



## О ВИДАХ РЕШЕНИЙ ЗАДАЧИ ЛАГРАНЖА

© 2019 г. Л. Н. КУРТОВА, Н. Н. МОТЬКИНА

Аннотация. Представлен разбор некоторых случаев, когда натуральное число не представимо диагональной квадратичной формой с четырьмя целыми переменными.

**Ключевые слова:** квадратичная форма, тригонометрическая сумма, сумма Гаусса, сравнение, сумма Kloostermana, асимптотическая формула.

## ON TYPES OF SOLUTIONS OF THE LAGRANGE PROBLEM

© 2019 L. N. KURTOVA, N. N. MOT'KINA

ABSTRACT. In this paper, we present an analysis of some cases where a positive integer cannot be represented by a diagonal quadratic form with four integer variables.

**Keywords and phrases:** quadratic form, trigonometric sum, Gauss sum, comparison, Kloosterman sum, asymptotic formula.

**AMS Subject Classification:** 11D09

**1. Введение.** В литературе по теории чисел известно много задач о представлении натурального числа в виде сумм различного вида. Одна из них задача Лагранжа (1770 г.) о том, что любое целое положительное число является суммой не более четырех квадратов натуральных чисел

$$l_1^2 + l_2^2 + l_3^2 + l_4^2 = N.$$

До этой задачи математики П. Ферма, Л. Эйлер и другие изучали квадратичные формы частного вида. Ж. Лагранж установил точную связь между вопросом о представлении чисел квадратичной формой и разрешимостью соответствующего сравнения второй степени.

К. Ф. Гаусс, а затем Л. Дирихле, продолжая исследования Эйлера, создали теорию представления натуральных чисел квадратичными формами. Гаусс ввел так называемые *суммы Гаусса*

$$S(q, a, b) = \sum_{1 \leq l \leq q} e^{2\pi i(al^2 + bl)/q},$$

которые явились первыми примерами тригонометрических сумм, и показал их полезность в решении задач теории чисел.

В 1926 г. Х. Клоостерман обобщил задачу Лагранжа (см. [5]), рассмотрев вопрос о представлении целого положительного числа в виде диагональной квадратичной формы, зависящей от четырех целых переменных (задача Клоостермана):

$$n = ax^2 + by^2 + cz^2 + dt^2. \quad (1)$$

Он получил для числа решений  $r(n)$  уравнения (1) асимптотическую формулу

$$r(n) = \frac{\pi^2}{\sqrt{abcd}} nS(n) + O(n^{17/18+\epsilon}),$$

где

$$S(n) = \sum_{q=1}^{\infty} \frac{1}{q^4} \sum_{\substack{l=1 \\ (l,q)=1}}^q e^{-2\pi i n l / q} S(q, al, 0) S(q, bl, 0) S(q, cl, 0) S(q, dl, 0). \quad (2)$$

Кроме того, в [5] были рассмотрены некоторые примеры, когда число представлений равно нулю. Их доказательство было основано на теории сравнений, а в отдельных случаях отсутствовало. Вопрос о представлении четного числа рассмотрен Клоостерманом более подробно, чем случаи с нечетным простым  $p$ , входящим в разложение  $n$ .

Применение точных формул для сумм Гаусса и Рамануджана (см. [1–4]) позволило подробно рассмотреть случаи для нечетного простого  $p$ , при которых уравнение (1), где  $a, b, c, d, n$  — положительные целые числа, не имеет решения, и дополнить их.

**2. Основные результаты.** Пусть  $p$  — нечетное простое число,  $a, b, c, d, n$  — положительные целые.

**Теорема 1.** Уравнение  $n = ax^2 + by^2 + cz^2 + dt^2$  не имеет решения в следующих случаях:

- 1.1. если  $n$  и  $p$  взаимно просты, коэффициенты  $a, b, c, d$  делятся на  $p$ ;
- 1.2. если  $n$  и  $p$  взаимно просты, три коэффициента квадратичной формы  $ax^2 + by^2 + cz^2 + dt^2$  делятся на  $p$ , произведение четвертого коэффициента и  $n$  является квадратичным невычетом по модулю  $p$ .

**Теорема 2.** Пусть

$$\begin{aligned} a &= p^{\alpha_1} a_1, & (a_1, p) &= 1, & b &= p^{\beta_1} b_1, & (b_1, p) &= 1, \\ (c, p) &= 1, & (d, p) &= 1, & n &= p^{\eta_1} n_1, & (n_1, p) &= 1. \end{aligned}$$

Уравнение  $n = ax^2 + by^2 + cz^2 + dt^2$  не имеет решения в следующих случаях:

- 2.1. если  $\eta_1 < \alpha_1 \leq \beta_1$ ,  $\eta_1$  — нечетное число,  $(-cd)$  — квадратичный невычет по модулю  $p$ ;
- 2.2. если  $\eta_1 = \alpha_1 < \beta_1$ ,  $\eta_1$  — нечетное число,  $a_1 n_1$  и  $(-cd)$  — квадратичные невычеты по модулю  $p$ ;
- 2.3. если  $\alpha_1 < \eta_1 < \beta_1$ ,  $\alpha_1$  и  $\eta_1$  — нечетные числа,  $a_1 n_1$  и  $(-cd)$  — квадратичные невычеты по модулю  $p$ .

**Теорема 3.** Пусть

$$\begin{aligned} a &= p^{\alpha_1} a_1, & (a_1, p) &= 1, & b &= p^{\beta_1} b_1, & (b_1, p) &= 1, \\ c &= p^{\gamma_1} c_1, & (c_1, p) &= 1, & (d, p) &= 1, & n &= p^{\eta_1} n_1, & (n_1, p) &= 1. \end{aligned}$$

Уравнение  $n = ax^2 + by^2 + cz^2 + dt^2$  не имеет решения в следующих случаях:

- 3.1. если  $\eta_1 < \alpha_1 \leq \beta_1 \leq \gamma_1$  и  $\eta_1$  — нечетное число;
- 3.2. если  $\eta_1 < \alpha_1 \leq \beta_1 \leq \gamma_1$ ,  $\eta_1$  — четное число и  $dn_1$  — квадратичный невычет по модулю  $p$ ;
- 3.3. если  $\eta_1 = \alpha_1 < \beta_1 \leq \gamma_1$ ,  $\eta_1$  — нечетное число и  $a_1 n_1$  — квадратичный невычет по модулю  $p$ ;
- 3.4. если  $\alpha_1 < \eta_1 < \beta_1 \leq \gamma_1$ ,  $\eta_1$  — нечетное число,  $\alpha_1$  — четное число и  $(-a_1 d)$  — квадратичный невычет по модулю  $p$ ;
- 3.5. если  $\alpha_1 < \eta_1 < \beta_1 \leq \gamma_1$ ,  $\alpha_1$  — нечетное число и
 
$$\left( \frac{d}{p^{\eta_1+1}} \right) \left( \frac{a_1}{p^{\eta_1}} \right) \left( \frac{n_1}{p} \right) = -1;$$
- 3.6. если  $\alpha_1 < \eta_1 = \beta_1 < \gamma_1$ ,  $\eta_1$  — нечетное число,  $\alpha_1$  — четное число и  $(-a_1 d)$  и  $b_1 n_1$  — квадратичные невычеты по модулю  $p$ ;
- 3.7. если  $\alpha_1 \leq \beta_1 < \eta_1 < \gamma_1$ ,  $\eta_1$  — четное число,  $\alpha_1$  — нечетное число,  $\beta_1$  — нечетное число,  $(-a_1 b_1)$  и  $dn_1$  — квадратичные невычеты по модулю  $p$ ;
- 3.8. если  $\alpha_1 \leq \beta_1 < \eta_1 < \gamma_1$ ,  $\eta_1$  — нечетное число,  $\alpha_1$  — нечетное число,  $\beta_1$  — четное число,  $(-b_1 d)$  и  $a_1 n_1$  — квадратичные невычеты по модулю  $p$ ;
- 3.9. если  $\alpha_1 \leq \beta_1 < \eta_1 < \gamma_1$ ,  $\eta_1$  — нечетное число,  $\alpha_1$  — четное число,  $\beta_1$  — нечетное число,  $(-a_1 d)$  и  $b_1 n_1$  — квадратичные невычеты по модулю  $p$ .

Отметим, что утверждение теоремы 1 доказано в работе Клоостермана [5] с помощью теории сравнений. Случаи 2.1 и 2.2 приведены у Клоостермана без доказательства, а утверждение 2.3 является новым и не рассматривалось ранее. Результаты теоремы 3 являются новыми, не исследовались в работе Клоостермана.

Приведем подробное доказательство теоремы 1. Теоремы 2 и 3 доказываются аналогично. Нам понадобятся следующие утверждения, доказательство которых можно найти в [1].

### 3. Вспомогательные леммы.

**Лемма 1** (равенства для суммы Гаусса).

1. Если  $(q_1, q_2) = 1$ , то

$$S(q_1 q_2, u, 0) = S(q_1, u q_2, 0) S(q_2, u q_1, 0).$$

2. Если  $(q, 2u) = 1$ , то

$$S(q, u, 0) = \left(\frac{u}{q}\right) S(q, 1, 0),$$

где  $\left(\frac{u}{q}\right)$  — символ Якоби,

$$S(q, 1, 0) = \begin{cases} \sqrt{q}, & \text{если } q \equiv 1 \pmod{4}, \\ i\sqrt{q}, & \text{если } q \equiv 3 \pmod{4} \end{cases} = i^{(q-1)^2/4} \sqrt{q}.$$

3. Если  $(q, u) = n$ , то

$$S(q, u, 0) = n S\left(\frac{q}{n}, \frac{u}{n}, 0\right).$$

**Лемма 2** (равенства для суммы Рамануджана). Пусть

$$K(q, u) = \sum_{\substack{1 \leq l \leq q \\ (l, q) = 1}} e^{2\pi i u l / q}$$

— сумма Рамануджана. Справедливы следующие утверждения.

1.  $K(q, -u) = K(q, u)$ .

2. При  $(q_1, q_2) = 1$  имеет место равенство

$$K(q_1 q_2, u) = K(q_1, u_1) K(q_2, u_2),$$

где  $u_1$  и  $u_2$  определены по модулям  $q_1$  и  $q_2$  соответственно сравнением

$$u_1 q_2 + u_2 q_1 \equiv u \pmod{q_1 q_2}.$$

3. Пусть  $(u, p) = 1$ ,  $\alpha > 1$ . Тогда

$$K(p, u) = -1, \quad K(p^\alpha, u) = 0.$$

4. Пусть  $u = p^\alpha u_1$ ,  $(u_1, p) = 1$ ,  $\alpha > 1$ ,  $s > 1$ . Тогда

$$K(p^\alpha, u) = p^{\alpha-1}(p-1), \quad K(p^{\alpha+1}, u) = -p^\alpha, \quad K(p^{\alpha+s}, u) = 0.$$

**Лемма 3** (равенства для обобщенной суммы Рамануджана). Пусть  $p$  — нечетное простое число и

$$K_p(p^\alpha, u) = \sum_{\substack{l=1 \\ (l, p^\alpha)=1}}^{p^\alpha} \left(\frac{l}{p}\right) e^{2\pi i u l / p^\alpha}$$

— обобщенная сумма Рамануджана. Справедливы следующие утверждения.

1. Пусть  $(u, p) = 1$ ,  $\alpha > 1$ . Тогда

$$K_p(p, u) = S(p, u, 0), \quad K_p(p^\alpha, u) = 0.$$

2. Пусть  $u = p^\alpha u_1$ ,  $(u_1, p) = 1$ ,  $\alpha > 1$ ,  $s > 1$ . Тогда

$$K_p(p^\alpha, u) = 0, \quad K_p(p^{\alpha+1}, u) = p^\alpha S(p, u_1, 0), \quad K_p(p^{\alpha+s}, u) = 0.$$

**4. Доказательство теоремы 1.** Для особого ряда  $S(n)$  асимптотической формулы (2) рассмотрим функцию

$$\Phi(q) = \frac{1}{q^4} \sum_{\substack{l=1 \\ (l,q)=1}}^q e^{-2\pi i n l / q} S(q, al, 0) S(q, bl, 0) S(q, cl, 0) S(q, dl, 0).$$

Покажем, что она является мультипликативной. Пусть  $q = q_1 q_2$ ,  $(q_1, q_2) = 1$ ,  $l = l_1 q_2 + l_2 q_1$ ; тогда из утверждения 1.1 леммы 1 следует, что

$$S(q, al, 0) = S(q_1 q_2, al_1 q_2 + al_2 q_1, 0) = S(q_1, al_1 q_2^2, 0) S(q_2, al_2 q_1^2, 0).$$

Учтем равенство

$$S(q_1, al_1 q_2^2, 0) = \sum_{1 \leq j \leq q_1} e^{2\pi i a l_1 q_2^2 j^2 / q_1} = \sum_{q_2 \leq j_1 \leq q_1 q_2} e^{2\pi i a l_1 j_1^2 / q_1} = S(q_1, al_1, 0).$$

Тогда

$$S(q, al, 0) = S(q_1, al_1, 0) S(q_2, al_2, 0).$$

Аналогичные рассуждения справедливы и для остальных сумм  $S(q, bl, 0)$ ,  $S(q, cl, 0)$ ,  $S(q, dl, 0)$ . Кроме того, из утверждения 2.2 леммы 2 следует, что

$$\sum_{\substack{l=1 \\ (l, q_1 q_2)=1}}^{q_1 q_2} e^{-2\pi i n l / (q_1 q_2)} = \sum_{\substack{l_1=1 \\ (l_1, q_1)=1}}^{q_1} e^{-2\pi i n l_1 / q_1} \sum_{\substack{l_2=1 \\ (l_2, q_2)=1}}^{q_2} e^{-2\pi i n l_2 / q_2}.$$

Следовательно,

$$\begin{aligned} \Phi(q_1 q_2) &= \frac{1}{q_1^4} \sum_{\substack{l_1=1 \\ (l_1, q_1)=1}}^{q_1} e^{-2\pi i n l_1 / q_1} S(q_1, al_1, 0) S(q_1, bl_1, 0) S(q_1, cl_1, 0) S(q_1, dl_1, 0) \times \\ &\quad \times \frac{1}{q_2^4} \sum_{\substack{l_2=1 \\ (l_2, q_2)=1}}^{q_2} e^{-2\pi i n l_2 / q_2} S(q_2, al_2, 0) S(q_2, bl_2, 0) S(q_2, cl_2, 0) S(q_2, dl_2, 0). \end{aligned}$$

Таким образом,  $\Phi(q_1 q_2) = \Phi(q_1) \Phi(q_2)$ , и мультипликативность доказана.

По свойству мультипликативной функции получим представление особого ряда в виде произведения

$$\sum_{q=1}^{+\infty} \Phi(q) = \prod_{p|q} (1 + \Phi(p) + \Phi(p^2) + \dots).$$

Получим точные формулы для всевозможных произведений при нечетном простом  $p$ ,  $(n, p) = 1$ .

*4.1. Случай, когда  $a, b, c, d, n$  взаимно просты с  $p$ .* Пусть

$$(a, p) = 1, \quad (b, p) = 1, \quad (c, p) = 1, \quad (d, p) = 1, \quad (n, p) = 1.$$

Тогда для произведения сумм Гаусса (лемма 1, утверждение 1.2) получаем формулу

$$S(p^\alpha, al, 0) S(p^\alpha, bl, 0) S(p^\alpha, cl, 0) S(p^\alpha, dl, 0) = \left( \frac{abcd}{p^\alpha} \right) p^{2\alpha}.$$

Следовательно,

$$\Phi(p^\alpha) = \left( \frac{abcd}{p^\alpha} \right) \frac{1}{p^{2\alpha}} K(p^\alpha, -n).$$

Используя равенство 3 из леммы 3.2, получаем

$$\Phi(p) = - \left( \frac{abcd}{p} \right) \frac{1}{p^2}, \quad \Phi(p^\alpha) = 0, \quad \alpha > 1.$$

Получаем первый множитель в представлении особого ряда в виде произведений по простым числам:

$$\prod_{\substack{p: (a,p)=1, \\ (b,p)=1, (c,p)=1, \\ (d,p)=1, (n,p)=1}} \left(1 - \left(\frac{abcd}{p}\right) \frac{1}{p^2}\right).$$

Отметим, что при  $(a, p) = 1$ ,  $(b, p) = 1$ ,  $(c, p) = 1$ ,  $(d, p) = 1$ ,  $n = p^\alpha n_1$ ,  $(n_1, p) = 1$ ,  $\alpha > 1$  формулы для произведения сумм Гаусса аналогичны:

$$\Phi(p^\alpha) = \left(\frac{abcd}{p^\alpha}\right) \frac{1}{p^{2\alpha}} K(p^\alpha, -n).$$

Изменяются формулы для суммы Рамануджана. Используя равенство 4 из леммы 2, получаем, что

$$\begin{aligned} \Phi(p^k) &= \left(\frac{abcd}{p^k}\right) \frac{p-1}{p^{k+1}}, \quad k = 1, 2, \dots, \alpha, \\ \Phi(p^{\alpha+1}) &= -\left(\frac{abcd}{p^{\alpha+1}}\right) \frac{1}{p^{\alpha+2}}, \quad \Phi(p^{\alpha+s}) = 0, \quad s > 1. \end{aligned}$$

Получаем второй множитель в представлении особого ряда в виде произведений по простым числам:

$$\prod_p \left(1 + \left(\frac{abcd}{p}\right) \frac{p-1}{p^2} + \left(\frac{abcd}{p^2}\right) \frac{p-1}{p^3} + \dots + \left(\frac{abcd}{p^\alpha}\right) \frac{p-1}{p^{\alpha+1}} - \left(\frac{abcd}{p^{\alpha+1}}\right) \frac{1}{p^{\alpha+2}}\right).$$

$(a,p)=1, (b,p)=1,$   
 $(c,p)=1, (d,p)=1$   
 $n=p^\alpha n_1, \alpha > 1,$   
 $(n_1,p)=1$

В результате при  $(a; p) = (b; p) = (c; p) = (d; p) = 1$ ,  $n = p^\alpha n_1$ ,  $(n_1, p) = 1$ ,  $\alpha \geq 1$  имеем

$$\prod_p \left(1 - \left(\frac{abcd}{p}\right) \frac{1}{p^2}\right) \left(1 + \left(\frac{abcd}{p}\right) \frac{1}{p} + \left(\frac{abcd}{p^2}\right) \frac{1}{p^2} + \dots + \left(\frac{abcd}{p^\alpha}\right) \frac{1}{p^\alpha}\right).$$

$(a,p)=1, (b,p)=1,$   
 $(c,p)=1, (d,p)=1,$   
 $n=p^\alpha n_1, \alpha \geq 1,$   
 $(n_1,p)=1$

Если  $abcd$  — квадратичный вычет по модулю  $p$ , то

$$\begin{aligned} 1 - \left(\frac{abcd}{p}\right) \frac{1}{p^2} &= 1 - \frac{1}{p^2} > 3/4, \\ \left(1 + \left(\frac{abcd}{p}\right) \frac{1}{p} + \left(\frac{abcd}{p^2}\right) \frac{1}{p^2} + \dots + \left(\frac{abcd}{p^\alpha}\right) \frac{1}{p^\alpha}\right) &= \frac{p^{\alpha+1} - 1}{p^\alpha(p-1)} > 1. \end{aligned}$$

Если  $abcd$  — квадратичный невычет по модулю  $p$ , то

$$\begin{aligned} 1 - \left(\frac{abcd}{p}\right) \frac{1}{p^2} &= 1 + \frac{1}{p^2} > 1, \\ \left(1 + \left(\frac{abcd}{p}\right) \frac{1}{p} + \left(\frac{abcd}{p^2}\right) \frac{1}{p^2} + \dots + \left(\frac{abcd}{p^\alpha}\right) \frac{1}{p^\alpha}\right) &= \frac{p^{\alpha+1} - (-1)^{\alpha+1}}{p^\alpha(p+1)} > \frac{1}{2}. \end{aligned}$$

4.2. Случай, когда один из коэффициентов  $a, b, c, d$  делится на  $p$ ,  $(n, p) = 1$ . Пусть

$$a = p^{\alpha_1} a_1, \quad (a_1, p) = 1, \quad (b, p) = 1, \quad (c, p) = 1, \quad (d, p) = 1, \quad (n, p) = 1.$$

Найдем  $\Phi(p)$ :

$$\Phi(p) = \frac{1}{p^3} \left(\frac{bcd}{p}\right) S^3(p, 1, 0) \sum_{\substack{l=1 \\ (l,p)=1}}^p \left(\frac{l}{p}\right) e^{-2\pi i n l / p}.$$

Используя лемму 3 (утверждение 3.1), получаем

$$\Phi(p) = \frac{1}{p^3} \left( \frac{-bcdn}{p} \right) S^4(p, 1, 0) = \frac{1}{p} \left( \frac{-bcdn}{p} \right).$$

Пусть  $1 < \alpha \leq \alpha_1$ . Тогда

$$\Phi(p^\alpha) = \frac{1}{p^{3\alpha}} \left( \frac{bcd}{p^\alpha} \right) S^3(p^\alpha, 1, 0) \sum_{\substack{l=1 \\ (l, p^\alpha)=1}}^{p^\alpha} \left( \frac{l}{p^\alpha} \right) e^{-2\pi i n l / p^\alpha}.$$

Если  $\alpha$  — четное, то

$$\sum_{\substack{l=1 \\ (l, p^\alpha)=1}}^{p^\alpha} \left( \frac{l}{p^\alpha} \right) e^{-2\pi i n l / p^\alpha} = K(p^\alpha, -n) = 0$$

в силу леммы 2 о сумме Рамануджана (утверждение 2.3). Если  $\alpha$  — нечетное, то

$$\sum_{\substack{l=1 \\ (l, p^\alpha)=1}}^{p^\alpha} \left( \frac{l}{p^\alpha} \right) e^{-2\pi i n l / p^\alpha} = K_p(p^\alpha, -n) = 0$$

в силу леммы 3 об обобщенной сумме Рамануджана (утверждение 3.1). Тогда  $\Phi(p^\alpha) = 0$ .

Пусть  $\alpha > \alpha_1 \geq 1$ . В этом случае

$$\Phi(p^\alpha) = p^{\alpha_1 - 4\alpha} \left( \frac{bcd}{p^\alpha} \right) \left( \frac{a_1}{p^{\alpha - \alpha_1}} \right) S^3(p^\alpha, 1, 0) S(p^{\alpha - \alpha_1}, 1, 0) \sum_{\substack{l=1 \\ (l, p^\alpha)=1}}^{p^\alpha} \left( \frac{l}{p^{2\alpha - \alpha_1}} \right) e^{-2\pi i n l / p^\alpha}.$$

Имеем

$$\sum_{\substack{l=1 \\ (l, p^\alpha)=1}}^{p^\alpha} \left( \frac{l}{p^{2\alpha - \alpha_1}} \right) e^{-2\pi i n l / p^\alpha} = 0$$

для четного  $\alpha_1$  в силу леммы 2 (утверждение 2.3), а для нечетного  $\alpha_1$  в силу леммы 3 (утверждение 3ю1). Тогда  $\Phi(p^\alpha) = 0$ .

Получаем следующий множитель:

$$\prod_p \left( 1 + \left( \frac{-bcdn}{p} \right) \frac{1}{p} \right).$$

$a = p^{\alpha_1} a_1, (a_1, p) = 1,$   
 $(b, p) = 1, (c, p) = 1,$   
 $(d, p) = 1, (n, p) = 1$

Данная скобка больше 1, если  $(-bcdn)$  — квадратичный вычет по модулю  $p$ ; больше  $1/2$  и стремится к 1 с ростом  $p$ , если  $(-bcdn/p) = -1$ .

4.3. Случай, когда два коэффициента делятся на  $p$ ,  $(n, p) = 1$ . Пусть

$$a = p^{\alpha_1} a_1, (a_1, p) = 1, b = p^{\beta_1} b_1, (b_1, p) = 1, (c, p) = 1, (d, p) = 1, (n, p) = 1.$$

Имеем

$$\Phi(p) = \frac{1}{p^2} \left( \frac{cd}{p} \right) S^2(p, 1, 0) \sum_{\substack{l=1 \\ (l, p)=1}}^p e^{-2\pi i n l / p} = - \left( \frac{-cd}{p} \right) \frac{1}{p}.$$

Пусть  $\min(\alpha_1, \beta_1) = \alpha_1$ .

4.3.1. При  $1 < \alpha \leq \alpha_1$  с учетом утверждения 2.3 леммы 2 имеем

$$\Phi(p^\alpha) = \frac{1}{p^{2\alpha}} \left( \frac{cd}{p^\alpha} \right) S^2(p^\alpha, 1, 0) \sum_{\substack{l=1 \\ (l, p^\alpha)=1}}^{p^\alpha} e^{-2\pi i n l / p^\alpha} = 0.$$

4.3.2. При  $\alpha_1 < \alpha \leq \beta_1$

$$\Phi(p^\alpha) = p^{\alpha_1 - 4\alpha} \left(\frac{cd}{p^\alpha}\right) \left(\frac{a_1}{p^{\alpha - \alpha_1}}\right) S^2(p^\alpha, 1, 0) S(p^{\alpha - \alpha_1}, 1, 0) \sum_{\substack{l=1 \\ (l, p^\alpha)=1}}^{p^\alpha} \left(\frac{l}{p^{\alpha - \alpha_1}}\right) e^{-2\pi i n l / p^\alpha}.$$

Сумма Рамануджана

$$\sum_{\substack{l=1 \\ (l, p^\alpha)=1}}^{p^\alpha} \left(\frac{l}{p^{\alpha - \alpha_1}}\right) e^{-2\pi i n l / p^\alpha}$$

равна нулю. При четном  $\alpha - \alpha_1$  это следует из утверждения 2.3 леммы 2, при нечетном — из утверждения 3.1 леммы 3. Поэтому  $\Phi(p^\alpha) = 0$ .

4.3.3. При  $\alpha_1 \leq \beta_1 < \alpha$

$$\begin{aligned} \Phi(p^\alpha) &= p^{\alpha_1 + \beta_1 - 4\alpha} \left(\frac{cd}{p^\alpha}\right) \left(\frac{a_1}{p^{\alpha - \alpha_1}}\right) \left(\frac{b_1}{p^{\alpha - \beta_1}}\right) \times \\ &\times S^2(p^\alpha, 1, 0) S(p^{\alpha - \alpha_1}, 1, 0) S(p^{\alpha - \beta_1}, 1, 0) \sum_{\substack{l=1 \\ (l, p^\alpha)=1}}^{p^\alpha} \left(\frac{l}{p^{2\alpha - \alpha_1 - \beta_1}}\right) e^{-2\pi i n l / p^\alpha}. \end{aligned}$$

Как и в случае 4.3.2 имеем  $\Phi(p^\alpha) = 0$ . Получаем множитель

$$\prod_p \left(1 - \left(\frac{-cd}{p}\right) \frac{1}{p}\right).$$

$a = p^{\alpha_1} a_1, (a_1, p) = 1,$   
 $b = p^{\beta_1} b_1, (b_1, p) = 1,$   
 $(c, p) = 1, (d, p) = 1, (n, p) = 1$

Данная скобка больше  $1/2$ , если  $(-cd)$  — квадратичный вычет по модулю  $p$ ; больше 1 и стремится к 1 с ростом  $p$ , если  $(-cd/p) = -1$ .

4.4. *Случай, когда три коэффициента делятся на  $p$ ,  $(n, p) = 1$ . Пусть*

$$\begin{aligned} a &= p^{\alpha_1} a_1, & (a_1, p) &= 1, & b &= p^{\beta_1} b_1, & (b_1, p) &= 1, \\ c &= p^{\gamma_1} c_1, & (c_1, p) &= 1, & (d, p) &= 1, & (n, p) &= 1. \end{aligned}$$

Найдем  $\Phi(p)$ :

$$\Phi(p) = \frac{1}{p} \left(\frac{d}{p}\right) S(p, 1, 0) \sum_{\substack{l=1 \\ (l, p)=1}}^p \left(\frac{l}{p}\right) e^{-2\pi i n l / p}.$$

Используя утверждение 3.1 леммы 3, получаем

$$\Phi(p) = \frac{1}{p} \left(\frac{-dn}{p}\right) S^2(p, 1, 0) = \left(\frac{dn}{p}\right).$$

Пусть  $\alpha_1 \leq \beta_1 \leq \gamma_1$ . Из утверждения 2.3 леммы 2 и из утверждения 3.1 леммы 3 получим, что  $\Phi(p^\alpha) = 0$ . Имеем следующий множитель:

$$\prod_p \left(1 + \left(\frac{dn}{p}\right)\right).$$

$a = p^{\alpha_1} a_1, (a_1, p) = 1,$   
 $b = p^{\beta_1} b_1, (b_1, p) = 1,$   
 $c = p^{\gamma_1} c_1, (c_1, p) = 1,$   
 $(d, p) = 1, (n, p) = 1$

Полученная скобка равна нулю в том случае, если  $dn$  — квадратичный невычет по модулю  $p$ ; равна двум, если  $dn$  — квадратичный вычет по модулю  $p$ .

4.5. *Случай, когда все коэффициенты делятся на  $p$ ,  $(n, p) = 1$ . Уравнение (1) не имеет решения. Тем самым получим утверждения теоремы 1.*

Доказательство теорем 2 и 3 проводятся аналогично. В данном случае при вычислении точных формул для функции  $\Phi(p^\alpha)$  используются утверждения 2.4 леммы 2 и 3.2 леммы 3.

#### СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. *Мальшев А. В.* О представлении целых чисел положительными квадратичными формами// Тр. Мат. ин-та им. В. А. Стеклова АН СССР. — 1962. — 65. — С. 3–212.
2. *Estermann T.* On Kloosterman's sum// Mathematica. — 1961. — 8. — P. 83–86.
3. *Estermann T.* A new application of the Hardy–Littlewood–Kloosterman method// Proc. London Math. Soc. — 1962. — 12. — P. 425–444.
4. *Hua Loo-Keng* Introduction to Number Theory. — Berlin–Heidelberg–New York: Springer-Verlag, 1982.
5. *Kloosterman H. D.* On the representation of number in the form// Acta Math. — 1926. — 49. — P. 407–464.

Куртова Лилиана Николаевна

Белгородский государственный национальный исследовательский университет

E-mail: kurtova@bsu.edu.ru

Мотькина Наталья Николаевна

Белгородский государственный национальный исследовательский университет

E-mail: motkina@bsu.edu.ru