| > P^{\frac{1}{M}}.$$

Поэтому

$$V_1 \le \sum_{s_1=0}^{n} \cdots \sum_{s_r=0}^{n} \int_{-\infty}^{\infty} d\gamma_{n,\dots,n} \cdots \int_{\substack{-\infty \\ |\gamma_{s_1,\dots,s_r}| > P^{\frac{1}{M}}}}^{\infty} d\gamma_{s_1,\dots,s_r} \cdots \int_{-\infty}^{\infty} |V(\gamma)|^{2k} d\gamma_{0,\dots,0,1}.$$

В силу теоремы 1 главы 1 имеем, что

$$|V(\gamma)| \ll \min(1, \gamma^{-\frac{1}{n}+\varepsilon}),$$

где $\varepsilon > 0$ – сколь угодно малое фиксированное число. Отсюда следует, что

$$|V(\gamma)| \ll \sideset{}{'}\prod_{0 \le s_1,\dots,s_r \le n} \min(1, |\gamma_{s_1,\dots,s_r}|^{-\frac{1}{nM}+\frac{\varepsilon}{M}}).$$

Значит

$$|V_1| \ll P^{\frac{1}{M}((-\frac{1}{nM}+\frac{\varepsilon}{M})2k+1)}.$$

При $k > nM$ из последнего неравенства следует, что

$$|V_1| \ll P^{-\frac{1}{2M}}.$$

Отсюда имеем

$$J_1' = P^{2rk-\frac{rnM}{2}}\theta|U(Q)|^{2k} + O(P^{2rk-\frac{rnM}{2}-1}|U(Q)|^{2k})+$$
$$+ O(P^{2rk-\frac{rnM}{2}+\frac{M-1}{M}-2k}Q^{2kr}) + O(P^{2rk-\frac{rnM}{2}-1}Q^r|U(Q)|^{2k-1}).$$

Так как при $k > nM$ особый ряд сходится (лемма 5, глава II), то

$$J_1 = P^{2rk-\frac{rnM}{2}}\theta\sigma - P^{2rk-\frac{rnM}{2}}\theta \sum_{Q>P^{\frac{1}{M}}} \sum_{\substack{q_{n,\dots,n}=1 \\ OHK(q_{n,\dots,n},\ q_{0,\dots,1})=Q}}^{\infty} \cdots \sum_{q_{0,\dots,1}=1}^{\infty} \times$$
$$\times \sum_{\substack{a_{n,\dots,n}=1 \\ (a_{n,\dots,n},\ q_{n,\dots,n})}}^{q_{n,\dots,n}} \cdots \sum_{\substack{a_{0,\dots,1}=1 \\ (a_{0,\dots,1},\ q_{0,\dots,1})=1}}^{q_{o,\dots,1}} |U(Q)|^{2k} + O(P^{2rk-\frac{rnM}{2}-\frac{1}{2M}}).$$

Воспользуемся оценкой $U(Q)$ (следствие теоремы 5, главы II). Получим

$$J_1 = P^{2rk-\frac{rnM}{2}}\theta\sigma + O(P^{2rk-\frac{rnM}{2}-\frac{1}{2M}}).$$

4.2 Остаточный член проблемы

Цель этого параграфа — оценка интеграла J_2 сверху. Для получения нетривиальной оценки при возможно меньшей величине k, подобно одномерному случаю ([1], [6]), существенна теорема о среднем (лемма 5, глава III).

Лемма 7. *При* $k > 10Mr^2n\log(rn)$ *справедлива оценка*

$$J_2 \ll P^{2kr-\frac{rnM}{2}-\frac{1}{500r^2\log(rn)}}.$$

Доказательство. Очевидно

$$J_2 = \int_{E_2} |S(A)|^{2k}dA \le \max_{A\in E_2} |S(A)|^{rnM} \int_E |S(A)|^{2k-rnM}dA.$$

Возьмем $\tau = [rn(\log(100Mr^2n) + \log\log(4Mr^2n))] + 1$. При $k > M(\tau + r)$ воспользуемся леммой 5 главы III, а для оценки суммы $S(A)$ для точек A, принадлежащих второму классу — теоремой 6.

$$J_2 \ll P^{r^2nM-rnM\rho}P^{(2k-rnM)r-\frac{rnM}{2}+\frac{rnM}{2}(1-\frac{1}{rn})^{\tau}} \ll$$
$$\ll P^{2kr-\frac{rnM}{2}-\frac{1}{200r\log(4r^2nM)}}$$

Лемма доказана.

Таким образом асимптотическая формула для числа решений полной системы уравнений (формулировку см. во введении) полностью доказана.

Из асимптотической формулы тривиально следует "упрощенная оценка" в теореме о среднем.

Лемма 8. *Пусть* n, r *– постоянные*

$$k \geq 10Mr^2 n \log(rn).$$

Тогда для величины $J_n(k, P)$ *справедлива оценка*

$$J_n(k, P) \ll P^{2kr - \frac{rnM}{2}}.$$

Доказательство. В силу сходимости при рассматриваемых k особого ряда и особого интеграла эта оценка является очевидным следствием асимптотической формулы для числа решений полной системы уравнений.

СПИСОК ЦИТИРОВАННОЙ ЛИТЕРАТУРЫ

[1] И. М. Виноградов Метод тригонометрических сумм в теории чисел, М. 1971г.

[2] И. М. Виноградов Избранные труды, М, 1952г.

[3] А. А. Карацуба Среднее значение модуля тригонометрической суммы // Изв. АН СССР, сер, матем.т. 37, №6, 1973г. 1203-1227.

[4] А. А. Карацуба Проблема Варинга для сравнений по модулю, равному степени простого числа // Вестник МГУ, сер. I (1962), 28-38.

[5] А. А. Карацуба Теоремы о среднем и полные тригонометрические суммы // Изв. АН СССР, т.30, №1, 1966, 183-206.

[6] Hua Joo-Keng On the number of solutions of Tarrys problem // Acta Scientia Sinica 1952, т.1, №1, p.1-76.

[7] К. К. Марджанишвили О некоторых нелинейных системах уравнений в целых числах // Матем. сб. 33 (1953), 639-675.

[8] Г. И. Архипов Кандидатская диссертация. Матем. институт им. В. А. Стеклова АН СССР, 1975г.

[9] Г. И. Архипов Кратные тригонометрические суммы // Докл. АН СССР, т.219, №5, 1974, 1036-1037.

[10] Г. И. Архипов Теорема о среднем значении модуля кратной тригонометрической суммы // Матем. заметки, т.17, вып. I, 1975, 143-153.

[11] Г. И. Архипов Оценка модуля двойной тригонометрической суммы Г.Вейля // Труды матем. институт им. в. А. Стеклова, т.142, 1976г.

[12] Г. И. Архипов, В. Н. Чубариков О кратных тригонометрических суммах // Докл. АН СССР, 1975, т.222, №5, 1017-1019.

[13] Г. И. Архипов, В. Н. Чубариков Кратные тригонометрические суммы // Изв. АН СССР, 1976, т.40, вып. I, 209-220.

[14] Г. И. Архипов, А. А. Карацуба, В. Н. Чубариков Верхняя граница модуля кратной тригонометрической суммы (в печати).

[15] Г. Полиа, Г. Сеге Задачи и теоремы из анализа, ч. П, М, 1953г.

[16] В. Н. Чубариков Об одной кратном тригонометрическом интеграле // Докл. АН СССР, 1976, т.227, №6, 1308-1310.

[17] В. Н. Чубариков О кратных рациональных тригонометрических суммах и кратных интегралах // Матем. заметки, т.20, №1, 1976, 61-68.

Московский государственный университет им. М. В. Ломоносова
Поступило 8.12.2011