М. И. Каргаполов, В. Н. Ремесленников, Н. С. Романовский, В. А. Романьков, В. А. Чуркин, Алгоритмические вопросы для σ -степенных групп, *Алгебра и логика*, 1969, том 8, номер 6, 643–659

Алгебра и логика, 8, № 6 (1969), 643–659.

УДК 519.45

АЛГОРИТМИЧЕСКИЕ ВОПРОСЫ ДЛЯ σ-СТЕПЕННЫХ ГРУПП

М.И.КАРГАПОЛОВ, В.Н.РЕМЕСЛЕННИКОВ, Н.С.РОМАНОВСКИЙ,
В.А.РОМАНЬКОВ, В.А.ЧУРКИН

Алгоритмическими вопросами для нильпотентных групп занимались А.И.Мальцев, М.И.Каргаполов, Н.Блэкберн, А.В.Мостовский и другие авторы. В [1] А.И.Мальцевым была решена проблема тождества слов, в [2] с помощью финитной аппроксимируемости – проблема вхождения. В [3] и [4] также с помощью финитной аппроксимируемости решалась проблема сопряженности. В классической постановке алгоритмические задачи рассматриваются только для конечно определенных групп. Однако существуют такие классы групп, которые в сигнатуре групп не конечно определены, но конечно определены в обогащенной сигатуре. Настоящая работа посвящена изучению одного из таких классов – класса σ-степенных групп. Для этих групп ставятся и единообразно решаются следующие алгоритмические проблемы тождества слов, вхождения, сопряженности, нахождения σ-периодической части, пересечения и описания подгрупп в терминах соотношений.

§ 1. Общие свойства σ-степенных групп

σ-степенные группы изучались Ф.Холлом [5]. В этом параграфе мы повторим часть определений из [5] и докажем несколько фактов, аналоги которых известны для нильпотентных групп.

Пусть σ – биномиальное кольцо, т.е. область целостности, содержащая кольцо целых чисел $\mathbb{Z}$ в качестве подкольца и вместе с каждым элементом λ все биномиальные коэффициенты

$$\binom{\lambda}{n} = \frac{\lambda(\lambda-1)\ldots(\lambda-n+1)}{n!}, \quad n = 1, 2, \ldots$$

Нильпотентная группа G ступени нильпотентности m называется σ-степенной, если для любых x из G и λ из σ однозначно определен элемент $x^{\lambda} \in G$, причем выполняются следующие аксиомы ($x, y, x_1, \dots x_n$ - произвольные элементы из G; λ, μ - произвольные элементы из σ):

1. $x^1 = x, \quad x^{\lambda+\mu} = x^{\lambda} \cdot x^{\mu}, \quad x^{\lambda\mu} = (x^{\lambda})^{\mu},$

II. $y x^{\lambda} y^{-1} = (y x y^{-1})^{\lambda},$

III. $x_1^{\lambda} x_2^{\lambda} \dots x_n^{\lambda} = \tau_1(x)^{\lambda} \tau_2(x)^{\binom{\lambda}{2}} \dots \tau_m(x)^{\binom{\lambda}{m}},$

где $\tau_i(x)$ - i-е слово Петреску от $x_1, \dots, x_n$, в частности, $\tau_1(x) = x_1 x_2 \dots x_n$.

σ-гомоморфным отображением σ-степенной группы G в σ-степенную группу G называется гомоморфизм группы G в G', перестановочный со всеми элементами из σ. Также обычным образом определяется σ-степенная подгруппа. Очевидно, что ядром любого σ-гомоморфизма является нормальная σ-степенная подгруппа. Наоборот, если N- нормальная σ-степенная подгруппа из G, то на классах смежности G по N естественным образом определяется структура σ-степенной группы (корректность определения обеспечивается аксиомой III), которая называется фактор-группой G по N. Элементы $g_1, \dots, g_n$ σ-степенной группы G будем называть ее порождающими, если минимальная σ-степенная подгруппа, содержащая все g_i совпадает с G, другими словами, если произвольный элемент группы G может быть получен из $g_1, \dots, g_n$ с помощью операций умножения и возведения в степень λ, $\lambda \in \sigma$.

ЛЕММА 1. Пусть $\gamma_i(G)$ обозначает i-й централ, т.е. i-й член нижнего центрального ряда группы G, Z_j - j-й гиперцентр, т.е. j-й член верхнего центрального ряда. Тогда $\gamma_i(G)$ и Z_j являются σ-степенными подгруппами группы G.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Имеем следствие аксиомы III

$$[y^{-1}, x^{-\lambda}] = (yx^{-1}y^{-1})^{\lambda} x^{-\lambda} = [y^{-1}, x^{-1}]^{\lambda} \tau_2(x^y, x^{-1})^{\binom{\lambda}{2}} \dots \tau_m(x^y, x^{-1})^{\binom{\lambda}{m}}. \qquad (1)$$

Пусть $x \in \gamma_k(G)$, $y \in \gamma_e(G)$. В качестве следствия из формулы (1) легко получается, что

$$[x, y]^{\lambda} \equiv [x, y^{\lambda}] \equiv [x^{\lambda}, y] \mod \gamma_{k+e+1}(G).$$

Используя последний факт, можно заметить, что $\gamma_m(G)$ является $\mathcal{O}$ -степенной подгруппой, а затем по индукции, что $\gamma_i(G)$ - $\mathcal{O}$ -степенная подгруппа для любого i, $1 \leq i \leq m$.

Пусть теперь $[x, y] = z$, где $x, y \in G$, $z \in Z_1$. Заметим, что

$$[x^{\lambda}, y] = z^{\lambda}. \qquad (2)$$

Это также непосредственно следует из формулы (1). Формула (2) доказывает второе утверждение леммы, а именно: Z_1 есть $\mathcal{O}$ -степенная подгруппа G, дальше по индукции такой будет каждая Z_j, $1 \leq j \leq m$. Лемма доказана.

Из формул (1), (2) легко получается

СЛЕДСТВИЕ. Классы нильпотентности подгруппы H $\mathcal{O}$ - степенной группы G и ее $\mathcal{O}$ - замыкания $\overline{H}$ (т.е. $\overline{H}$ - наименьшая $\mathcal{O}$ -степенная подгруппа, содержащая H) совпадают.

Элемент x из $\mathcal{O}$ -степенной группы G назовем $\mathcal{O}$ -периодическим, если существует $\lambda \neq 0$ из $\mathcal{O}$ такое, что $x^{\lambda} = 1$. Множество $\mathcal{O}$ -периодических элементов группы G обозначим через $\tau(G)$.

ЛЕММА 2. $\tau(G)$ составляет $\mathcal{O}$ - степенную подгруппу в G.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Достаточно заметить, что произведение двух $\mathcal{O}$ -периодических элементов x и y есть снова $\mathcal{O}$ -периодический элемент. Пусть $x^{\alpha} = y^{\beta} = 1$, α, β - ненулевые элементы кольца $\mathcal{O}$. Проводим индукцию по классу нильпотентности m' подгруппы, порожденной элементами x, y. Если $m' = 0$, то $(xy)^{\alpha\beta} = 1$. Заме -

тим, что $\tau_2(x,y),\dots,\tau_m(x,y)$ лежат в подгруппе, порожденной x и yxy^{-1}, класс нильпотентности которой $< m'$. Следовательно, по индуктивному предположению существуют ненулевые $\lambda_2,\dots,\lambda_m$ из σ такие, что

$$\tau_2(x,y)^{\lambda_2} = \dots = \tau_m(x,y)^{\lambda_m} = 1.$$

Пусть $\lambda = \lambda_2 \dots \lambda_m$. Из аксиомы Ш непосредственно следует, что при возведении элемента xy в степень $m!\alpha\beta\lambda$ мы получим 1. Лемма доказана.

Говорят, что σ -степенная группа G не имеет σ -кручения, если $\tau(G)=1$. Подмножество M из G назовем σ -изолированным, если из включения $x^\lambda \in M$ следует $x \in M$ для любых x из G и $\lambda \neq 0$, из σ. Очевидно, фактор-группа по некоторой нормальной σ -степенной подгруппе не имеет σ -кручения тогда и только тогда, когда эта подгруппа σ изолирована в G.

ЛЕММА 3. *Предположим, что σ -степенная группа G не имеет σ -кручения. Тогда*

а) равенство $x^\lambda = y^\lambda$, $\lambda \neq 0$, влечет $x=y$;

б) если $[x^\lambda, y^\mu]=1$, то $[x,y]=1$.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Ограничимся рассмотрением второго утверждения, так как первое можно доказывать по аналогичной схеме. Кроме того, будем предполагать, что $\mu=1$. Пусть m' обозначает класс нильпотентности подгруппы, порожденной элементами x,y. Доказательство ведем индукцией по числу m'. Допустим, что $m'>1$. Так как подгруппа, порожденная x и $y^{-1}xy$, имеет класс нильпотентности, меньший, чем m', и $[x^\lambda, y^{-1}xy]=1$, то по индуктивному предположению элементы x, $y^{-1}xy$ перестановочны между собой. После чего из формулы (1) следует, что $[x^\lambda,y]=[x,y]^\lambda=1$. Группа G не имеет σ -кручения, поэтому $[x,y]=1$. Лемма доказана.

СЛЕДСТВИЕ. *В σ -степенной группе G без σ -кручения следующие множества σ -изолированы: $C_G(N)$ - централизатор любого подмножества N из G, Z_i - любой член верхнего централь-*

ного ряда группы G.

По аналогии с нильпотентными группами имеет место

ЛЕММА 4. σ - степенная группа G не имеет σ - кручения в том и только в том случае, если ее центр без σ - кручения.

σ - степенные группы возникают при σ -пополнениях конечно порожденных нильпотентных групп. Рассмотрим подробно конструкцию σ - пополнения, предложенную Ф.Холлом [5].

Пусть G - конечно порожденная нильпотентная группа без кручения, $u_1, u_2, \ldots, u_r$ - некоторая мальцевская база (см. [6]) для G. Тогда всякий элемент x из G единственным образом представим в виде

$$x = u_1^{\xi_1} u_2^{\xi_2} \ldots u_r^{\xi_r} = u^{\xi}, \quad \xi_i \in \mathbb{Z}.$$

Пусть $y = u^{\eta}$ - некоторый другой элемент из G и $xy = u^{\sigma}$. Пусть еще $\lambda \in \mathbb{Z}$ и $x^{\lambda} = u^{\omega}$. Известно, что σ_i, ω_i являются полиномами от ξ_i, η_j и ξ_i, λ соответственно. Так как полиномы σ_i, ω_i целозначны, то они представимы в виде:

$$\sigma_i = \sum_j a_j \binom{\xi_1}{\alpha_1} \ldots \binom{\xi_j}{\alpha_j} \binom{\eta_1}{\beta_1} \ldots \binom{\eta_j}{\beta_j},$$

$$\omega_i = \sum_j b_j \binom{\xi_1}{\gamma_1} \ldots \binom{\xi_j}{\gamma_j} \binom{\lambda}{\delta_j},$$

где $a_j, b_j, \alpha_j, \beta_j, \gamma_j, \delta_j \in \mathbb{Z}$, причем $\alpha_j, \beta_j, \gamma_j, \delta_j \geqslant 0$. В качестве элементов новой группы G^{σ} рассмотрим всевозможные формальные произведения u^{ξ} с показателями $\xi_1, \ldots, \xi_r$ из σ, умножение и возведение в степень λ из σ зададим с помощью полиномов $\sigma_i(\xi, \eta)$ и $\omega_i(\xi, \lambda)$. Нетрудно проверить, что при таком определении G^{σ} будет σ -степенной группой.

Пусть F_m обозначает свободную нильпотентную группу ступени нильпотентности m со свободными образующими $x_1, \ldots, x_n$. Тогда F_m^{σ} будет свободной σ -степенной группой, то есть любое отображение $x_i \longrightarrow y_i$, где y_i - элементы произвольной σ -степенной группы G ступени нильпотентности $\leq m$, продолжается до $\mathcal{O}$ -гомоморфизма $F_m^{\mathcal{O}}$ в G. Это непосредственно следует из того факта, что каждый элемент $\mathcal{O}$ -степенной подгруппы, порожденной в G, $y_1,\dots,y_n$ представим в виде $v_1^{\xi_1}\dots v_z^{\xi_z}$, где $\xi_i \in \mathcal{O}$ и v_i - i -й базисный коммутатор от $y_1,\dots,y_n$. Отсюда получается

ЛЕММА 5. Факторы $\gamma_i(F_m^{\mathcal{O}})/\gamma_{i+1}(F_m^{\mathcal{O}})$ нижнего центрального ряда группы $F_m^{\mathcal{O}}$ являются свободными $\mathcal{O}$ -модулями.

СЛЕДСТВИЕ. Любая $\mathcal{O}$ -степенная подгруппа конечно порожденной $\mathcal{O}$ -степенной группы G также конечно порождена, если $\mathcal{O}$ - нетерово кольцо.

Отметим еще один результат из [5].

ЛЕММА 6. Пусть G - конечно порожденная нильпотентная группа без кручения и H - произвольная $\mathcal{O}$ - степенная группа. Тогда любой гомоморфизм G в H продолжается до $\mathcal{O}$ -гомоморфного отображения $G^{\mathcal{O}}$ в H.

§ 2. Алгоритмические проблемы для $\mathcal{O}$ -степенных групп

Будем говорить, что коммутативное кольцо $\mathcal{O}$ эффективно относительно включения и пересечения, если

а) кольцо $\mathcal{O}$ без делителей нуля, нетерово;

б) для любого элемента α из $\mathcal{O}$ и идеала $\mathcal{J}$, заданного своими порождающими $\alpha_1,\dots,\alpha_n$, эффективно решается вопрос о том, принадлежит α идеалу $\mathcal{J}$ или нет, а если принадлежит, то находится некоторое выражение α через α_i : $\alpha = \sum \gamma_i \alpha_i$;

в) для любых двух идеалов $\mathcal{J}_1, \mathcal{J}_2$, заданных своими порождающими, эффективно находятся порождающие пересечения $\mathcal{J}_1 \cap \mathcal{J}_2$.

Рассмотрим систему линейных уравнений над $\mathcal{O}$ относительно неизвестных $x_1,\dots,x_n$:

$$
\begin{aligned}
&\alpha_{11}x_1+\alpha_{12}x_2+\ldots+\alpha_{1n}x_n\equiv 0 \pmod{\mathfrak{A}_1},\\
&\alpha_{21}x_1+\alpha_{22}x_2+\ldots+\alpha_{2n}x_n\equiv 0 \pmod{\mathfrak{A}_2},\\
&\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\\
&\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\\
&\alpha_{m1}x_1+\alpha_{m2}x_2+\ldots+\alpha_{mn}x_n\equiv 0 \pmod{\mathfrak{A}_m},
\end{aligned}
\tag{3}
$$

где $\mathfrak{A}_1,\ldots,\mathfrak{A}_m$ обозначают некоторые идеалы кольца $\mathcal{O}$, заданные своими порождающими. Понятно, что совокупность решений этой системы составляет $\mathcal{O}$ -модуль.

ЛЕММА 7. Предположим, что кольцо $\mathcal{O}$ эффективно относительно включения и пересечения. Тогда алгоритмически находятся порождающие $\mathcal{O}$ -модуля M, составленного из решений системы (3).

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Рассмотрим сначала случай, когда $m=1$, то есть решается одно уравнение

$$\sum_{i=1}^{n}\alpha_i x_i\equiv 0 \pmod{\mathfrak{A}}. \tag{4}$$

Найдем порождающие пересечения идеалов $(\alpha_1)+\mathfrak{A}$ и $(\alpha_2,\alpha_3,\ldots,\alpha_n)+\mathfrak{A}$. Пусть это будут элементы $\beta_1,\ldots,\beta_p$. Рассмотрим выражения

$$\beta_j=\alpha_1\gamma_{j1}+a_j=\alpha_2\gamma_{j2}+\ldots+\alpha_n\gamma_{jn}+a_j', \qquad a_j,a_j'\in\mathfrak{A}.$$

Каждая n -ка $\gamma_j=(\gamma_{j1},-\gamma_{j2},\ldots-\gamma_{jn})$, очевидно, является решением системы (4), причем проекция модуля M на первую компоненту будет идеалом, порожденным элементами $\gamma_{11},\gamma_{21},\ldots\gamma_{p1}$. Следовательно, M, как модуль, порождается $\gamma_1,\ldots,\gamma_p$ и теми своими элементами, у которых первая компонента равна 0. На этом доказательство для случая одного уравнения из соображений индукции может быть закончено.

Пусть теперь $m>1$. Предположим, что мы нашли порождающие

$$x^1=(x_{11},\ldots,x_{1n}),\ldots,x^r=(x_{r1},\ldots,x_{rn})$$

модуля M_1, составленного из решений первых $(m-1)$ -го уравнения системы (3). Необходимо выбрать те элементы из M_1, которые удовлетворяют еще одному уравнению, скажем, (4). Пусть

$$\beta_j = \sum_{i=1}^{n} \alpha_i x_{ji}, \quad j = 1, \dots, r.$$

Рассмотрим линейное уравнение

$$\beta_1 y_1 + \beta_2 y_2 + \dots + \beta_r y_r \equiv 0 \pmod{\mathfrak{A}}.$$

Решения последнего уравнения составляют $\mathcal{O}$-модуль, порождающие которого пусть будут

$$y^1 = (y_{11}, \dots, y_{1r}), \dots, y^s = (y_{s1}, \dots, y_{sr}).$$

Нетрудно теперь понять, что искомый модуль M порождается элементами

$$z^1 = \sum_{j=1}^{r} y_{1j} x^j, \dots, z^s = \sum_{j=1}^{r} y_{sj} x^j.$$

Лемма доказана.

Рассмотрим свободную $\mathcal{O}$-степенную группу $F_m^{\mathcal{O}}$ со свободными порождающими $x_1, \dots, x_n$. Объекты, которые получаются из символов $x_1, \dots, x_n$ при помощи операций умножения (приписывания) и возведения в степень λ, $\lambda \in \mathcal{O}$, назовем словами. Очевидно, что каждому слову соответствует некоторый элемент группы $F_m^{\mathcal{O}}$. Пусть $R_1(x), \dots$ $\dots, R_f(x)$ - некоторый набор слов. Говорят, что $\mathcal{O}$-степенная группа G имеет каноническое описание

$$G = \langle x_1, \dots, x_n ; R_1, \dots, R_f \rangle, \tag{5}$$

если она является фактор-группой $F_m^{\mathcal{O}}$ по нормальной $\mathcal{O}$-степенной подгруппе, порожденной элементами $R_1(x), \dots, R_f(x)$. Как мы заметили (следствие к лемме 5), в случае нетерова кольца любая конечно порожденная $\mathcal{O}$-степенная группа конечно определена. Мы будем рассматривать только конечные описания вида (5) и для них решать следующие алгоритмические задачи.

1) <u>Проблема тождества</u> По заданным слову $W(x)$ и описанию

(5) требуется определить: равен элемент $W(x)$ 1 в G или нет?

2) Проблема вхождения. По заданным словам $W(x), W_1(x), \dots, W_k(x)$ необходимо узнать: принадлежит ли элемент $W(x)$ σ-степенной подгруппе группы G, порожденной $W_1(x), \dots, W_k(x)$?

3) Проблема описания подгрупп. По заданным элементам группы G требуется найти описание в форме (5) для σ-степенной подгруппы, порожденной этими элементами.

4) Проблема пересечения. По двум σ-степенным подгруппам, которые заданы своими порождающими, ищутся порождающие пересечения этих подгрупп.

5) Проблема сопряженности. Выясняется вопрос: сопряжены два данных элемента или нет?

6) Нахождение σ-периодической части. Ищутся порождающие для $\tau(G)$.

Заметим сначала, что первые две задачи сводятся к проблеме вхождения в подгруппу свободной σ-степенной группы F_m^σ. Для этого достаточно понять, что минимальная нормальная σ-степенная подгруппа из F_m^σ, содержащая элементы $R_1, \dots, R_f$, порождается как σ-степенная группа всевозможными коммутаторами длины $\leqslant m$, построенными на R_i, и образующих группы F_m^σ с условием, что вхождение хотя бы одного R_i в коммутатор обязательно.

ТЕОРЕМА 1. Предположим, что биномиальное кольцо σ эффективно относительно вхождения и пересечения. Тогда для любой σ-степенной группы G, заданной в форме (5), разрешимы все шесть вышеперечисленных алгоритмических задач.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО будет разбито на пять пунктов, соответствующих алгоритмическим задачам.

1. Проблемы тождества и вхождения, как мы заметили, сводятся к проблеме вхождения в σ-степенную подгруппу группы

$$G = F_m^\sigma = \langle x_1, x_2, \dots, x_n \rangle .$$

Пусть σ - степенная подгруппа H порождается элементами $W_1(x), \dots$ $\dots, W_k(x)$. Требуется выяснить: принадлежит ли данный элемент $W(x)$

подгруппе H или нет? Пусть $u_1=u_1(x),\ldots,u_r=u_r(x)$ – базисные коммутаторы от $x_1,\ldots x_n$, составляющие мальцевскую базу для G. Тогда имеем

$$W_i(x)=u_1^{\xi_1^i}u_2^{\xi_2^i}\ldots u_r^{\xi_r^i},\quad i=1,\ldots,k,$$

$$W(x)=u_1^{\xi_1}u_2^{\xi_2}\ldots u_r^{\xi_r},\quad \xi_j^i,\xi_j\in\mathcal{O}.$$

Показатели ξ_j^i,ξ_j могут быть эффективно найдены, так как эффективно находятся полиномы $\sigma_i(\xi,\eta)$, $\omega_i(\xi,\lambda)$, о которых упоминалось в § 1. Если ξ_1 не принадлежит идеалу из $\mathcal{O}$, порожденному $\xi_1^1,\ldots,\xi_1^k$, то, очевидно, $W(x)$ не принадлежит H. Поэтому предполагаем, что $\xi_1\in(\xi_1^1,\ldots,\xi_1^k)$, и найдем $\alpha_1,\ldots,\alpha_k$ из $\mathcal{O}$ такие, что

$$\xi_1+\sum_{i=1}^{k}\alpha_i\xi_1^i=0.$$

Пусть $W'(x)=W(x)W_1^{\alpha_1}(x)\ldots W_r^{\alpha_r}(x)$. Элементы $W(x),W'(x)$ одновременно принадлежат или не принадлежат H. Следовательно, в наших рассуждениях можно заменить $W(x)$ на $W'(x)$. По построению, $W'(x)\in G_2$ (здесь и в дальнейшем G_i обозначает $\mathcal{O}$-степенную подгруппу группы G, порожденную элементами $u_i,u_{i+1},\ldots,u_r$). Сейчас мы найдем порождающие пересечения $H_2=H\cap G_2$. Для этого рассмотрим линейное уравнение относительно неизвестных $(\beta_1,\ldots,\beta_k)=\beta$.

$$\sum_{i=1}^{k}\beta_i\xi_1^i=0.$$

Пусть $\beta^j=(\beta_1^j,\ldots,\beta_k^j)$, $j=1,\ldots,s$, порождают $\mathcal{O}$-модуль, составленный из решений рассматриваемого линейного уравнения. Тогда легко проверяется, что $\mathcal{O}$-степенная подгруппа H_2 имеет своими образующими элементы

$$W_j'=\prod_{i=1}^{k}W_i^{\beta_i^j},\quad j=1,\ldots,s,$$

а также всевозможные коммутаторы от $W_1,\ldots,W_k$ длины $\geqslant 2$ и $\leqslant m$. Рассуждая аналогичным образом и дальше, мы эффективно найдем образующие $\mathcal{O}$-степенной подгруппы $H=H\cap G_r$ и в конечном счете сведем нашу задачу к вопросу о вхождении некоторого заданного элемента в H_r.

который, очевидно, легко решается. Отметим, что в действительности мы доказали больше, чем требовалось, а именно: для любого элемента из H мы можем эффективно находить некоторое выражение этого элемента через заданные порождающие H.

2. Проблема описания подгрупп. Опять сведем нашу задачу к тому случаю, когда G является свободной σ-степенной группой. Если $G = F_m^\sigma / N$ и нам требуется найти каноническое описание для σ-степенной подгруппы H из G, то рассмотрим H' -полный прообраз H в F_m^σ при естественном гомоморфизме $F_m^\sigma \to G$. Порождающие H' могут быть легко найдены, когда известно описание группы G и порождающие подгруппы H. Допустим, что мы нашли описание σ-степенной группы H'. Тогда, факторизуя H' по N, мы получим описание группы H.

Итак, предполагаем, что $G = F_m^\sigma = \langle x_1, \dots, x_n \rangle$ и при помощи порождающих нам задана σ-степенная подгруппа H. В предыдущем пункте мы указали процесс, по которому эффективно находятся порождающие пересечения $H_i = H \cap G_i$. Пусть это будут элементы $W_1^{(i)}, \dots, W_{s_i}^{(i)}$. Рассмотрим коммутатор $W = [W_p^{(i)}, W_q^{(j)}]$. Так как $W \in H_t$, где $t = max(j,i)+1$, то мы можем найти некоторое выражение W через элементы $W_1^{(t)}, \dots, W_{s_t}^{(t)}$, скажем, $W = R(W_i^{(t)})$ (если $W = 1$, то в качестве R берем пустое слово). Пусть еще в канонической записи элементов $W_1^{(i)}, \dots, W_{s_i}^{(i)}$ показатели при u_1 равны соответственно $\xi_1, \dots, \xi_{s_i}$. Рассмотрим σ-модуль M_i, составленный из наборов $(\alpha_1, \dots, \alpha_{s_i})$, являющихся решениями уравнения

$$\sum_{j=1}^{s_i} \alpha_j \xi_j = 0 .$$

Пусть $\alpha^j = (\alpha_1^j, \dots, \alpha_{s_i}^j)$, $j = 1, \dots, k_i$, порождают модуль M_i. Тогда

$$V_j = (W_1^{(i)})^{\alpha_1^j} \dots (W_{s_i}^{(i)})^{\alpha_{s_i}^j} \in H_{i+1} .$$

Зафиксируем какое-нибудь выражение элемента V_j через порождающие H_{i+1}; $V_j = P_j(W_{e_1}^{(i+1)})$, здесь слово P_j пустое, если $V_j = 1$. Пусть теперь H' обозначает σ-степенную группу, заданную следующим каноническим описанием:

$$H' = \langle y_1^{(1)}, \ldots, y_{s_1}^{(1)}, \ldots, y_1^{(t)}, \ldots, y_{s_t}^{(t)} ; [y_p^{(i)}, y_q^{(j)}] = R(y_i^{(t)}), \ldots, (y_1^{(i)})^{\alpha_1^j} \ldots$$
$$\ldots (y_{s_i}^{(i)})^{\alpha_{s_i}^j} = P_j (y_e^{(i+1)}), \ldots \rangle .$$

Непосредственно проверяется, что группы H и H' $\mathcal{O}$-изоморфны при соответствии $y_j^{(i)} \longleftrightarrow W_j^{(i)}$

3. <u>Проблема пересечения</u>. Снова предполагаем, что

$$G = F_m^{\mathcal{O}} = \langle x_1, \ldots, x_n \rangle .$$

Пусть сначала $m=1$, то есть G является свободным $\mathcal{O}$-модулем и, скажем, состоит из n-ок $(\alpha_1, \ldots, \alpha_n)$ элементов $\alpha_i \in \mathcal{O}$. Пусть мы имеем два подмодуля, заданных своими порождающими:

$$M_1 = \{(\alpha_1^j, \ldots, \alpha_n^j),\ j=1,\ldots,k\},\quad M_2 = \{(\beta_1^j, \ldots, \beta_n^j),\ j=1,\ldots,s\}.$$

Требуется найти порождающие пересечения $M = M_1 \cap M_2$. Рассмотрим систему уравнений

$$\sum_{j=1}^{k} x_j (\alpha_1^j, \ldots, \alpha_n^j) = \sum_{i=1}^{s} y_i (\beta_1^{(i)}, \ldots, \beta_n^{(i)}) .$$

Если $x_1, \ldots, x_k, y_1, \ldots, y_s$ удовлетворяют этой системе, то

$$\sum_{j=1}^{k} x_j (\alpha_1^j, \ldots, \alpha_n^j) \in M .$$

Верно и обратное утверждение, то есть пусть для некоторых $x_1, \ldots, x_k$ выполняется последнее включение, тогда найдутся такие $y_1, \ldots, y_s$ из $\mathcal{O}$, что набор x-ов и y-ов удовлетворяет рассматриваемой системе. Следовательно, все сводится к задаче о нахождении решений системы линейных уравнений, и мы можем сослаться на лемму 7.

Предположим теперь, что $m > 1$ и нам при помощи порождающих заданы две $\mathcal{O}$-степенные подгруппы H_1, H_2 группы $G = F_m^{\mathcal{O}}$. Задача состоит в нахождении порождающих $\mathcal{O}$-степенной подгруппы $H = H_1 \cap H_2$. Применяя индукцию по числу m, легко свести нашу задачу к тому случаю, когда

$$H_1 = \{W_1, \ldots, W_k, Z_1, \ldots, Z_s\},\quad H_2 = \{W_1 C_1, \ldots, W_k C_k, Z_1', \ldots, Z_p'\},$$

где $C_i, Z_j, Z_j' \in \gamma_m(G)$, причем
$H_1 \cap \gamma_m(G) = \{Z_1, \ldots, Z_s\}$, $H_2 \cap \gamma_m(G) = \{Z_1', \ldots, Z_p'\}$.
Найдем порождающие пересечения $H_1 \cap H_2 \cap \gamma_m(G)$, пусть это будут $V_1, \ldots, V_t$. Выберем также некоторую систему $\gamma^j = (\gamma_1^j, \ldots, \gamma_k^j)$ порождающих $\mathcal{O}$-модуля, составленного из наборов $(\gamma_1, \ldots, \gamma_k)$, удовлетворяющих включению

$$\prod_{i=1}^{k} C_i^{\gamma_i} \in H_1 \cap \gamma_m(G).$$

Утверждается, что H, как $\mathcal{O}$-степенная подгруппа, порождается следующими элементами:

$$V_1, \ldots, V_t, \ldots, \prod_{i=1}^{k} W_i^{\gamma_i^j}, \ldots ,$$

а также всевозможными коммутаторами длины $\geqslant 2$ и $\leqslant m$, построенными на $W_1, \ldots, W_k$. Проверка тривиальна.

4. <u>Проблема сопряженности</u>. Пусть $G = F_m^{\mathcal{O}}/N$. Научимся сначала эффективно находить порождающие централизатора данного элемента W в G. Можно предполагать, что мы умеем это делать в группе $G_1 = G/\gamma_m(G)$. Рассмотрим полный прообраз централизатора элемента $\varphi(W)$ при естественном гомоморфизме $\varphi: G \longrightarrow G_1$. Пусть это будет $G_1 = \{W_1, \ldots, W_k\}$. Тогда $Z_i = [W_i, W] \in \gamma_m(G)$. По пункту 2 эффективно находится каноническое описание $\mathcal{O}$-степенной группы $\gamma_m(G)$. Следовательно, мы можем определить некоторую систему $\gamma^j = (\gamma_1^j, \ldots, \gamma_k^j)$ порождающих $\mathcal{O}$-модуля, составленного из наборов $(\gamma_1, \ldots, \gamma_k)$, удовлетворяющих равенству

$$\prod_{i=1}^{k} Z_i^{\gamma_i} = 1.$$

Легко видеть, что централизатор элемента W в G порождается всевозможными коммутаторами от W_i длины $\geqslant 2$ и $\leqslant m$, а также элементами

$$V_j = \prod_{i=1}^{k} W_i^{\gamma_i^j}.$$

Займемся теперь непосредственно сопряженностью. Пусть даны два элемента W, W' и надо выяснить: сопряжены W, W' в G или нет? Используя индукцию, можно предполагать, что $W' = WZ$, где $Z \in \gamma_m(G)$. В силу предыдущих рассуждений эффективно находятся порождающие подгруппы H: $W_1, \dots, W_k$, такой, что H есть максимальная σ-степенная подгруппа, удовлетворяющая включению $[H, W] \subseteq \gamma_m(G)$. Пусть $Z_i = [W_i, W]$. Очевидно, что W, W' сопряжены в том и только в том случае, если Z принадлежит σ-степенной подгруппе, порожденной $Z_1, \dots, Z_k$. Это позволяет сослаться на пункт 1.

5. <u>Нахождение σ-периодической части</u>. Разберем сначала случай, когда G -абелева σ-степенная группа. В этом случае G является фактор-модулем некоторого свободного модуля M по подмодулю M_1. Пусть σ - модуль M_1 порождается элементами $a_1, \dots, a_k$. Выделяем из a_i некоторую максимальную линейно независимую над полем σ' частных кольца σ подсистему элементов: $b_1, \dots, b_s$, $s \leq k$. Очевидно, что если $a \in M$, то ему соответствует периодический элемент в G тогда и только тогда, когда система $a, b_1, \dots, b_s$ линейно зависима над полем σ'. Факт линейной зависимости может быть записан с помощью системы линейных уравнений над σ относительно коэффициентов разложения a по свободной системе порождающих модуля M. Откуда по лемме 7 мы можем эффективно отыскать порождающие для $\tau(G)$.

Пусть теперь $G = F_m^{\sigma}/N$ не абелева. В предыдущем пункте мы эффективно находим порождающие централизатора данного элемента. Используя это и пункт 3, заключаем, что в G эффективно находятся порождающие центра Z группы G. Пусть $A_1 = \tau(Z) = \tau(G) \cap Z$. По пункту 2 можно получить каноническое описание группы $G/A_1 = G_1$. Пусть Z_1 - центр группы G_1 и A_2 - прообраз $\tau(Z_1)$ при естественном гомоморфизме $G \to G_1$. Поступая аналогично и дальше, мы получаем неубывающую цепочку σ-периодических подгрупп A_i, $i = 1, 2, \dots$, группы G. В силу нетеровости эта цепочка стабилизируется. Пусть $A = \bigcup_{i=1}^{\infty} A_i$. Так как центр G/A не имеет σ-кручения, то и сама G также не имеет σ-кручения. Откуда $\tau(G) = A$.

Теорема доказана.

§ 3. Элементарная и универсальная теории σ-степенной группы

Пусть G - некоторая группа. Совокупность всех формул узкого исчисления предикатов с равенством в сигнатуре, содержащей лишь знак групповой операции, истинных на группе G, называется элементарной теорией группы G. Все формулы этой теории, имеющие предваренную дизъюнктивную нормальную форму без кванторов существования, составляют универсальную теорию группы G. Теория называется разрешимой, если существует алгоритм, выясняющий принадлежность формулы к данной теории. Мы будем рассматривать элементарную и универсальную теории $\mathcal{O}$-степенной группы.

ТЕОРЕМА 2. *Пусть G - конечно порожденная нильпотентная группа без кручения; $u_1,\dots,u_r$ - ее мальцевская база; $G^{\mathcal{O}}$ - $\mathcal{O}$-пополнение группы G. Тогда элементарная теория группы $G^{\mathcal{O}}$ разрешима, если разрешима элементарная теория кольца $\mathcal{O}$ в сигнатуре, содержащей обе кольцевые операции. Аналогично, если разрешима универсальная теория кольца $\mathcal{O}$, то отсюда следует разрешимость универсальной теории группы $G^{\mathcal{O}}$.*

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Рассмотрим произвольную формулу узкого исчисления предикатов с равенством в предваренной дизъюнктивной нормальной форме

$$(Q_1x_1)(Q_2x_2)\cdots(Q_nx_n)M(\dots,x_i\neq x_j,\dots,x_ex_k=x_t,\dots), \tag{6}$$

где Q_i - квантор всеобщности или существования, $M(\dots)$ - матрица отношений. Пусть $\omega_1(\xi,\eta),\dots,\omega_r(\xi,\eta)$ - многочлены перемножения в группе G, соответствующие мальцевской базе $u_1,\dots,u_r$ (см. § 1). Рассмотрим новую формулу уже в сигнатуре кольца $\mathcal{O}$ (в сокращенном виде):

$$\begin{gathered}(Q_1\xi_1^{(1)})\dots(Q_1\xi_r^{(1)})(Q_2\xi_1^{(2)})\dots(Q_2\xi_r^{(2)})\dots(Q_n\xi_1^{(n)})\dots(Q_n\xi_r^{(n)})\\ M(\dots,\xi_1^{(i)}\neq\xi_1^{(j)}\vee\dots\vee\xi_r^{(i)}\neq\xi_r^{(j)},\dots,\xi_1^{(t)}=\omega_1(\xi^{(e)},\xi^{(k)})\,\&\dots\\ \dots\&\,\xi_r^{(t)}=\omega_r(\xi^{(e)},\xi^{(k)}),\dots).\end{gathered} \tag{7}$$

Если (6) была универсальной формулой, то легко заметить, что формула (7) также будет универсальной. Кроме того, из общих свойств пополнений следует, что формула (6) истинна на группе $G^{\mathcal{O}}$ тогда и только тогда, когда (7) истинна на кольце $\mathcal{O}$. Поэтому разрешимость элементарной (универсальной) теории кольца $\mathcal{O}$ влечет разрешимость элементарной (универсальной) теории группы $G^{\mathcal{O}}$. Теорема доказана.

В заключение отметим два вопроса, которые, на наш вгляд, представляют интерес.

1. Разрешима ли универсальная теория конечно порожденной нильпотентной группы?

2. Верно ли, что элементарная теория конечно порожденной нильпотентной группы G разрешима тогда и только тогда, когда G является конечным расширением своего центра?

ЗАМЕЧАНИЕ. При решении первого вопроса кажется естественным доказать, что группы G и G^{R} (R -поле действительных чисел) универсально эквивалентны, то есть что универсальная формула истинна на G тогда и только тогда, когда она истинна на G^{R}, а затем воспользоваться теоремой 2. Однако это не так. В качестве примера можно рассмотреть свободную двуступенно нильпотентную группу G с двумя порождающими x и y. Пусть $c=[x,y]$. Тогда следующая конечная подмодель группы

$$G^{R}: \{1, x, y, c, x^{\sqrt{2}}, y^{\sqrt{2}}, c^{2};\ 1\cdot x = x,\ [a,b]=c,$$
$$c\neq 1,\ [a^{\sqrt{2}}, b^{\sqrt{2}}]=c^{2},\ [a^{\sqrt{2}}, a]=1, [b^{\sqrt{2}}, b]=1, [a^{\sqrt{2}}, b]=[a, b^{\sqrt{2}}]\ \}$$

не вкладывается в группу G. Последнее означает, что G и G^{R} не универсально эквивалентны.

Литература

1. А.И.МАЛЬЦЕВ, Два замечания о нильпотентных группах, Матем. сб. 37 (1955), 567-572.

2. А.И.МАЛЬЦЕВ, О гомоморфизмах на конечные группы, Уч. зап. Ивановского пед. ин-та, 18 (1958), 49-60.

3. N.BLACKBURN, Conjugacy in nilpotent groups, Proc. Amer. Math. Soc., 16 (1965), 143-148.

4. М.И.КАРГАПОЛОВ, Финитная аппроксимируемость сверхразрешимых групп относительно сопряженности, Алгебра и логика, 6, № 1 (1967), 63-68.

5. Ф.ХОЛЛ, Нильпотентные группы, Математика, 12, № 1 (1968), 3-36.

6. Ю.И.МЕРЗЛЯКОВ, О матричном представлении автоморфизмов, расширений и разрешимых групп. Алгебра и логика, 7, № 3 (1968), 63-104.

Поступило 29. XI. 1969