

Коммутативные вертексные алгебры и их вырождения*

© 2014. Б. Л. Фейгин

Посвящается памяти И. М. Гельфанда

Мы изучаем коммутативные вертексные алгебры, которые возникают как подалгебры в вертексных алгебрах, отвечающих алгебрам Каца–Муди. Мы описываем системы определяющих соотношений, а также вырождения в алгебры с квадратичными соотношениями. Полученные результаты могут быть использованы для получения фермионных формул для характеров.

Введение

Пусть A — коммутативная алгебра. С ней можно связать коммутативную вертексную алгебру \mathcal{O}_A , ее образующие — токи $c(z)$, $c \in A$, а операторное произведение имеет вид $c_1(z)c_2(w) = c_1c_2(z) + \dots$. Например, если A — одномерная алгебра с тривиальным умножением, то \mathcal{O}_A — алгебра с одним генератором $c(z)$ и определяющим соотношением $c(z)^2 = 0$. Алгебры \mathcal{O}_A естественно возникают при изучении интегрируемых представлений аффинных алгебр. Скажем, если взять в алгебре Ли \mathfrak{sl}_2 нильпотентный элемент e и образовать ток $e(z)$ в $\widehat{\mathfrak{sl}}_2$, то в интегрируемом представлении уровня k ток $e(z)^{k+1}$ действует нулем. Более точно: в вертексной алгебре, отвечающей аффинной алгебре $\widehat{\mathfrak{sl}}_2$ уровня k , содержится абелева подалгебра \mathcal{O}_A , где $A = t\mathbb{C}[t]/(t^{k+1})$. С алгебрами Ли $\widehat{\mathfrak{sl}}_n$ связано много примеров. Зафиксируем в \mathfrak{sl}_n абелеву подалгебру $\{E_{1,s}\}_{2 \leq s \leq n}$, где $E_{1,s}$ — стандартные матричные единицы в \mathfrak{sl}_n . Пусть $a_i(z)$ — ток, соответствующий элементу $E_{1,i+1}$. В интегрируемых $\widehat{\mathfrak{sl}}_n$ -модулях уровня k токи $a_1(z), \dots, a_{n-1}(z)$ удовлетворяют соотношениям $a_1(z)^{\alpha_1} \dots a_{n-1}(z)^{\alpha_{n-1}} = 0$ для всех наборов $\alpha_1, \dots, \alpha_{n-1}$, таких, что $\sum \alpha_i = k + 1$. Можно показать, что вертексная алгебра $\widehat{\mathfrak{sl}}_n$ уровня k содержит подалгебру \mathcal{O}_A , $A = \mathbb{C}[t_1, \dots, t_{n-1}]_+ / J_{k+1}$, где $\mathbb{C}[t_1, \dots, t_{n-1}]_+$ — алгебра полиномов без свободного члена, а J_{k+1} — идеал, порожденный одночленами $t_1^{\alpha_1} \dots t_{n-1}^{\alpha_{n-1}}$, $\sum \alpha_i = k + 1$.

Другой источник абелевых вертексных алгебр — процедура абелинизации, или вырождения, которую можно применить к неабелевым вертексным алгебрам. Наиболее известный пример (см. [4]): возьмем вертексную алгебру \mathcal{O} , отвечающую минимальной модели алгебры Вирасоро типа $(2, 2p + 1)$. На \mathcal{O} введем фильтрацию Пуанкаре–Биркгофа–Витта, положив, что генератор $T(z)$, отвечающий алгебре Вирасоро, имеет фильтрацию 1. Тогда присоединенная градуированная вертексная алгебра абелева и совпадает с \mathcal{O}_A , где $A = t\mathbb{C}[t]/(t^{p+1})$. Несколько менее известный пример: возьмем минимальную модель алгебры Ви-

*Работа была частично поддержана грантами РФФИ 13-01-12401-офи_м, 12-01-00836-а. Исследование осуществлено в рамках Программы «Научный фонд НИУ ВШЭ» в 2013–2014 гг., проект №12-01-0016.

расоро типа $(3, 10)$. Тогда соответствующую вертексную алгебру можно расширить примарным полем $\varphi_{1,9}$ (это последнее поле в таблице Каца). На полученной алгебре можно ввести фильтрацию, так что присоединенная градуированная алгебра есть \mathcal{O}_A , где $A = \mathbb{C}[t_1, t_2]_+ / (t_1^2, t_1 t_2, t_2^3)$. Аналогичное утверждение справедливо для минимальных моделей типа $(3, p)$. Если взять вертексную алгебру $\widehat{\mathfrak{sl}}_2$ уровня 1 и построить по ней присоединенную градуированную по фильтрации Пуанкаре–Биркгофа–Витта, то получится \mathcal{O}_A , где $A = \mathbb{C}[t_1, t_2, t_3]_+ / J$, а J порожден пятью квадратичными элементами. (Отождествим $\mathbb{C}[t_1, t_2, t_3]$ с симметрической алгеброй от \mathfrak{sl}_2 , $S^2(\mathfrak{sl}_2)$ — сумма 5-мерного и 1-мерного представлений алгебры \mathfrak{sl}_2 и идеал J порожден пятимерной компонентой.)

К сожалению, не существует регулярных способов изучать абелинизации, каждый случай приходится рассматривать отдельно. Примеры показывают, что в ряде случаев получается алгебра вида \mathcal{O}_A , а, стало быть, характеры некоторых представлений таких алгебр обладают хорошими модулярными свойствами. В общем случае не видно никаких причин, почему характеры абелевых вертексных алгебр должны быть модулярными функциями или формами.

Характеры представлений алгебр \mathcal{O}_A вычислять трудно, пожалуй, единственный известный способ — вырождать алгебру \mathcal{O}_A в абелеву вертексную алгебру с квадратичными соотношениями, а для характеров представлений алгебр с квадратичными соотношениями имеется явная (правда, довольно сложная) формула, которая называется формулой Гордона (см. [2], [3]).

В этой работе обобщается феномен, найденный в [7], где изучалось действие абелевой подалгебры $\{E_{1,2}(z), E_{2,3}(z)\}$ алгебры $\widehat{\mathfrak{sl}}_3$ в интегрируемых представлениях этой алгебры $\widehat{\mathfrak{sl}}_3$. Наряду с прочими были получены следующие результаты. Пусть $A_k = \mathbb{C}[t_1, t_2]_+ / (t_1^\alpha t_2^\beta, \alpha + \beta = k + 1)$. Алгебра, порожденная подалгеброй $\{E_{1,2}(z), E_{2,3}(z)\}$ в $U(\widehat{\mathfrak{sl}}_3)$ уровня k , изоморфна \mathcal{O}_{A_k} . Существует плоское семейство абелевых вертексных алгебр $\mathcal{O}_{A_k}[\hbar]$, которые при $\hbar \neq 0$ все изоморфны \mathcal{O}_{A_k} , а при $\hbar = 0$ получается коммутативная алгебра с генераторами $b_1(z), \dots, b_k(z)$ и $c_1(z), \dots, c_k(z)$ и определяющими квадратичными соотношениями

$$b_\alpha^{(i)}(z)b_\beta(z) = c_\alpha^{(i)}(z)c_\beta(z) = 0, \quad \alpha \leq \beta, \quad i < 2\alpha,$$

$$b_\alpha^{(i)}(z)c_\beta(z) = 0, \quad i < \alpha + \beta - k$$

(здесь верхний индекс (i) обозначает i -ю производную по z).

В §1 мы определяем наш основной объект: коммутативную вертексную подалгебру в $\widehat{\mathfrak{sl}}_n$ уровня k . А именно, мы указываем коммутативную подалгебру \mathfrak{a} в \mathfrak{sl}_n , а затем исследуем действие $\mathfrak{a} \otimes \mathbb{C}[t, t^{-1}]$ в интегрируемых представлениях уровня k . Аналогичная абелева подалгебра есть в любой простой алгебре Ли \mathfrak{g} типов A, D, E . Для того чтобы ее описать, раскрасим схему Дынкина в два цвета — черный и белый, так чтобы любое ребро соединяло вершины разного цвета. Подалгебра натянута на векторы, отвечающие положительным простым корням белого цвета и отрицательным простым корням черного цвета. Мы исследуем случай \mathfrak{sl}_n , но в конце второго параграфа мы покажем, что наши методы работают и в более общем случае. В §1 мы описываем абелеву вертексную подалгебру, порожденную алгеброй $\mathfrak{a} \otimes \mathbb{C}[t, t^{-1}]$ в вертексной алгебре $\widehat{\mathfrak{sl}}_n$ уровня k , т. е. явно указываем определяющие соотношения (теорема 1.1). В теореме 1.3

мы приводим абелеву вертексную алгебру с квадратичными соотношениями, в которую нашу алгебру можно выродить. В конце §1 мы указываем некоторую абелеву подалгебру в вертексной алгебре, отвечающей тороидальной алгебре \mathfrak{sl}_n , и формулируем аналоги теорем 1.1 и 1.3 для нее. В §2 содержится схема доказательства теорем 1.1 и 1.3, а также приводятся примеры алгебр, для которых аналоги теорем 1.1 и 1.3 верны. В §3 мы определяем аналог модуля Демазюра для абелевой вертексной алгебры и вычисляем его характер. Кроме того, в этом параграфе обсуждаются интересные примеры моделей демазюровского типа.

Два слова о терминологии. Вертексными алгебрами или вертекс-операторными алгебрами мы называем алгебры с ассоциативным операторным произведением, т. е. мы не требуем, чтобы в наших алгебрах содержалась алгебра Ви-расоро. Токи во всех вертексных алгебрах, которые мы рассматриваем, зависят от переменной z (или от z, w , если речь идет об операторном произведении).

§1. Формулировка основных теорем

Пусть \mathfrak{g} — полупростая алгебра Ли и $\widehat{\mathfrak{g}}$ — соответствующая аффинная алгебра Каца–Мууди, т. е. центральное расширение алгебры Ли $\mathfrak{g} \otimes \mathbb{C}[t, t^{-1}]$. Пусть \mathfrak{a} — подалгебра в \mathfrak{g} . Тогда в $\widehat{\mathfrak{g}}$ имеется подалгебра $\widehat{\mathfrak{a}}$ — центральное расширение алгебры Ли $\mathfrak{a} \otimes \mathbb{C}[t, t^{-1}]$. Мы будем изучать следующий пример: $\mathfrak{g} = \mathfrak{sl}_n$, \mathfrak{a} — подалгебра, порожденная матричными единицами $E_{n,n-1}, E_{n-2,n-1}, E_{n-2,n-3}, \dots$ (т. е. отрицательный простой корень, потом положительный простой корень, потом снова отрицательный и т. д.). Алгебра \mathfrak{a} состоит из нильпотентных элементов, а потому 2-цикл алгебры $\mathfrak{sl}_n \otimes \mathbb{C}[t, t^{-1}]$, ограниченный на $\mathfrak{a} \otimes \mathbb{C}[t, t^{-1}]$, равен нулю. Иными словами, имеется вложение алгебры $\mathfrak{a} \otimes \mathbb{C}[t, t^{-1}]$ в $\widehat{\mathfrak{sl}}_n$. В $\mathfrak{a} \otimes \mathbb{C}[t, t^{-1}]$ выберем стандартный базис $E_{n,n-1}[s], E_{n-2,n-1}[s], E_{n-2,n-3}[s], \dots$, состоящий из Фурье-компонент. Для удобства изменим обозначения: положим $a_1[s] = E_{n,n-1}[s], a_2[s] = E_{n-2,n-1}[s], a_3[s] = E_{n-2,n-3}[s], \dots$. Соответствующие образующим $a_i[s]$ токи $a_i(z) = \sum_{i \in \mathbb{Z}} a_i[s] z^{-s}$ порождают абелеву вертексную алгебру \mathfrak{A} . Напомним, что аффинная алгебра $\widehat{\mathfrak{sl}}_n$ определяет семейство вертексных алгебр B_k , $k \in \mathbb{C}$, где центральный элемент действует умножением на k . При рациональных $k > -n$ в B_k имеется максимальный двусторонний идеал J_k . Обозначим через B_k^{red} факторалгебру B_k/J_k . Обозначим через $\mathfrak{A}_k^{\text{red}}$ подалгебру в B_k^{red} , порожденную генераторами $a_i(z)$.

Теорема 1.1. *Пусть $k \in \mathbb{Z}$, $k \geq 0$. Определяющие соотношения в алгебре $\mathfrak{A}_k^{\text{red}}$ имеют вид*

$$a_i(z)^x a_{i+1}(z)^y = 0, \quad 1 \leq i \leq n-1, \quad x+y = k+1.$$

Таким образом, алгебра $\mathfrak{A}_k^{\text{red}}$ изоморфна алгебре \mathcal{O}_A , где

$$A = \mathbb{C}[t_1, \dots, t_n]_+ / (t_i^x t_{i+1}^y, \quad x+y = k+1, \quad i = 1, \dots, n).$$

Вторая наша теорема описывает вырождение алгебры $\mathfrak{A}_k^{\text{red}}$ до квадратичной вертексной алгебры с простыми мономиальными соотношениями.

Коммутативная вертексная алгебра с квадратичными соотношениями строится по неотрицательной целочисленной квадратной симметричной $N \times N$ -матрице $M = (m_{i,j})$ и определяется как вертексная алгебра $V(M)$ с генераторами $b_i(z)$, $1 \leq i \leq N$, такая, что определяющие соотношения квадратичны

и имеют вид $b_i^{(\alpha)}(z)b_j(z) = 0$, где $b_i^{(\alpha)}(z)$ — производная тока $b_i(z)$ по z порядка α и $\alpha < m_{i,j}$.

Замечание 1.2. Операторное произведение в такой алгебре имеет вид

$$b_i(z)b_j(w) = \sum_{s \geq 0} (z-w)^{m_{i,j}+s} b_{i,j}^s(z).$$

Это означает, что в представлении этой алгебры $V(M)$ матричный элемент $\langle v_1 | b_i(z)b_j(w) | v_2 \rangle$ равен $(z-w)^{m_{i,j}} P(z,w)$, где $P(z,w)$ — полином Лорана. Отметим еще, что можно модифицировать определение алгебры $V(M)$ так, чтобы оно работало для любых целочисленных матриц M .

Теорема 1.3. *Существует плоское семейство вертекс-операторных алгебр $\mathcal{O}[\hbar]$, $\hbar \in \mathbb{C}$, такое, что $\mathcal{O}[\hbar] \simeq \mathfrak{A}_k^{\text{red}}$, если $\hbar \neq 0$, а $\mathcal{O}[0]$ изоморфно квадратичной вертекс-операторной алгебре, построенной по матрице M , описанной ниже.*

Порядок матрицы M равен $(n-1)k$. Занумеруем ее строки и столбцы парами (a,b) , $1 \leq a \leq n-1$, $1 \leq b \leq k$. Тогда

$$m_{(a,b),(a',b')} = \begin{cases} 2 \min(b, b'), & \text{если } a = a', \\ 0, & \text{если } |a - a'| = 1, b' + b \leq k, \\ b' + b - k, & \text{если } |a - a'| = 1, b' + b \geq k, \\ 0, & \text{если } |a - a'| > 1, \end{cases}$$

где $m_{(a,b),(a',b')}$ — матричный элемент в строке (a,b) и столбце (a',b') .

Мы приведем сейчас пример абелевой вертексной алгебры, которая возникает при изучении представлений алгебры двойных токов. Рассмотрим алгебру токов на $\mathbb{C}^* \times \mathbb{C}$ со значениями в \mathfrak{sl}_n , т.е. $\mathfrak{sl}_n \otimes \mathbb{C}[t, t^{-1}, x]$. Алгебру Ли $\mathfrak{sl}_n \otimes \mathbb{C}[t, t^{-1}, x]$ можно центрально расширить посредством пространства $\Omega^1(\mathbb{C}^* \times \mathbb{C})/d\Omega^0(\mathbb{C}^* \times \mathbb{C})$; 2-коцикл имеет вид $\omega(f, g) = \mu \langle df, g \rangle$, $f, g \in \mathfrak{sl}_n \otimes \mathbb{C}[t, t^{-1}, x]$. Здесь $\langle \cdot, \cdot \rangle$ — форма Киллинга на \mathfrak{sl}_n , $\langle df, g \rangle$ есть 1-форма на $\mathbb{C}^* \times \mathbb{C}$, а μ — проекция $\Omega^1 \rightarrow \Omega^1/d\Omega^0$. Соответствующее коциклу ω центральное расширение называется двойной аффинной алгеброй и обозначается через $\widehat{\widehat{\mathfrak{sl}}}_n$.

Нам будет нужна несколько меньшая алгебра $P \subset \widehat{\widehat{\mathfrak{sl}}}_n$, она порождена подалгебрами $\mathfrak{sl}_n \otimes x\mathbb{C}[t, t^{-1}]$ и $\mathfrak{sl}_n \otimes \mathbb{C}[t, t^{-1}]$.

Пусть C — абелева алгебра, порожденная генератором $c(z)$. Существует гомоморфизм $\theta(u)$, отображающий алгебру P в $U(\mathfrak{sl}_n) \otimes C$; $\theta(u)$ отображает $\mathfrak{sl}_n \otimes \mathbb{C}[t, t^{-1}]$ на $\widehat{\mathfrak{sl}}_n \otimes 1$ и ток $l(z)x \in \mathfrak{sl}_n \otimes x\mathbb{C}[t, t^{-1}]$, $l \in \mathfrak{sl}_n$, отображается в $ul(z) \otimes c(z)$. Используя отображение $\theta(u)$, можно построить гомоморфизм $P \rightarrow B_k^{\text{red}} \otimes C$, $k > 0$.

Пусть $n = 2l$. Рассмотрим в P абелеву подалгебру $\widehat{\mathfrak{a}}$. Базисом в ней служат токи $E_{1,2}(z), E_{2,3}(z), E_{3,4}(z), \dots, E_{2l-1,2l}(z)$, а также $x E_{1,2l}(z) \in \mathfrak{sl}_n \otimes x\mathbb{C}[t, t^{-1}]$. Эти токи мы обозначим через $a_1(z), \dots, a_{2l}(z)$. Индексы $1, \dots, 2l$ отождествим с элементами группы $\mathbb{Z}/2l\mathbb{Z}$. Пусть \mathfrak{F}_k — подалгебра в $B_k^{\text{red}} \otimes C$, порожденная образами токов $a_i(z)$ при гомоморфизме $\theta(u)$, $u \neq 0$.

Теорема 1.4. (а) *Алгебра \mathfrak{F}_k коммутативна и порождена токами $a_i(z)$, $i \in \mathbb{Z}/2l\mathbb{Z}$, а определяющие соотношения имеют вид $a_i(z)^x a_{i+1}(z)^y = 0$ при $x + y = k + 1$.*

(b) Существует плоское семейство коммутативных вертексных алгебр $\mathcal{O}[\hbar]$, $\hbar \in \mathbb{C}$, такое, что $\mathcal{O}[\hbar] \simeq \mathfrak{P}_k$ при $\hbar \neq 0$, а алгебра $\mathcal{O}[0]$ изоморфна квадратичной алгебре, построенной по следующей матрице M : ее строки и столбцы занумерованы парами (a, b) , $a \in \mathbb{Z}/2\mathbb{Z}$, $1 \leq b \leq k$, и

$$m_{(a,b),(a',b')} = \begin{cases} 2 \min(b, b'), & \text{если } a = a', \\ 0, & \text{если } a - a' = \pm 1, b' + b \leq k, \\ b' + b - k, & \text{если } a - a' = \pm 1, b' + b \geq k, \\ 0 & \text{в противном случае.} \end{cases}$$

§2. Построение вырождения в квадратичную вертексную алгебру

Квадратичную вертексную алгебру можно реализовать как подалгебру в решетчатой алгебре. Для того чтобы это объяснить, напомним некоторые основные свойства решетчатых алгебр (см. [8]). Пусть \mathfrak{h} — векторное пространство с невырожденной квадратичной формой $\langle \cdot, \cdot \rangle$. С парой \mathfrak{h} , $\langle \cdot, \cdot \rangle$ свяжем вертексную алгебру (алгебру Гейзенберга) — она порождена операторами $h(z)$, $h \in \mathfrak{h}$, а операторное произведение имеет вид $h_1(z)h_2(w) = \langle h_1, h_2 \rangle (z-w)^{-2} + \dots$. Из этого следует, что $[h_1(z), h_2(w)] = \delta'(z/w) \langle h_1, h_2 \rangle$, δ' — производная дельта-функции. Алгебру Гейзенберга можно расширить, добавив вертексные операторы $p(z)$, $p \in \mathfrak{h}$. Операторные произведения устроены так:

$$h(z)p(w) = (z-w)^{-1} \langle h, p \rangle p(z) + \dots, \quad p_1(z)p_2(w) = (z-w)^{\langle p_1, p_2 \rangle} (p_1 + p_2)(z) + \dots$$

Явная формула для $p(z)$ — экспонента, ее можно найти в [8].

Пусть задана матрица $M = (m_{i,j})$ порядка N . Возьмем пространство \mathfrak{h} и систему N линейно независимых векторов p_1, \dots, p_N в нем, таких, что $\langle p_i, p_j \rangle = m_{i,j}$.

Предложение 2.1. *Вертексная алгебра, порожденная операторами $p_i(z)$, изоморфна квадратичной алгебре $V(M)$.*

Фундаментальные представления алгебры $\widehat{\mathfrak{sl}}_n$ могут быть построены посредством вложения B_1^{red} в решетчатую алгебру. Эта конструкция принадлежит Кацу и Френкелю [6] и соотносит токам из $\widehat{\mathfrak{sl}}_n$ вертексные операторы. При ограничении на алгебру $\widehat{\mathfrak{a}}$ мы получаем гомоморфизм $a_i(z) \rightarrow p_i(z)$, где $\langle p_i, p_i \rangle = 2$, $\langle p_i, p_{i+1} \rangle = 1$ и $\langle p_i, p_j \rangle = 0$ при $|i - j| > 1$. Отметим, что в конструкции Каца-Френкеля имеются подкручивающие коциклы. При ограничении на $\widehat{\mathfrak{a}}$ они тривиализуются. Мы получаем доказательство теорем 1.1 и 1.3 при $k = 1$. Случай большего k получается при помощи тензорного произведения k копий представлений уровня один.

Возьмем векторное пространство \mathfrak{h} достаточно большой размерности с невырожденным скалярным произведением и систему векторов p_i^α , $1 \leq \alpha \leq k$, $1 \leq i \leq n - 1$, таких, что

$$\langle p_i^\alpha, p_j^\beta \rangle = \begin{cases} 0, & \alpha \neq \beta, \\ 0, & |i - j| > 1, \\ 2, & \alpha = \beta, i = j, \\ 1, & \alpha = \beta, |i - j| = 1. \end{cases}$$

Отображение $\varphi: a_i(z) \rightarrow \sum_{\alpha=1}^k p_i^\alpha(z)$ дает вложение алгебры $\mathfrak{A}_k^{\text{red}}$ в решетчатую алгебру. Подкрутим теперь гомоморфизм φ , сделав его зависящим от параметра $\hbar \in \mathbb{C}$:

$$\begin{aligned} \varphi(\hbar): a_i(z) &\rightarrow \sum_{\alpha=1}^k p_i^\alpha(z) \hbar^{\alpha-1} \quad \text{при нечетных } i, \\ \varphi(\hbar): a_i(z) &\rightarrow \sum_{\alpha=1}^k p_i^\alpha(z) \hbar^{k-\alpha} \quad \text{при четных } i. \end{aligned}$$

Понятно, что при $\hbar \neq 0$ отображение $\varphi(\hbar)$ является вложением алгебры $\mathfrak{A}_k^{\text{red}}$ в решетчатую алгебру. При $\hbar = 0$ образ значительно меньше. Мы построили плоское семейство $\text{Im } \varphi(\hbar)$ подалгебр в решетчатой алгебре, у этого семейства имеется предел при $\hbar = 0$. Обозначим этот предел через $\mathfrak{A}_k^{\text{red}}(0)$. В $\mathfrak{A}_k^{\text{red}}(0)$, прежде всего, есть образ отображения $\varphi(0)$, т. е. $p_1^1(z), p_2^k(z), p_3^1(z), \dots, p_{n-1}^x(z)$, где x равно 1 или k в зависимости от четности n . Образ оператора $a_1(z)^2$ при отображении $\varphi(0)$ равен нулю, однако

$$\lim_{\hbar \rightarrow 0} \hbar^{-1} \varphi(\hbar)(a_1(z)^2) = p_1^1(z)p_1^2(z) = (p_1^1 + p_1^2)(z).$$

Стало быть, оператор $(p_1^1 + p_1^2)(z)$ лежит в алгебре $\mathfrak{A}_k^{\text{red}}(0)$. Аналогичным образом, рассматривая лидирующий член $\varphi(\hbar)(a_1(z)^3)$ при $\hbar \rightarrow 0$, находим, что оператор $(p_1^1 + p_1^2 + p_1^3)(z)$ лежит в алгебре $\mathfrak{A}_k^{\text{red}}(0)$. Продедаем тоже самое для всех токов $a_i(z)$. Мы установим, что в алгебре $\mathfrak{A}_k^{\text{red}}(0)$ имеются следующие вертексные операторы:

$$\begin{aligned} &p_1^1(z), (p_1^1 + p_1^2)(z), \dots, (p_1^1 + p_1^2 + \dots + p_1^k)(z), \\ &p_2^k(z), (p_2^k + p_2^{k-1})(z), \dots, (p_2^k + p_2^{k-1} + \dots + p_2^1)(z), \\ &p_3^1(z), (p_3^1 + p_3^2)(z), \dots, (p_3^1 + p_3^2 + \dots + p_3^k)(z), \\ &\dots \end{aligned} \tag{2.1}$$

Матрица скалярных произведений этого набора векторов — в точности матрица M , описанная после формулировки теоремы 1.3. Поскольку алгебра, порожденная вертексными операторами, — это алгебра с квадратичными соотношениями, то для доказательства теоремы 1.3 достаточно показать, что алгебра $\mathfrak{A}_k^{\text{red}}(0)$ порождена вертексными операторами (2.1). Покажем, как это сделать в случае $n = 2$. Пусть C — абелева вертекс-операторная алгебра, порожденная током $d(z)$ (без дополнительных соотношений), и пусть $D_i(z) = d(z)^i$. Токи $D_i(z)$ удовлетворяют очевидной системе квадратично-линейных соотношений: $D_i(z)D_j(z) = D_{i+j}(z)$. Нам понадобится более сложная система квадратичных соотношений между операторами $D_i(z)$, которая, разумеется, вытекает из этой более простой. Фиксируем $i, j \geq 1, i \geq j$, и положим

$$\begin{aligned} X_{i,j}(\varepsilon) &= D_{i+j}(z + \varepsilon) - \binom{2j}{1} D_{i+j-1}(z + \varepsilon)D_1(z) \\ &\quad + \binom{2j}{2} D_{i+j-2}(z + \varepsilon)D_2(z) - \dots + D_{i-j}(z + \varepsilon)D_{2j}(z). \end{aligned}$$

Тогда

$$\frac{\partial^m X_{i,j}}{\partial \varepsilon^m} = 0 \quad \text{при } m < 2j. \tag{2.2}$$

Набор этих равенств — это соотношения между токами $D_i(z)$, и они являются определяющим соотношениями в алгебре C . При $j = 1$ мы получаем два соотношения: $D_i(z)D_1(z) = D_{i+1}(z)$ и $(i+1)D_1'(z)D_i(z) = D_{i+1}'(z)$.

Предложение 2.2. Пусть C_k — абелева вертекс-операторная алгебра, порожденная током $d(z)$, с определяющим соотношением $d(z)^{k+1} = 0$. Тогда операторы $D_i(z) = d(z)^i$, $i \leq k$, удовлетворяют квадратичным соотношениям (2.2), в которых $D_i(z) = 0$ при $i > k$.

Используем теперь это предложение в нашей ситуации. Алгебра C_k отображается в решетчатую алгебру с помощью $\varphi(\hbar) : d(z) \rightarrow p_1^1(z) + \hbar p_2^1(z) + \dots + \hbar^{k-1} p_k^1(z)$. При $\hbar \rightarrow 0$ оператор $D_i(z)$ стремится к произведению $p_1(z) \cdots p_i(z) = \tilde{D}_i(z)$. Операторы $D_i(z)$ удовлетворяют квадратичным соотношениям, описанным в предложении 2.2, и можно показать, что эти соотношения стремятся к квадратичным соотношениям в алгебре, порожденной операторами $\tilde{D}_i(z)$, которые являются определяющими. Из этого следует, что соотношения, описанные в предложении 2.2, являются определяющими, а потому отображение $\varphi(\hbar)$ является вложением, а также что мы имеем плоское семейство алгебр, зависящее от \hbar , и при $\hbar = 0$ это алгебра, порожденная вертексными операторами. Все это вместе дает нам доказательство теорем 1.1 и 1.3 при $n = 2$.

При больших n будем рассуждать аналогичным образом. Нужно описать операторную алгебру из теоремы 1.1 как квадратично-линейную алгебру, а затем проследить, что происходит с соотношениями в пределе, когда $\hbar \rightarrow 0$.

Предложение 2.3. Алгебра с образующими $a_i(z)$, $1 \leq i \leq n-1$, и соотношениями из теоремы 1.1 может быть описана как алгебра с генераторами $A_i^s(z) = a_i(z)^s$, $1 \leq s \leq k$, которые удовлетворяют следующим соотношениям:

- при фиксированном i операторы $A_i^1(z), \dots, A_i^k(z)$ удовлетворяют соотношениям из предложения 2.2,
- $(A_i^s)^{(r)}(z)A_{i+1}^t(z) = 0$ при $r < s+t-k$, где $(A_i^s)^{(r)}(z)$ — производная порядка r по z .

Абелевы вертексные алгебры, которые мы описывали, являются частным случаем следующей конструкции. Пусть задан граф Γ без кратных ребер. Предположим, что вершины графа Γ можно раскрасить в два цвета (черный и белый), так что каждое ребро соединяет вершины разных цветов. С графом Γ мы свяжем последовательность коммутативных вертексных алгебр $\mathcal{O}_k(\Gamma)$, $k = 1, 2, \dots$. Алгебра $\mathcal{O}_k(\Gamma)$ порождена генераторами $a_\gamma(z)$, где γ — вершины графа, а соотношения имеют вид $a_{\gamma_1}(z)^x a_{\gamma_2}(z)^y = 0$, если вершины γ_1 и γ_2 соединены ребром и $x+y = k+1$. Очевидно, что алгебра $\mathcal{O}_k(\Gamma)$ изоморфна алгебре \mathcal{O}_A , где A — коммутативная алгебра с понятными соотношениями. Легко видеть, что имеется операция коумножения

$$\mathcal{O}_{k_1+k_2}(\Gamma) \rightarrow \mathcal{O}_{k_1}(\Gamma) \otimes \mathcal{O}_{k_2}(\Gamma), \quad a_\gamma(z) \mapsto a_\gamma(z) \otimes 1 + 1 \otimes a_\gamma(z).$$

При $k = 1$ алгебра $\mathcal{O}_1(\Gamma)$ реализуется как подалгебра в решетчатой вертекс-операторной алгебре, $a_\gamma(z)$ — вертексные операторы. Построим семейство отображений $\varphi(\hbar)$ из $\mathcal{O}_k(\Gamma)$ в $\mathcal{O}_1(\Gamma) \otimes \dots \otimes \mathcal{O}_1(\Gamma)$ (k раз):

$$\varphi(\hbar)a_\gamma(z) = \begin{cases} a_\gamma(z) \otimes 1 \otimes \cdots \otimes 1 + \hbar 1 \otimes a_\gamma(z) \otimes 1 \otimes \cdots \otimes 1 + \cdots, & \gamma - \text{белая вершина,} \\ \hbar^{k-1} a_\gamma(z) \otimes 1 \otimes \cdots \otimes 1 + \hbar^{k-2} 1 \otimes a_\gamma(z) \otimes 1 \otimes \cdots \otimes 1 + \cdots, & \gamma - \text{черная вершина.} \end{cases}$$

В тензорном произведении $\mathcal{O}_1(\Gamma) \otimes \cdots \otimes \mathcal{O}_1(\Gamma)$ (k раз) получается семейство подалгебр, зависящее от параметра \hbar . При $\hbar \rightarrow 0$ алгебра вырождается в квадратичную вертексную алгебру, причем матрица M строится по тому же правилу, что и теоремах 1.3 и 1.4. Заметим, что графы Γ в этих двух теоремах — это графы Дынкина, в первом случае для алгебры типа A_n , во втором случае для аффинной алгебры $A_n^{(1)}$. Схема доказательства во всех случаях одна и та же: мы находим в $\mathcal{O}_k(\Gamma)$ систему образующих, которые удовлетворяют квадратично-линейным соотношениям, и показываем, что при $\hbar \rightarrow 0$ эти соотношения вырождаются в соотношения в квадратичной алгебре. Эти рассуждения доказывают, что отображение $\varphi[\hbar]$ при $\hbar \neq 0$ — вложение. Возможно, что этот факт верен для любых графов, а не только для тех, вершины которых можно раскрасить в два цвета. Однако, как доказывать утверждения в общей ситуации, непонятно, поскольку процедура вырождения для общего графа не работает.

§3. Модули демазюровского типа

Пусть $a_1(z), \dots, a_n(z)$ — образующие алгебры $\mathfrak{A}_1^{\text{red}}$. Напомним, что соотношения в ней — это $a_i(z)^2 = 0$, $a_i(z)a_{i+1}(z) = 0$. Пусть $\vec{l} = (l_1, \dots, l_n)$, $l_1 \leq \dots \leq l_n$, — вектор с неотрицательными целыми коэффициентами. Обозначим через $R_{\vec{l}}$ представление алгебры $\mathfrak{A}_1^{\text{red}}$, индуцированное тривиальным представлением подалгебры $\mathfrak{A}_1^{\text{red}}[\vec{l}]$, порожденной Фурье-компонентами $a_j[s]$, $1 \leq j \leq n$, $s \geq l_j$. Пространство $R_{\vec{l}}$ — это представление абелевой алгебры $\mathfrak{a} \otimes \mathbb{C}[t, t^{-1}]$. Модуль Демазюра $D_{\vec{l}}$ мы определим как $U(\mathfrak{a} \otimes \mathbb{C}[t])$ -подмодуль в $R_{\vec{l}}$, порожденный циклическим вектором. Заметим, что при $n = 3$ $D_{\vec{l}}$ является подпространством в некотором интегрируемом представлении алгебры $\widehat{\mathfrak{sl}}_3$ уровня 1, порожденным экстремальным вектором. Оно совпадает с одним из модулей Демазюра.

Алгебра $\mathfrak{A}_1^{\text{red}}$ естественно градуирована n -мерной решеткой, и эту градуировку наследует модуль $D_{\vec{l}}$:

$$D_{\vec{l}} = \bigoplus_{j_1, \dots, j_n} D_{\vec{l}}[j_1, \dots, j_n].$$

Алгебра $\mathfrak{A}_1^{\text{red}}$ имеет еще одну градуировку, по «энергии»: $\deg a_i[s] = s$, L_0 — соответствующий оператор градуировки. Мы будем считать, что L_0 -градуировка циклического вектора равняется нулю. Величину $\text{tr } q^{L_0}$ будем называть q -размерностью и обозначать через \dim_q . Ниже мы используем обозначение $\begin{bmatrix} a \\ b \end{bmatrix}_q$ для q -биномиального коэффициента,

$$\begin{bmatrix} a \\ b \end{bmatrix}_q = \frac{(1-q) \cdots (1-q^a)}{(1-q) \cdots (1-q^{a-b})(1-q) \cdots (1-q^b)}.$$

Предложение 3.1. *Имеем*

$$\dim_q D_{\vec{l}}[j_1, \dots, j_n] = \begin{bmatrix} l_1 \\ j_1 \end{bmatrix}_q \begin{bmatrix} l_2 - j_1 \\ j_2 \end{bmatrix}_q \begin{bmatrix} l_3 - j_2 \\ j_3 \end{bmatrix}_q \cdots \begin{bmatrix} l_n - j_{n-1} \\ j_n \end{bmatrix}_q.$$

Следующие мономы, примененные к старшему вектору, образуют базис в пространстве $D_{\vec{l}}[j_1, \dots, j_n]$:

$$\prod_{m=1}^n a_m[0]^{\alpha_0^m} a_m[1]^{\alpha_1^m} \cdots a_m[l_m - j_m - 1]^{\alpha_{l_m - j_m - 1}^m}, \quad \sum_{\nu} \alpha_{\nu}^m = j_m.$$

Доказательство в случае $n = 1$ можно найти в работе [1]. В общем случае доказательство почти такое же. Сначала надо показать, что приведенные выше мономы линейно независимы. Для этого удобно выразить токи $a_i(z)$ через фермионы. А именно, возьмем $n + 1$ токов $\psi_1(z), \dots, \psi_{n+1}(z)$, таких, что $[\psi_i(z), \psi_j(z)]_+ = 0$. Токи $\psi_i(z)$ порождают операторную алгебру (суперкоммутативную). Алгебра $\mathfrak{A}_1^{\text{red}}$ вкладывается в алгебру фермионов: $a_i(z) \mapsto \psi_i(z)\psi_{i+1}(z)$. Представление $R_{\vec{l}}$ можно реализовать как подпространство в представлении алгебры фермионов, и если выразить наши мономы через фермионы, то видно, что они не могут быть линейно зависимы. Для доказательства того, что мономы действительно образуют базис, нужно оценить размерность модуля $D_{\vec{l}}[j_1, \dots, j_n]$ сверху. Это делается индукцией по l_1, \dots, l_n .

Заметим, что размерность модуля Демазюра $D_{\vec{l}}[j_1, \dots, j_n]$ разлагается в произведение. Пусть, скажем, $\vec{l} = (l, \dots, l)$. Тогда $\dim D_{\vec{l}} = \dim D_{(1, \dots, 1)}^l$, а размерность $\dim D_{(1, \dots, 1)}^l$ равна $(n + 2)$ -му числу Фибоначчи. Модуль Демазюра в нашем случае можно интерпретировать как «фьюжн» (см. [5]), а его характер — как q -версию характера тензорного произведения. Точная формулировка этого утверждения такова. Обозначим факторалгебру $\mathbb{C}[x_1, \dots, x_n]/(x_i^2, x_i x_{i+1})$ через C . Пусть $\theta(u): a_i \otimes t^s \mapsto x_i u^s$, $u \in \mathbb{C}$, — гомоморфизм универсальной обертывающей $U(\mathfrak{a} \otimes \mathbb{C}[t])$ в C . Алгебра C есть свободный модуль над собой; поэтому мы получаем семейство $\mathfrak{a} \otimes \mathbb{C}[t]$ -модулей $C(u)$. Тензорное произведение

$$C(u_1) \otimes \cdots \otimes C(u_l), \quad u_i \in \mathbb{C}, u_i \neq u_j \text{ при } i \neq j,$$

является циклическим $\mathfrak{a} \otimes \mathbb{C}[t]$ -модулем, порожденным вектором $1 \otimes \cdots \otimes 1 = w$. Оператор $t\partial/\partial t$ определяет градуировку на алгебре $U(\mathfrak{a} \otimes \mathbb{C}[t]): U(\mathfrak{a} \otimes \mathbb{C}[t]) = U_0 \oplus U_1 \oplus \cdots$. Зададим на модуле $C(u_1) \otimes \cdots \otimes C(u_n)$ фильтрацию, положив

$$F_j = (U_0 \oplus U_1 \oplus \cdots \oplus U_j)w.$$

Пусть $(C(u_1) \otimes \cdots \otimes C(u_l))^{\text{gr}}$ — присоединенный градуированный модуль. Можно показать, что модули $(C(u_1) \otimes \cdots \otimes C(u_l))^{\text{gr}}$ и $\dim D_{(l, \dots, l)}$ изоморфны.

Пусть A — конечномерная коммутативная алгебра с аугментацией $\varepsilon: A \rightarrow \mathbb{C}$ и A_+ — ядро отображения ε . Для алгебры \mathcal{O}_{A_+} можно определить модуль Демазюра D_l как подпространство в представлении R_l алгебры \mathcal{O}_{A_+} . Здесь R_l — представление, индуцированное тривиальным представлением подалгебры $A_+ \otimes t^l \mathbb{C}[t] \subset A_+ \otimes t^l \mathbb{C}[t, t^{-1}]$, а D_l есть $U(A_+ \otimes \mathbb{C}[t])$ -подмодуль в R_l , порожденный циклическим вектором. Естественно спросить: можно ли модуль D_l построить конструкцией «фьюжн», похожей на приведенную выше. В частности, верно ли, что размерность модуля D_l равна $(\dim A)^l$?

Завершим мы этот параграф еще одним примером модуля Демазюра для суперкоммутативной вертексной алгебры. Алгебра \mathcal{O} порождается фермионами $\psi_1(z), \dots, \psi_n(z)$, т. е. $[\psi_i, \psi_j]_+ = 0$, а соотношения выглядят так: $\psi_i(z)\psi'_i(z) = 0$, $\psi_i(z)\psi_{i+1}(z) = 0$. Соотношения такого рода естественно появляются в теории

представлений, например, если взять представление уровня один ($N=2$)-супералгебры, то в нем выполняется соотношение $G(z)G'(z) = 0$, где $G(z)$ — стандартный нечетный ток ($N=2$)-супералгебры.

Модуль Демазюра определяется по той же схеме, т.е. сначала строим модуль R_l над алгеброй \mathcal{O} , порожденный циклическим вектором v , таким, что $\psi_i[r]v = 0$ при $r \geq l$. Определим модуль Демазюра $D_l = \mathcal{O}_{\geq 0}v$, где $\mathcal{O}_{\geq 0}$ порождается компонентами токов $\psi_i[s]$, $1 \leq i \leq n$, $s \geq 0$. Ясно, что D_l — это фактор грассмановой алгебры $\Lambda(\psi_i[r])$, $0 \leq r \leq l$, $1 \leq i \leq n$, по некоторому идеалу. Модуль Демазюра D_l можно получить конструкцией, напоминающей «фьюжн». Рассмотрим алгебру K с генераторами $\mu_{i,j}$, $1 \leq i \leq n$, $1 \leq j \leq l$, и соотношениями $[\mu_{i,j}, \mu_{i',j'}]_+ = 0$, а также $\mu_{i+1,j}\mu_{i,j} = 0$, $\mu_{i,j}\mu_{i,j+1} = 0$. Базис в такой алгебре нумеруется конфигурациями на прямоугольной $n \times l$ -решетке с «отталкиванием». Такая конфигурация — это набор различных вершин решетки, таких, что в конфигурации не встречается двух вершин, соединенных ребром. Фиксируем набор попарно различных комплексных чисел u_1, \dots, u_l и зададим гомоморфизм из $\mathcal{O}_{\geq 0}$ в K , такой, что $\psi_i[s] \mapsto \sum_{j=1}^l \mu_{i,j} u_j^s$. Алгебра $\mathcal{O}_{\geq 0}$ градуирована, $\deg \psi_i[s] = s$; поэтому на K получается фильтрация и присоединенный градуированный модуль — это D_l . Отметим, что в этом случае можно показать, что результат фьюжн-конструкции не зависит от выбора конфигурации точек $\{u_i\}$. Хорошо известно, что в общем случае это не так.

ЛИТЕРАТУРА

- [1] Б. Л. Фейгин, Е. Б. Фейгин, *Интегрируемые \widehat{sl}_2 -модули как бесконечные тензорные произведения*, в кн.: *Фундаментальная математика сегодня*, НМУ, М., 2003, 304–334.
- [2] B. Feigin, A. Stoyanovski, *Quasi-particles models for the representations of Lie algebras and geometry of flag manifold*, <http://xxx.lanl.gov/abs/hep-th/9308079>.
- [3] А. В. Стояновский, Б. Л. Фейгин, *Функциональные модели представлений алгебр токов и полубесконечные клетки Шуберта*, *Функц. анализ и его прил.*, **28:1** (1994), 68–90.
- [4] B. Feigin, E. Frenkel, *Coinvariants of nilpotent subalgebras of the Virasoro algebra and partition identities*, in: I. M. Gelfand Seminar, *Adv. Soviet Math.*, vol. 16, Part 1, Amer. Math. Soc., Providence, RI, 1993, 139–148.
- [5] B. Feigin, S. Loktev, *On generalized Kostka polynomials and the quantum Verlinde rule*, in: *Differential Topology, Infinite-Dimensional Lie Algebras, and Applications*, Amer. Math. Soc. Transl. Ser. 2, vol. 194, Amer. Math. Soc., Providence, RI, 1999, 61–79; <http://arxiv.org/abs/math/9812093>.
- [6] I. B. Frenkel, V. G. Кас, *Basic representations of affine Lie algebras and dual resonance models*, *Invent. Math.*, **62:1** (1980), 23–66.
- [7] B. L. Feigin, M. Jimbo, T. Miwa, E. Mukhin, Y. Takeyama, *Fermionic formulas for $(k, 3)$ -admissible configurations*, *Publ. Res. Inst. Math. Sci.*, **40:1** (2004), 125–162.
- [8] V. Кас, *Vertex Algebras for Beginners*, University Lecture Series, vol. 10, Amer. Math. Soc., Providence, RI, 1998.

Национальный исследовательский университет
«Высшая школа экономики»
Институт теоретической физики им. Л. Д. Ландау
e-mail: borfeigin@gmail.com

Поступило в редакцию
8 января 2014 г.