СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. *Богомолов В.П., Рутковский В.Ю., Суханов В.М.* Проектирование оптимальной механической структуры свободнолетающего космического робототехнического модуля как объекта автоматического управления. I // АиТ. 1998. № 5. С. 27–40.
2. *Бухгольц Н.Н.* Основной курс теоретической механики. Ч. 2. М.: Наука, 1966.
3. *Невяжский Г.Л.* Неравенства. М.: Учпедгиз, 1947.
4. *Кулаков Ф.М.* Супервизорное управление манипуляционными роботами. М.: Наука, 1980.

Поступила в редакцию 12.05.97

УДК 517.19

© 1998 г. И.В. БОЙКОВ, д-р физ.-мат. наук
(Пензенский государственный технический университет)

ОБ ОПРЕДЕЛЕНИИ ОБЛАСТЕЙ УСТОЙЧИВОСТИ СИСТЕМ ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНЫХ УРАВНЕНИЙ С МАЛЫМИ ПАРАМЕТРАМИ ПРИ ПРОИЗВОДНЫХ

В теории автоматического регулирования часто возникает задача, которая цитируется нами по работе [1, с. 118]: "Дана постоянная часть системы автоматического регулирования и имеется несколько свободных параметров, определяющих работу регулирующих органов. Требуется выбрать эти параметры таким образом, чтобы фиксированный режим (установившееся движение) был устойчивым". В данной статье приведенная задача исследуется в случае систем дифференциальных уравнений с малым параметром при производной.

1. Введение

Многие задачи теории автоматического регулирования приводят к системе дифференциальных уравнений с малым параметром при производных

$$\begin{aligned} &\frac{d\mathbf{x}}{dt} = \mathbf{Q}(\mathbf{x}, \mathbf{y}, \mathbf{u}, \mu), \\ &\mu\frac{d\mathbf{y}}{dt} = \mathbf{H}(\mathbf{x}, \mathbf{y}, \mathbf{u}, \mu), \end{aligned} \tag{1.1}$$

где $\mathbf{x} = (x_1, \ldots, x_n)$, $\mathbf{y} = (y_1, \ldots, y_m)$, $\mu(\mu > 0)$ – малый параметр, $\mathbf{u} = (u_1, \ldots, u_m)$, $\mathbf{u} \in G$.

Отметим [2–6], что в ряде случаев к системам вида (1.1) сводятся смешанные системы дифференциальных и разностных уравнений

$$\begin{aligned} &\frac{d\mathbf{x}}{dt} = \mathbf{Q}(\mathbf{x}, \mathbf{y}, \mathbf{u}), \\ &\mathbf{H}(\mathbf{x}, \mathbf{y}, \mathbf{u}) = 0, \end{aligned} \tag{1.2}$$

которыми также описывается ряд задач в теории автоматического управления.

Устойчивость решений систем дифференциальных уравнений с малыми параметрами при производных исследовалась в работах [3–5] на полубесконечных интервалах времени $[t_0, \infty)$ и в монографии [6] на конечных интервалах времени.

В данной работе предложен критерий определения областей устойчивости сингулярно возмущенных систем, который охватывает и критические случаи. Этот критерий основан на исследовании спектра якобиана правой части уравнения в окрестности возмущенного решения. Впервые подобный метод был использован в работах [7, 8] при исследовании устойчивости решений систем дифференциальных уравнений в критическом случае одного нулевого корня. Позднее, в работах [9–11], он был распространен на дифференциальные и разностные уравнения в банаховых пространствах и на всевозможные критические случаи.

2. Критерии устойчивости

Обозначим через R_n n-мерное пространство вектор-столбцов $\mathbf{x} = (x_1, \ldots, x_n)^T$, где T – знак транспонирования. Норма вектора $\mathbf{x} \in R_n$ определяется выражением $\|\mathbf{x}\| = \max\limits_{1 \leqslant k \leqslant n} |x_k|$.

Ниже используются обозначения: $R(\mathbf{a}, r) = \{\mathbf{x} \in R_n : \|\mathbf{x} - \mathbf{a}\| \leqslant r\}$; $S(\mathbf{a}, r) = \{\mathbf{x} \in R_n : \|\mathbf{x} - \mathbf{a}\| = r\}$; $\operatorname{Re} K = K_R = (K + K^*)/2$; $\Lambda(K)$ – логарифмическая норма оператора K, определяемая выражением $\Lambda(K) = \lim\limits_{h \downarrow 0}(\|I + hK\| - 1)/h$.

Рассмотрим сингулярно возмущенную систему дифференциальных уравнений (1.1). Будем считать, что $\mathbf{Q}(\mathbf{0}, \mathbf{y}, \mathbf{u}, \mu) \equiv \mathbf{0}$, $\mathbf{H}(\mathbf{x}, \mathbf{0}, \mathbf{u}, \mu) \equiv \mathbf{0}$. Зафиксируем произвольные векторы $\mathbf{B} = (b_1, \ldots, b_n)$, $b_i = \text{const}$ и $\mathbf{C} = (c_1, \ldots, c_m)$, $c_i = \text{const}$.

Введем следующие обозначения: $A(\mathbf{B})$, где $A(\mathbf{B}) = \{a_{ij}(\mathbf{B})\}_{ij=\overline{1,n}}$,

$$a_{ij}(\mathbf{B}) = \begin{cases} \dfrac{Q_i(0, \ldots, 0, b_j, \ldots, b_n, \mathbf{y}, \mathbf{u}, \mu) - Q_i(0, 0, \ldots, 0, 0, b_{j+1}, \ldots, b_n, \mathbf{y}, \mathbf{u}, \mu)}{b_j}, & b_j \neq 0; \\ 0, & b_j = 0; \end{cases}$$

$i, j = 1, 2, \ldots, n$ и $D(\mathbf{C}) = \{d_{k\ell}(\mathbf{C})\}_{k,\ell=\overline{1,n}}$, где

$$d_{k\ell}(\mathbf{C}) = \begin{cases} \dfrac{H_k(\mathbf{x}, 0, \ldots, 0, c_\ell, \ldots, c_n, \mathbf{u}, \mu) - H_k(\mathbf{x}, 0, \ldots, 0, 0, c_{\ell+1}, \ldots, c_n, \mathbf{u}, \mu)}{c_\ell}, & c_\ell \neq 0; \\ 0, & c_\ell = 0; \end{cases}$$

$k, \ell = 1, 2, \ldots, m$.

Отметим, что элементы $a_{ij}(\mathbf{B})$ зависят от произвольного вектора $y \in R_m$ и вектора $\mathbf{u} \in G$, а элементы $d_{ij}(\mathbf{C})$ зависят от произвольного вектора $\mathbf{x} \in R_n$ и вектора $\mathbf{u} \in G$, но для простоты этот факт в обозначениях $a_{ij}(\mathbf{B})$, $d_{ij}(\mathbf{C})$ опускается.

Будем считать выполненными условия:

A1. При любом ненулевом векторе $\mathbf{B} = (b_1, \ldots, b_n)$, принадлежащем шару $R(\mathbf{0}, r)$ пространства R_n с достаточно малым радиусом r, любых значениях $\mathbf{y} = (y_1, \ldots, y_m)$, принадлежащих шару $R(\mathbf{0}, r)$ пространства R_m, любых $\mathbf{u} \in G$ и $0 < \mu \leqslant \mu_0$ справедливо неравенство $\Lambda(A(\mathbf{B})) < 0$.

A2. При выполнении условий A1 справедливо неравенство $\Lambda(A(\mathbf{B})) < -\alpha$, $\alpha = \text{const} > 0$.

A3. При любом ненулевом векторе $\mathbf{C} = (c_1, \ldots, c_m)$, принадлежащем шару $R(\mathbf{0}, r)$ пространства R_m с достаточно малым радиусом r, при произвольном $\mathbf{x} \in R_n$, любых $\mathbf{u} \in G$ и $0 < \mu \leqslant \mu_0$ справедливо неравенство $\Lambda(D(\mathbf{C})) < 0$.

A4. При выполнении условий A3 справедливо неравенство $\Lambda(D(\mathbf{C})) < -\beta$, $\beta = \text{const} > 0$.

Введем обозначения $\beta_1 = \beta/\mu_0$, $\gamma = \min(\alpha, \beta_1)$.

Теорема 1. Пусть выполнены условия A1, A3. *Тогда множество G является областью устойчивости решений системы уравнений* (1.1).

Замечание. Теорема 1 остается справедливой, если в условиях A1, A2 заменить $\Lambda(A(\mathbf{B}))$ на $\mathrm{Re}\,(A(\mathbf{B}))$, а в условиях A3, A4 заменить $\Lambda(D(\mathbf{C}))$ на $\mathrm{Re}\,(D(\mathbf{C}))$.

Теорема 2. Пусть выполнены условия A2, A4. *Тогда тривиальное решение уравнения* (1.1) *асимптотически устойчиво равномерно по μ из промежутка* $(0, \mu_0]$ *и при любом* $\mathbf{u} \in G$.

Замечание. В работе [4] была доказана равномерная при $\mu \in (0, \mu_0]$ асимптотическая устойчивость решения системы уравнений (1.1) при выполнении следующих условий (рассматриваются функции $\mathbf{Q}(\mathbf{x}, \mathbf{y}, \mu)$, $\mathbf{H}(\mathbf{x}, \mathbf{y}, \mu)$):

C1) функции $\mathbf{Q} : E_n \times E_m \times E_1 \to E_n$, $\mathbf{H} : E_n \times E_m \times E_1 \to E_m$ локально липшицевы в $E_n \times E_m \times E_1$;

C2) уравнение $\mathbf{H}(\mathbf{x}, \mathbf{y}, 0) = 0$ относительно переменной $\mathbf{y}$ имеет единственное решение $\mathbf{y} = \mathbf{f}(\mathbf{x})$, причем неявная функция $\mathbf{f} : E_n \to E_m$ локально липшицева в E_n;

C3) уравнение $\mathbf{x} = \mathbf{Q}(\mathbf{x}, \mathbf{f}(\mathbf{x}), 0)$ имеет асимптотически устойчивую в целом точку покоя $\mathbf{x} = \mathbf{0}$;

C4) при любом $\mathbf{x} \in E_n$ точка покоя $\mathbf{z} = 0$ уравнения $\mathbf{z} = \mathbf{H}(\mathbf{x}, f(\mathbf{x}) + \mathbf{z}, 0)$ асимптотически устойчива в целом;

C5) 1) функции $\mathbf{Q}(\mathbf{x}, \mathbf{y}, 0)$, $\mathbf{H}(\mathbf{x}, \mathbf{y}, 0)$ непрерывно дифференцируемы в некоторой окрестности точки $(\mathbf{x}^*, \mathbf{y}^*)$;

2) матрица $\partial\mathbf{H}(\mathbf{x}^*, \mathbf{y}^*, 0)/\partial\mathbf{y}$ гурвицева;

3) матрица

$$P = \frac{\partial\mathbf{Q}(\mathbf{x}^*, \mathbf{y}^*, 0)}{\partial\mathbf{x}} - \frac{\partial\mathbf{Q}(\mathbf{x}^*, \mathbf{y}^*, 0)}{\partial\mathbf{y}} \left[\frac{\partial\mathbf{H}(\mathbf{x}^*, \mathbf{y}^*, 0)}{\partial\mathbf{y}}\right]^{-1} \frac{\partial\mathbf{H}(\mathbf{x}^*, \mathbf{y}^*, 0)}{\partial\mathbf{x}}$$

гурвицева.

В работе [12] доказана асимптотическая устойчивость решения уравнения (1.1) (но не равномерная при $\mu \in (0, \mu_0]$) при выполнении условий C1–C5.

Нетрудно видеть, что условия A2), A4) настоящей работы по сути дела эквивалентны условиям C3), C4) работы [12]. Таким образом, при использовании результатов настоящей работы отпадает необходимость в выполнении условий C1), C2), C5), которые к тому же (за исключением условия C1)) труднопроверяемые.

Введем условия:

A1′. При любом ненулевом векторе $\mathbf{B} = (b_1, b_2, \ldots, b_n) \in R_n$ и любых значениях $\mathbf{y} = (y_1, y_2, \ldots, y_m) \in R_m$, любом $\mathbf{u} \in G$ и $0 < \mu \leqslant \mu_0$ справедливо неравенство $\Lambda(A(\mathbf{B})) < 0$.

A2′. При выполнении условий A1′ справедливо неравенство $\Lambda(A(\mathbf{B})) < -\alpha$, $\alpha = \mathrm{const} > 0$.

A3′. При любом ненулевом векторе $\mathbf{C} = (c_1, c_2, \ldots, c_m) \in R_m$, при произвольном $\mathbf{x} \in R_n$, $\mathbf{u} \in G$ и $0 < \mu \leqslant \mu_0$ справедливо неравенство $\Lambda(D(\mathbf{C})) < 0$.

A4′. При выполнении условий A3′ справедливо неравенство $\Lambda(D(\mathbf{C})) < -\beta$, $\beta = \mathrm{const} > 0$.

Теорема 1′. Пусть выполнены условия A1′ *и* A3′. *Тогда при любом* $\mathbf{u} \in G$ *тривиальное решение системы уравнений* (1.1) *устойчиво в целом.*

Теорема 2′. Пусть выполнены условия A2′ *и* A4′. *Тогда при любом* $\mathbf{u} \in G$ *тривиальное решение системы уравнений* (1.1) *устойчиво в целом равномерно по μ из промежутка* $0 < \mu \leqslant \mu_0$.

ПРИЛОЖЕНИЕ

Доказательство теоремы 1. Пусть $\mathbf{z} = (\mathbf{x}, \mathbf{y})$. Устойчивость решения системы уравнений (1.1) при любом $\mathbf{u} \in G$ будем проводить в пространстве R_s, $s = n + m$.

Зафиксируем произвольное значение r_1, $0 < r_1 < r$ и покажем, что при выполнении условий теоремы каждое решение системы уравнений (1.1), имеющее начальное значение $\mathbf{z}(0) = (\mathbf{x}(0), \mathbf{y}(0)) = (\mathbf{x}_0, \mathbf{y}_0)$, расположенное в шаре $R(\mathbf{0}, r_1)$ пространства R_s, не покинет этого шара. Предположим противное: при $t = T$ траектория решения $\mathbf{z}(t) = (\mathbf{x}(t), \mathbf{y}(t))$ системы уравнений (1.1) покидает шар $R(\mathbf{0}, r_1)$.

Рассмотрим вначале систему уравнений

$$\text{(П.1)} \qquad \frac{d\mathbf{y}}{dt} = \frac{1}{\mu}\mathbf{H}(\mathbf{x}, \mathbf{y}, \mathbf{u}, \mu).$$

Зафиксируем значения $c_\ell(T) = y_\ell(T)$, $\ell = 1, 2, \ldots, m$. Пусть $r_2 = \max\limits_{1 \leqslant \ell \leqslant m} |y_\ell(T)|$. Представим $\frac{1}{\mu}H_i(x_1(T), \ldots, x_n(T), y_1(T), \ldots, y_m(T), \mathbf{u}, \mu)$ в виде

$$\text{(П.2)} \qquad \frac{1}{\mu}H_i(x_1(T), \ldots, x_n(T), y_1(T), \ldots, y_m(T), \mathbf{u}, \mu) =$$

$$= \frac{1}{\mu}\,\frac{H_i(\mathbf{x}(T), c_1(T), \ldots, c_m(T), \mathbf{u}, \mu) - H_i(\mathbf{x}(T), 0, c_2(T), \ldots, c_m(T), \mathbf{u}, \mu)}{c_1(T)} + \ldots$$

$$\ldots + \frac{1}{\mu}\,\frac{H_i(\mathbf{x}(T), 0, 0, \ldots, 0, c_m(T), \mathbf{u}, \mu) - H_i(\mathbf{x}(T), 0, 0, \ldots, 0, \mathbf{u}, \mu)}{c_m(T)}y_m(t) -$$

$$-\frac{1}{\mu}\,\frac{H_i(\mathbf{x}(T), c_1(T), \ldots, c_m(T), \mathbf{u}, \mu) - H_i(\mathbf{x}(T), 0, c_2(T), \ldots, c_m(T), \mathbf{u}, \mu)}{c_1(T)}(y_1(t) - c_1(T)) -$$

$$- \ldots - \frac{1}{\mu}\,\frac{H_i(\mathbf{x}(T), 0, \ldots, 0, c_m(T), \mathbf{u}, \mu) - H_i(\mathbf{x}(T), 0, \ldots, 0, \mathbf{u}, \mu)}{c_m(T)}(y_m(t) - c_m(T)).$$

Если при каком-нибудь k $(1 \leqslant k \leqslant m)$ $c_k(T) = 0$, то в разложении (П.2) слагаемые, имеющие знаменатель $c_k(T)$, опускаются. В этом случае коэффициент при $y_k(t)$ равен нулю.

В результате этих преобразований система уравнений (П.1) может быть представлена в виде

$$\text{(П.3)} \qquad \frac{d\mathbf{y}}{dt} = \frac{1}{\mu}D(\mathbf{C}(T))\mathbf{y}(t) + \mathbf{F}(t),$$

где $\mathbf{C}(T) = (c_1(T), \ldots, c_m(T))$, $\mathbf{F}(t) = (f_1(t), \ldots, f_m(t))^T$,

$$f_i(t) = \frac{1}{\mu}H_i(\mathbf{x}(t), \mathbf{y}(t), \mathbf{u}, \mu) - \frac{1}{\mu}H_i(\mathbf{x}(T), \mathbf{y}(T), \mathbf{u}, \mu) -$$

$$-\frac{1}{\mu}\,\frac{H_i(\mathbf{x}(T), c_1(T), \ldots, c_m(T), \mathbf{u}, \mu) - H_i(\mathbf{x}(T), 0, c_2(T), \ldots, c_m(T), \mathbf{u}, \mu)}{c_1(T)}(y_1(t) - c_1(T)) -$$

$$- \ldots - \frac{1}{\mu}\,\frac{H_i(\mathbf{x}(T), 0, \ldots, 0, c_m(T), \mathbf{u}, \mu) - H_i(\mathbf{x}(T), 0, \ldots, 0, \mathbf{u}, \mu)}{c_m(T)}(y_m(t) - c_m(T)).$$

Решение уравнения (П.3) можно представить в операторном виде

$$\text{(П.4)} \qquad \mathbf{y}(t) = e^{D(\mathbf{C}(T))(t-T)/\mu}\mathbf{y}(T) + \int\limits_T^t e^{D(\mathbf{C}(T))(t-s)/\mu}\mathbf{F}(s)ds.$$

Предположим, что $\|\mathbf{y}(T)\|_{R_m} \neq 0$. Тогда из структуры оператора $\mathbf{F}(s)$ следует, что при любом как угодно малом ε $(\varepsilon > 0)$, можно подобрать такое Δt, что в интервале $T \leqslant t \leqslant T + \Delta t$ $\|\mathbf{F}(t)\| \leqslant \varepsilon\|\mathbf{y}(t)\|$.

Перейдем в неравенстве (П.4) к нормам

$$\|\mathbf{y}(t)\| \leqslant e^{\Lambda(D(\mathbf{C}(T)))(t-T)/\mu}\|\mathbf{y}(T)\| + \varepsilon \int\limits_T^t e^{\Lambda(D(\mathbf{C}(T)))(t-s)/\mu}\|\mathbf{y}(s)\|ds.$$

Отметим, что здесь использовано известное [13] свойство логарифмической нормы: если $\alpha = \text{const} > 0$, то $\Lambda(\alpha K) = \alpha\Lambda(K)$ для линейного оператора K.

Введя обозначение $\phi(t) = \|\mathbf{y}(t)\|e^{-\Lambda(D(\mathbf{C}(T)))t/\mu}$, предыдущее неравенство представляем в виде

$$\phi(t) \leqslant \phi(T) + \varepsilon \int\limits_T^t \phi(s)ds.$$

Из неравенства Гронуолла – Беллмана следует, что при $T \leqslant t \leqslant T + \Delta t$

$$\phi(t) \leqslant e^{\varepsilon(t-T)}\phi(T).$$

Переходя к $\|\mathbf{y}(t)\|$ имеем

$$\|\mathbf{y}(t)\| \leqslant e^{(\Lambda(D(\mathbf{C}(T)))/\mu+\varepsilon)(t-T)}\|\mathbf{y}(T)\|.$$

Следовательно, если $\mathbf{y}(T) \neq 0$, то в промежутке времени $T \leqslant t \leqslant T + \Delta t$ траектория $\mathbf{y}(t)$ решения $(\mathbf{x}(t), \mathbf{y}(t))$ системы уравнений (1.1) не покидает шара $R(\mathbf{0}, r_1)$ пространства R_m.

Если теперь $\mathbf{y}(T) = \mathbf{0}$, то очевидно имеется интервал времени $T \leqslant t \leqslant T + \Delta t_1$, в течение которого траектория $\mathbf{y}(t)$ решения $(\mathbf{x}(t), \mathbf{y}(t))$ уравнения (1.1) не покидает шара $R(\mathbf{0}, r_1)$ пространства R_m.

Пусть $\Delta t_2 = \min(\Delta t, \Delta t_1)$. Тогда при $T \leqslant t \leqslant T + \Delta t_2$ траектория $\mathbf{y}(t)$ решения $(\mathbf{x}(t), \mathbf{y}(t))$ системы уравнений (1.1) не покидает шара $R(\mathbf{0}, r_1)$ пространства R_m.

Рассмотрим теперь уравнение

$$\text{(П.5)} \qquad \frac{d\mathbf{x}}{dt} = \mathbf{Q}(\mathbf{x}, \mathbf{y}, \mathbf{u}, \mu)$$

в предположении, что $\mathbf{y} \in R(\mathbf{0}, r_1)$ пространства R_m.

Представим $Q_i(\mathbf{x}(T), \mathbf{y}(T), \mathbf{u}, \mu)$ в виде

$$\text{(П.6)} \qquad Q_i(\mathbf{x}(T), \mathbf{y}(T), \mathbf{u}, \mu) =$$
$$= \frac{Q_i(b_1(T), \ldots, b_n(T), \mathbf{y}(T), \mathbf{u}, \mu) - Q_i(0, b_2(T), \ldots, b_n(T), \mathbf{y}(T), \mathbf{u}, \mu)}{b_1(T)} x_1(t) + \ldots$$
$$\ldots + \frac{Q_i(0, \ldots, 0, b_n(T), \mathbf{y}(T), \mathbf{u}, \mu) - Q_i(0, \ldots, 0, \mathbf{y}(T), \mathbf{u}, \mu)}{b_n(T)} x_n(t) -$$
$$- \frac{Q_i(b_1(T), \ldots, b_n(T), \mathbf{y}(T), \mathbf{u}, \mu) - Q_i(0, b_2(T), \ldots, b_n(T), \mathbf{y}(T), \mathbf{u}, \mu)}{b_1(T)}(x_1(t) - b_1(T)) - \ldots$$
$$\ldots - \frac{Q_i(0, \ldots, 0, b_n(T), \mathbf{y}(T), \mathbf{u}, \mu) - Q_i(0, \ldots, 0, \mathbf{y}(T), \mathbf{u}, \mu)}{b_n(T)}(x_n(t) - b_n(T)),$$

где $b_i(T) = x_i(T)$, $i = 1, 2, \ldots, n$.

Если при каком-нибудь k $(1 \leqslant k \leqslant n)$, $b_k(T) = 0$, то в разложении (П.6) слагаемое, имеющее знаменатель $b_k(T)$, опускается. В этом случае коэффициент при $x_k(t)$ равен нулю.

В результате этих преобразований система уравнений (П.5) может быть представлена в виде

$$\text{(П.7)} \qquad \frac{d\mathbf{x}}{dt} = A(\mathbf{B}(T))\mathbf{x}(t) + \mathbf{L}(t),$$

где $\mathbf{B}(T) = (b_1(T), \ldots, b_n(T))$, $\mathbf{L}(t) = (\ell_1(t), \ldots, \ell_n(t))^T$,

$$\ell_i(t) = Q_i(\mathbf{x}(t), \mathbf{y}(t), \mathbf{u}, \mu) - Q_i(\mathbf{x}(T), \mathbf{y}(T), \mathbf{u}, \mu) -$$
$$- \frac{Q_i(b_1(T), \ldots, b_n(T), \mathbf{y}(T), \mathbf{u}, \mu) - Q_i(0, b_2(T), \ldots, b_n(T), \mathbf{y}(T), \mathbf{u}, \mu)}{b_1(T)}(x_1(t) - b_1(T)) - \ldots$$
$$\ldots - \frac{Q_i(0, \ldots, 0, b_n(T), \mathbf{y}(T), \mathbf{u}, \mu) - Q_i(0, \ldots, 0, \mathbf{y}(T), \mathbf{u}, \mu)}{b_n(T)}(x_n(t) - b_n(T)).$$

Решение уравнения (П.7) можно представить в операторном виде

$$\text{(П.8)} \qquad \mathbf{x}(t) = e^{A(\mathbf{B}(T))(t-T)}\mathbf{x}(T) + \int_T^t e^{A(\mathbf{B}(T))(t-s)}\mathbf{L}(s)ds.$$

Исследуем выражение (П.8) в пространстве R_n. Вначале предположим, что $\mathbf{x}(T) \neq \mathbf{0}$. Тогда переходя в (П.8) к нормам, учитывая, что существует интервал $T \leqslant t \leqslant T + \Delta t_3$, в течение которого $\|\mathbf{L}(t)\| \leqslant \varepsilon\|\mathbf{x}(t)\|$ для произвольного, как угодно малого ε, и используя неравенство Гронуолла – Беллмана, имеем

$$\|\mathbf{x}(t)\| \leqslant e^{(\Lambda(A(\mathbf{B}(T))) + \varepsilon)(t-T)}\|\mathbf{x}(T)\|.$$

Если $\mathbf{x}(T) = \mathbf{0}$, то как нетрудно видеть, существует интервал $T \leqslant t \leqslant T + \Delta t_4$, в течение которого траектория решения $\mathbf{x}(t)$ системы уравнений (1.1) не покидает шара $R(\mathbf{0}, r_1)$ пространства R_n.

Пусть $\Delta t_5 = \min(\Delta t_3, \Delta t_4)$. Тогда в интервале $T \leqslant t \leqslant T + \Delta t_5$ траектория $\mathbf{x}(t)$ решения $(\mathbf{x}(t), \mathbf{y}(t))$ системы уравнений (1.1) не покидает шара $R(\mathbf{0}, r_1)$ пространства R_n.

Пусть $\mathbf{z} = (\mathbf{x}, \mathbf{y})$. Очевидно $\|\mathbf{z}\|_{R_s} = \max(\|\mathbf{x}\|_{R_n}, \|\mathbf{y}\|_{R_m})$. Положим $\Delta t^* = \min(\Delta t_2, \Delta t_5)$. Тогда в интервале $T \leqslant t \leqslant T + \Delta t^*$ траектория $(\mathbf{x}(t), \mathbf{y}(t))$ решения уравнения (1.1) не покидает шара $R(\mathbf{0}, r_1)$ в пространстве R_s. Теорема доказана.

Доказательство теоремы 2[1]. Пусть в момент времени T траектория решения $\mathbf{z}(t) = (\mathbf{x}(t), \mathbf{y}(t))$ системы уравнений (1.1) проходит через точку $\mathbf{z}(T) \in R_s$ с нормой $\|\mathbf{z}(T)\|_{R_s} = r$, причем $\|\mathbf{x}(T)\|_{R_n} = q$, $\|\mathbf{y}\|_{R_m} = h$, $r = \max(q, h)$.

Покажем, что при любом $\mu \in (0, \mu_0]$ существует такой отрезок времени Δt_1, в течение которого траектория решения системы (1.1) перейдет со сферы $S(\mathbf{0}, r)$ в шар $R(\mathbf{0}, r_1)$, где $r_1 < e^{-\gamma\Delta t_1/2}r$, где $\gamma = \min(\alpha, \beta_1)$.

Рассмотрим вначале систему уравнений (П.1), которую, как показано выше, можно представить в виде системы (П.3).

При доказательстве предыдущей теоремы было показано, что

$$\|\mathbf{y}(t)\| \leqslant \exp\left(\frac{1}{\mu}(\Lambda(D(\mathbf{C}(T))) + \varepsilon\right)(t - T))\|\mathbf{y}(T)\|.$$

Из условия А4 следует, что

$$\text{(П.9)} \qquad \|\mathbf{y}(t)\| \leqslant \exp((-\beta_1 + \varepsilon)(t - T))\|\mathbf{y}(T)\|.$$

[1]При доказательстве теоремы 2 без дополнительных ссылок используются обозначения, введенные при доказательстве теоремы 1.

Таким образом, существует такой отрезок времени $\Delta t_1'$ ($T \leqslant t \leqslant T + \Delta t_1'$), в течение которого $\varepsilon < \beta_1/2$. Из неравенства (П.9) имеем при $t = T_1' = T + \Delta t_1'$ $\|\mathbf{y}(T)\| \leqslant \exp\{-\beta_1 \Delta t_1'/2\}\|\mathbf{y}(T)\|$.

Рассмотрим уравнение (П.5) при $T \leqslant t$. Как показано при доказательстве теоремы 1, уравнение (П.5) представимо в виде (П.7). Решение уравнения (П.7) представляется в операторном виде выражением (П.8), из которого следует, что

$$\|\mathbf{x}(t)\| \leqslant e^{(\Lambda(A(B(T)))+\varepsilon)(t-T)}\|\mathbf{x}(T)\|.$$

Из условия А2) следует, что

$$\text{(П.10)} \qquad \|\mathbf{x}(t)\| \leqslant e^{(-\alpha+\varepsilon)(t-T)}\|\mathbf{x}(T)\|.$$

Таким образом, существует такой отрезок времени $\Delta t_1''$ ($T \leqslant t \leqslant T + \Delta t_1''$), в течение которого $\varepsilon < \alpha/2$. Из неравенства (П.10) имеем при $t = T_1'' = T + \Delta t_1''$.

$$\|\mathbf{x}(T_1'')\| \leqslant e^{-\alpha \Delta t_1''/2}\|\mathbf{x}(T)\|.$$

Пусть $\Delta t_1 = \min(\Delta t_1', \Delta t_1'')$, $T_1 = T + \Delta t_1$. Тогда $\|\mathbf{x}(T_1)\| \leqslant e^{(-\alpha \Delta t_1)/2}\|\mathbf{x}(T)\|$, $\|\mathbf{y}(T_1)\| \leqslant e^{(-\beta_1 \Delta t_1)/2}\|\mathbf{y}(T)\|$ и, следовательно,

$$\|\mathbf{z}(T_1)\| \leqslant e^{-\gamma \Delta t_1/2}\|\mathbf{z}(T)\|.$$

Аналогичным образом можно показать, что существуют такие интервалы времени $\Delta t_2, \Delta t_3, \ldots$, и т.д., что $r_2 \leqslant \exp\{-\gamma \Delta t_2/2\} r_1$, $r_3 \leqslant \exp\{-\gamma \Delta t_3/2\} r_2$ и т.д.

Таким образом,

$$r_n \leqslant \exp\{-\gamma(\Delta t_1 + \ldots + \Delta t_n)/2\} r,$$

где $\Delta t_k = t_k - t_{k-1}, k = 1, 2, \ldots, t_0 = T$.

Следовательно, траектория решения системы уравнений (1.1) не покидает сферы $S(\mathbf{0}, r)$ пространства E_s.

Пусть T^* – сумма построенных выше интервалов времени Δt_k, начиная с Δt_1. Имеются две возможности: 1) $T^* = \text{const} < \infty$, 2) $T^* = \infty$.

Рассмотрим первую возможность. Покажем, что $\|\mathbf{x}(T + T^*)\| = 0$. Доказательство проведем от противного. Предположим, что $\|\mathbf{x}(T + T^*)\| = d > 0$. Тогда, как показано выше, существует такой отрезок времени $\Delta t^* > 0$, что $\|\mathbf{x}(T + T^* + \Delta t^*)\| \leqslant \exp\{-\gamma \Delta t^*/2\}\|\mathbf{x}(T + T^*)\|$. Из определения T^* следует, что $\Delta t^* = 0$. Таким образом, получено противоречие, из которого следует, что $\|\mathbf{x}(T + T^*)\| = 0$, т.е. решение в данном случае асимптотически устойчиво.

Рассмотрим вторую возможность. Выше было показано, что $\|\mathbf{z}(t_n)\| \leqslant r \exp\{-\gamma(\Delta t_1 + \ldots + \Delta t_n)/2\}$, $n = 1, 2, \ldots$ Учитывая, что $T^* = \infty$, имеем $\lim\limits_{n \to \infty} \|\mathbf{z}(t_n)\| = 0$ при $n \to \infty$. Так как при $t \geqslant t_k$ точка $\mathbf{z}(t_k)$ находится внутри сферы $S(\mathbf{0}, \|\mathbf{z}(t_k)\|)$, то асимптотическая устойчивость решения системы уравнений (1.1) доказана. Теорема доказана.

Доказательства теорем 1′и 2′ подобны доказательствам теорем 1 и 2.

Приведем простой модельный пример, иллюстрирующий построение области устойчивости.

Пусть уравнение возмущенного движения имеет вид:

$$\text{(П.11)} \qquad \begin{aligned} \frac{dx_1}{dt} &= -x_1 + \frac{x_1^3}{3} + \mu x_2^2 x_1 + u_1 x_1 + \mu u_3 x_1 x_3^2, \\ \frac{dx_2}{dt} &= -\mu x_1^2 x_2 + u_2 x_2^3 + \mu u_3 x_2 x_3^2, \\ \mu \frac{dx_3}{dt} &= -\mu^2 u_3 x_1^2 x_3 - \mu^2 u_3 x_2^2 x_3 + (u_1 + u_2 - 3) x_3^3 + u_2 u_3 x_3^5/10 - \mu x_3, \end{aligned}$$

где $\mathbf{u} = (u_1, u_2, u_3)$ – вектор свободных параметров, μ ($\mu > 0$) – малый параметр.

Определим множество Ω_0 значений $\mathbf{u}$ и интервал $0 < \mu \leqslant \mu_0$, при которых движение будет устойчивым.

Матрица, полученная в результате линеаризации правой части системы (П.11) имеет нулевое собственное значение, т.е. рассматриваемый случай – критический.

Введем обозначения:

$$\mathbf{x} = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix},$$

$$A(\mathbf{x}, \mathbf{u}, \mu) = \begin{pmatrix} -x_1 + x_1^3/3 + \mu x_2^2 x_1 + u_1 x_1 + \mu u_3 x_1 x_3^2 \\ -\mu x_1^2 x_2 + u_2 x_2^3 + \mu u_3 x_2 x_3^2 \\ -\mu u_3 x_1^2 x_3 - \mu u_3 x_2^2 x_3 + (u_1 + u_2 - 3) x_3^3/\mu + u_1 u_3 x_3^5/10\mu - x_3. \end{pmatrix}.$$

Тогда

$$A' = \begin{pmatrix} -1 + x_1^2 + \mu x_2^2 + u_1 + \mu u_3 x_3^2 & 2\mu x_1 x_2 & 2\mu u_3 x_1 x_3 \\ -2\mu x_1 x_2 & -\mu x_1^2 + 3u_2 x_2^2 + \mu u_3 x_3^2 & 2\mu u_3 x_2 x_3 \\ -2\mu u_3 x_1 x_3 & -2\mu u_3 x_2 x_3 & a_{33} \end{pmatrix},$$

$$(A')^* = \begin{pmatrix} -1 + x_1^2 + \mu x_2^2 + u_1 + \mu u_3 x_3^2 & -2\mu x_1 x_2 & -2\mu u_3 x_1 x_3 \\ 2\mu x_1 x_2 & -\mu x_1^2 + 3u_2 x_2^2 + \mu u_3 x_3^2 & -2\mu u_3 x_2 x_3 \\ 2\mu u_3 x_1 x_3 & 2\mu u_3 x_2 x_3 & a_{33} \end{pmatrix},$$

$$\frac{1}{2}(A' + (A')^*) = \begin{pmatrix} -1 + x_1^2 + \mu x_2^2 + u_1 + \mu u_3 x_3^2 & 0 & 0 \\ 0 & -\mu x_1^2 + 3u_2 x_2^2 + \mu u_3 x_3^2 & 0 \\ 0 & 0 & a_{33} \end{pmatrix}.$$

Собственные значения матрицы $((A' + (A')^*)/2)^2$ равны $(-1 + x_1^2 + \mu x_2^2 + u_1 + \mu u_3 x_3^2)$, $(-\mu x_1^2 + 3u_2 x_2^2 + \mu u_3 x_3^2)$, a_{33}. Они лежат в левой полуплоскости плоскости комплексной переменной z при выполнении условий

$$\text{(П.12)} \qquad \begin{pmatrix} -1 + x_1^2 + \mu x_2^2 + u_1 + \mu u_3 x_3^2 < 0, \\ -\mu x_1^2 + 3u_2 x_2^2 + \mu u_3 x_3^2 < 0, \\ \dfrac{3x_3^2}{\mu}(u_1 + u_2 - 3) + \dfrac{1}{2\mu} u_1 u_3 x_3^4 - \mu u_3 (x_1^2 + x_2^2) - 1 < 0. \end{pmatrix}.$$

Из системы уравнений (П.12) нетрудно сделать заключение о значениях параметров, при которых система (П.11) асимптотически устойчива. Пусть, например, $-1 \leqslant u_1, u_2, u_3 \leqslant 0$. Тогда система уравнений (П.11) асимптотически устойчива при $0 < \mu \leqslant \mu_0$, где μ_0 – произвольное конечное положительное число.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. *Зубов В.И.* Математические методы исследования систем автоматического регулирования. Л.: Судпромиздат, 1959.
2. *Бойчук Л.М.* Метод структурного синтеза нелинейных систем автоматического управления. М.: Энергия, 1971.

[2] Здесь $a_{33} = -1 - \mu u_3 (x_1^2 + x_2^2) + 3x_3^2 (u_1 + u_2 - 3)/\mu + x_3^4 u_1 u_3 / 2\mu$.

3. *Климушев А.И., Красовский Н.Н.* Равномерная асимптотическая устойчивость системы дифференциальных уравнений с малыми параметрами при производных // Прикл. математика и механика. 1961. Т. 25. Вып. 4. С. 680–690.
4. *Маркечко М.И.* Об асимптотической устойчивости сингулярно возмущенных дифференциальных уравнений // Дифференц. уравнения. 1989. Т. 25. № 10. С. 1698–1705.
5. *Маркечко М.И., Рыбашов М.В.* Об устойчивости сингулярно возмущенных систем // АиТ. 1990. № 7. С. 49–56.
6. *Васильева А.Б., Бутузов В.Ф.* Асимптотическое разложение решений сингулярно-возмущенных уравнений. М.: Наука, 1973.
7. *Виноград З.Э.* Замечание о критическом случае устойчивости особой точки на плоскости // ДАН СССР. 1953. Т. 101. С. 209–212.
8. *Красовский Н.Н.* Об устойчивости движения в критическом случае одного нулевого корня // Мат. сб. 1955. Т. 37. № 1. С. 83–88.
9. *Бойков И.В.* Об устойчивости решений дифференциальных и разностных уравнений в критических случаях // ДАН СССР. 1990. Т. 314. № 6. С. 1298–1300.
10. *Бойков И.В.* Об устойчивости решений дифференциальных и разностных уравнений с недифференцируемыми правыми частями // Дифференц. уравнения. 1993. Т. 29. № 8. С. 1435–1455.
11. *Бойков И.В.* Об одном способе построения областей устойчивости систем автоматического регулирования // Изв. РАН. Техн. кибернетика. 1993. № 2. С. 20–25.
12. *Маркечко М.И., Рыбашов М.В.* Оптимизация квазистационарного режима в линейных системах // АиТ. 1987. № 12. С. 55–65.
13. *Далецкий Ю.А., Крейн М.Г.* Устойчивость решений дифференциальных уравнений в банаховых пространствах. М.: Наука, 1970.

Поступила в редакцию 16.04.96