конъюнкции K_s. Чтобы обнаружить неисправность, надо найти набор, на котором $\overline{K'_s} \oplus \overline{K_s}$ равно 1 или, что то же самое, $K'_s \oplus K_s$ равно 1.

Если $K'_s = 1$, то неисправность обнаруживается на наборе $\tilde{\sigma}_1 = (0, 0, \ldots, 0)$.

Если $K'_s = 0$, то неисправность обнаруживается на наборе $\tilde{\sigma}_3 = (1, 1, \ldots, 1)$.

Пусть, наконец, K'_s не константа. Тогда существует переменная x_i, которая входит в конъюнкцию K_s и не входит в K'_s. Переменная x_n нам может понадобиться только в случае поломки последнего конъюнктора цепи, но тогда на выходе "сломанной" цепи будет константа, а этот случай уже рассмотрен. Можем не рассматривать переменную x_1, так как она может понадобиться только при поломке самого верхнего элемента цепи, но на него подаются две переменные и мы можем выбрать другую переменную (если это x_n, то на выходе "сломанной" цепи будет константа, а этот случай уже рассмотрен). Поэтому на имеющемся в T наборе с единственным нулем в i-м разряде (во всех остальных разрядах этого набора единицы) получаем $K'_s \oplus K_s = 1$. Неисправность будет обнаружена. Тем самым мы показали, что T является единичным проверяющим тестом для схемы S. Его длина равна $n + 1$, что даже меньше, чем $n + 3$. Неизбыточность очевидна (в ходе перебора всех неисправностей мы не получали тривиальной функции неисправности). Теорема в случае $i = 1$ доказана.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. *Лупанов О.Б.* Асимптотические оценки сложности управляющих систем. М.: Изд-во МГУ, 1984.
2. *Чегис И.А., Яблонский С.В.* Логические способы контроля работы электрических схем // Тр. Матем. ин-та АН СССР. 1958. **51**. 270–360.
3. *Яблонский С.В.* Некоторые вопросы надежности и контроля управляющих систем // Математические вопросы кибернетики. Вып. 1. М.: Наука, Физматлит, 1988, 5–25.
4. *Редькин Н.П.* Надежность и диагностика схем. М.: Изд-во МГУ, 1992.
5. *Редькин Н.П.* Дискретная математика. М.: Физматлит, 2009.
6. *Яблонский С.В.* Введение в дискретную математику. 2-е изд. М.: Наука, 1986.
7. *Reddy S.M.* Easily testable realization for logic functions // IEEE Trans. Comput. 1972. N 1. 124–141.

Поступила в редакцию
04.03.2011

УДК 511.34

О ПРЕДСТАВИМОСТИ ЦЕЛЫХ ЧИСЕЛ ЗНАЧЕНИЯМИ ФУНКЦИИ РАМАНУДЖАНА

П. В. Снурницын[1]

Доказано, что каждое целое число представляется суммой 7940 значений функции Рамануджана.

Ключевые слова: аналитическая теория чисел, функция Рамануджана, проблема Варинга.

It is proved that every integer number can be expressed as a sum of 7940 values of the Ramanujan tau function.

Key words: analytic number theory, Ramanujan tau function, Waring's problem.

Настоящая работа посвящена аддитивной задаче, связанной с функцией Рамануджана, а именно исследуется вопрос о разрешимости для любого целого числа N уравнения вида

$$\sum_{i=1}^{g} \tau(n_i) = N, \tag{1}$$

[1] *Снурницын Павел Владимирович* — асп. каф. математического анализа мех.-мат. ф-та МГУ, e-mail: snurnitsyn@gmail.com.

где $\tau(n)$ — функция Рамануджана. Напомним, что функция τ Рамануджана может быть определена как коэффициент разложения

$$q\prod_{n=1}^{\infty}(1-q^n)^{24}=\sum_{n=1}^{\infty}\tau(n)q^n$$

(см., например, [1]).

В работах [2, 3] М. З. Гараев, В. К. Гарсия, С. В. Конягин доказали разрешимость уравнения (1) при $g=74000$ с оценкой $\max_{1\leqslant i\leqslant g} n_i \ll |N|^{\frac{2}{11}}$ и при $g=148000$ с оценкой $\max_{1\leqslant i\leqslant g} n_i \ll |N|^{\frac{2}{11}}e^{-c\frac{\log|N|}{\log\log|N|}}$, где $c>0$ — абсолютная постоянная.

В данной статье получен следующий результат.

Теорема. *Для любого целого числа N уравнение $\sum_{i=1}^{7940}\tau(n_i)=N$ разрешимо в натуральных числах $n_1,\ldots,n_{7940}$, причем $\max_{1\leqslant i\leqslant 7940} n_i \ll |N|^{\frac{2}{11}}$.*

Таким образом, множество значений функции Рамануджана образует аддитивный базис множества целых чисел порядка 7940.

Доказательство проводится по схеме, предложенной в работе [2]. Пусть M — достаточно большое четное число, $P_0=M^{\frac{1}{11}}$, $\mathscr{P}=\{p: p \text{ простое}, 23<p\leqslant P_0\}$, $\mathscr{P}'$ — подмножество $\mathscr{P}$ наибольшей мощности, такое, что $\sum_{i=1}^{6}\tau(p_i')\neq\sum_{i=7}^{12}\tau(p_i')$ при любых $p_1',\ldots,p_{12}'\in\mathscr{P}'$, $p_1'<\ldots<p_6'$, $p_7'<\ldots<p_{12}'$, $(p_1',\ldots,p_6')\neq(p_7',\ldots,p_{12}')$. В [2] показано, что подмножество $\mathscr{P}'$ существует и

$$|\mathscr{P}'|\ll M^{\frac{1}{11}-\frac{1}{132}}. \tag{2}$$

Обозначим $P=[P_0]$, $L=\log P$, $\vartheta=ML^{-2}$. Для дроби $\dfrac{a}{q}$ с $q\leqslant L^2$, $a<q$, $(a,q)=1$ определим

$$\Omega(a,q)=\{\alpha: -\frac{1}{\vartheta}\leqslant\alpha\leqslant 1-\frac{1}{\vartheta}, |\alpha-\frac{a}{q}|\leqslant\frac{1}{q\vartheta}\}.$$

Множества $\Omega(a,q)$ не пересекаются. Разобьем интервал $[-\frac{1}{\vartheta};1-\frac{1}{\vartheta}]$ следующим образом:

$$\Omega=\bigcup_{\substack{q\leqslant L^2, a<q\\(a,q)=1}}\Omega(a,q),\quad \omega=[-\frac{1}{\vartheta};1-\frac{1}{\vartheta}]\setminus\Omega.$$

Пусть

$$S(\alpha)=\sum_{p\in\mathscr{P}}e(\alpha p^{11}),\quad J(M)=\int_{\Omega}S(\alpha)^r e(-\alpha M)d\alpha,$$

где $e(x)=e^{2\pi ix}$.

Лемма 1. *При $r>23$*

$$J(M)=\mathfrak{S}(M)\frac{\Gamma(\frac{1}{11})^r}{\Gamma(\frac{1}{11}r)}\frac{M^{\frac{1}{11}r-1}}{(\log M)^r}+O\Big(\frac{M^{\frac{1}{11}r-1}}{(\log M)^r}\frac{\log\log M}{\log M}\Big),$$

где $\mathfrak{S}(M)$ — особый ряд проблемы Варинга–Гольдбаха для степени 11. При этом существует постоянная C_0, такая, что $\mathfrak{S}(M)\geqslant C_0>0$, C_0 не зависит от M.

Доказательство см. в [4, 5].

Лемма 2. *При $\alpha\in\omega$ для $S(\alpha)$ справедлива оценка $S(\alpha)\ll\frac{M^{\frac{1}{11}(1-\rho)}}{\log M}$, где $\rho=1/17630$.*

Доказательство см. в [4].

Лемма 3. *Для достаточно большого четного M уравнение $\sum_{i=1}^{215}p_i^{11}=M$ разрешимо в числах $p_1,\ldots,p_{215}\in\mathscr{P}\setminus\mathscr{P}'$.*

Доказательство. Рассмотрим уравнение

$$p_1^{11}+\ldots+p_r^{11}+u_1^{11}+\ldots+u_s^{11}+u_{s+1}^{11}+\ldots+u_{2s}^{11}=M, \tag{3}$$

где $p_1, \ldots, p_r \in \mathscr{P}$, $u_1, u_{s+1} \in \mathscr{U}_1, \ldots, u_s, u_{2s} \in \mathscr{U}_s$, $r \geqslant 24$, s — натуральное число, значение которого будет выбрано ниже, $\mathscr{U}_i = \{u : u \in \mathscr{P} \setminus \mathscr{P}', P_i < u < 2P_i\}$, $1 \leqslant i \leqslant s$, $P_1 = \frac{1}{4}P_0$, $P_2 = \frac{1}{2}P_1^{1-\frac{1}{11}}, \ldots, P_s = \frac{1}{2}P_{s-1}^{1-\frac{1}{11}}$. Заметим, что $|\mathscr{U}_i| \asymp P_i(\log P_i)^{-1}$.

Пусть $I(M)$ — число решений уравнения (3). Тогда

$$I(M) = \int\limits_0^1 S(\alpha)^r T_1(\alpha)^2 \ldots T_s(\alpha)^2 e(-\alpha M) d\alpha = \int\limits_{-\frac{1}{\vartheta}}^{1-\frac{1}{\vartheta}} S(\alpha)^r T_1(\alpha)^2 \ldots T_s(\alpha)^2 e(-\alpha M) d\alpha,$$

где

$$T_i(\alpha) = \sum_{u \in \mathscr{U}_i} e(\alpha u^{11}), \quad 1 \leqslant i \leqslant s.$$

Разобьем промежуток интегрирования, получим $I(M) = I_1(M) + I_2(M)$, где

$$I_1(M) = \int\limits_{\Omega} S(\alpha)^r T_1(\alpha)^2 \ldots T_s(\alpha)^2 e(-\alpha M) d\alpha, \quad I_2(M) = \int\limits_{\omega} S(\alpha)^r T_1(\alpha)^2 \ldots T_s(\alpha)^2 e(-\alpha M) d\alpha.$$

Для $I_2(M)$ имеем оценку

$$|I_2(M)| \leqslant \max_{\alpha \in \omega} |S(\alpha)|^r \int\limits_0^1 T_1(\alpha)^2 \ldots T_s(\alpha)^2 d\alpha.$$

Интеграл в правой части не превосходит $|\mathscr{U}_1| \ldots |\mathscr{U}_s|$. По лемме 2

$$|I_2(M)| \ll |\mathscr{U}_1| \ldots |\mathscr{U}_s| \, \frac{M^{\frac{1}{11}(1-\rho)r}}{(\log M)^r}.$$

Рассмотрим $I_1(M)$:

$$I_1(M) = \sum_{u_1, u_{s+1} \in \mathscr{U}_1} \cdots \sum_{u_s, u_{2s} \in \mathscr{U}_s} J(M - u_1^{11} - \cdots - u_{2s}^{11}).$$

Из леммы 1 получаем, что при $r \geqslant 24$

$$I_1(M) \geqslant C_1(|\mathscr{U}_1| \ldots |\mathscr{U}_s|)^2 \frac{M^{\frac{1}{11}r-1}}{(\log M)^r} - C_2(|\mathscr{U}_1| \ldots |\mathscr{U}_s|)^2 \frac{M^{\frac{1}{11}r-1}}{(\log M)^r} \frac{\log\log M}{\log M},$$

где C_1, C_2 — постоянные. Учитывая, что

$$C_3 \frac{M^{1-(\frac{10}{11})^s}}{(\log M)^s} \leqslant |\mathscr{U}_1| \ldots |\mathscr{U}_s| \leqslant C_4 \frac{M^{1-(\frac{10}{11})^s}}{(\log M)^s},$$

имеем

$$I(M) \geqslant C_5 \frac{M^{2-2(\frac{10}{11})^s}}{(\log M)^{2s}} \frac{M^{\frac{1}{11}r-1}}{(\log M)^r} - C_6 \frac{M^{2-2(\frac{10}{11})^s}}{(\log M)^{2s}} \frac{M^{\frac{1}{11}r-1}}{(\log M)^r} \frac{\log\log M}{\log M} - C_7 \frac{M^{1-(\frac{10}{11})^s}}{(\log M)^s} \frac{M^{\frac{1}{11}(1-\rho)r}}{(\log M)^r}.$$

При $s = 95$ получаем оценки

$$C_8 \frac{M^{\frac{1}{11}r+1-\eta}}{(\log M)^{r+190}} \leqslant I(M) \leqslant C_9 \frac{M^{\frac{1}{11}r+1-\eta}}{(\log M)^{r+190}}, \tag{4}$$

где $\eta = 2(\frac{10}{11})^{95}$.

Рассмотрим уравнение (3) при $r = 25$. Пусть $I'(M)$ — число решений этого уравнения, а $I''(M)$ — число таких решений, что по крайней мере одно $p_{j_0} \in \mathscr{P}'$. Для $I'(M)$ из (4) при $r = 25$ получаем оценку снизу

$$I'(M) \geqslant C_8 \frac{M^{\frac{36}{11}-\eta}}{(\log M)^{215}}.$$

А для $I''(M)$ из (4) при $r = 24$ и (2) получаем оценку сверху

$$I''(M) \leqslant 25C_9|\mathscr{P}'| \frac{M^{\frac{35}{11}-\eta}}{(\log M)^{214}} \ll \frac{M^{\frac{36}{11}-\eta-\frac{1}{132}}}{(\log M)^{214}}.$$

Таким образом, $I'(M) > I''(M)$, и уравнение

$$p_1^{11} + \ldots + p_{25}^{11} + u_1^{11} + \ldots + u_{190}^{11} = M$$

разрешимо в числах $p_1, \ldots, p_{25}, u_1, \ldots, u_{190} \in \mathscr{P} \setminus \mathscr{P}'$. Лемма доказана.

Лемма 4. *Для любого $p \in \mathscr{P} \setminus \mathscr{P}'$ существуют $p'_1, \ldots, p'_{11} \in \mathscr{P}'$, такие, что*

$$p^{11} = \sum_{i=1}^{6} \tau(p'_i p) - \sum_{i=7}^{11} \tau(p'_i p) - \tau(p^2).$$

Доказательство см. в [2].

Лемма 5. *Любое целое число r, $0 \leqslant r < 370944$, представимо в виде $r = \sum_{i=1}^{198} \tau(a_i)$, где $a_i \leqslant 105$, $1 \leqslant i \leqslant 198$.*

Доказательство см. в [2].

Теорема следует из лемм 3–5. Отметим, что полученное улучшение результата работы [2] достигнуто за счет леммы 3. В работе [2] использовалась разрешимость уравнения Варинга–Гольдбаха 11 степени в числах из $\mathscr{P}\setminus\mathscr{P}'$ с числом слагаемых 2050.

Автор выражает благодарность научному руководителю профессору Г. И. Архипову за постановку задачи.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. *Iwaniec H.* Topics in classical automorphic forms. Providence, RI: Grad. Stud. Math., Amer. Math. Soc., 1997.
2. *Гараев М.З., Гарсиа В.С., Конягин С.В.* Проблема Варинга с τ-функцией Рамануджана // Изв. РАН. Сер. матем. 2008. **72**, № 1. 39–50.
3. *Garaev M.Z., Garcia V.C., Konyagin S.V.* The Waring problem with the Ramanujan τ-function. II // Canad. Math. Bull. 2009. **52**, N 2. 195–199.
4. *Виноградов И.М.* Метод тригонометрических сумм в теории чисел. М.: Наука, 1980.
5. *Хуа Ло-кен.* Аддитивная теория простых чисел // Тр. Матем. ин-та АН СССР. 1947. **22**. 3–179.

Поступила в редакцию
25.05.2011

УДК 519.95

ОБ ОДНОЙ ПОСЛЕДОВАТЕЛЬНОСТИ ФУНКЦИЙ МНОГОЗНАЧНОЙ ЛОГИКИ

А. А. Андреев[1]

Рассматривается задача о реализации функций многозначной логики формулами. Приводится метод получения сверхэкспоненциальных оценок сложности для последовательностей функций.

[1] *Андреев Александр Андреевич* — студ. каф. дискретной математики мех.-мат. ф-та МГУ, e-mail: sanchez_14@mail.ru.