Math-Net.Ru
Общероссийский математический портал

А. М. Вершик, А. Г. Черняков, Критические точки полей выпуклых многогранников и оптимум по Парето–Смейлу относительно выпуклого конуса, *Докл. АН СССР*, 1982, том 266, номер 3, 529–532

Использование Общероссийского математического портала Math-Net.Ru подразумевает, что вы прочитали и согласны с пользовательским соглашением
http://www.mathnet.ru/rus/agreement

Параметры загрузки:
IP: 18.97.9.168
24 января 2025 г., 17:34:57

ЛИТЕРАТУРА

1. *Jain N.C., Marcus M.B.* – J.Func.Anal., 1975, vol. 19, p. 216. 2. *Паулаускас В.И.* – Литовск.матем.сб., 1976, т. 16, № 4, с. 103. 3. *Цирельсон Б.С.* – Теория вероятн. и ее примен., 1975, т. 20, № 4, с. 865. 4, *Бенткус В.Ю., Рачкаускас А.* – ДАН, 1982, т. 264, № 3. 5. *Gine E.* – Z.Wahrscheinlichkeitstheor. u. verw.Geb., 1976, Bd. 36, № 4, S. 317. 6. *Бенткус В.Ю., Рачкаускас А.* – Литовск.матем.сб., 1982, т. 22, № 3. 7. *Бенткус В.Ю., Рачкаускас А.* – Там же, 1982, т. 22, № 4. 8. *Paulauskas V.* Preprint of the Univercity of Goteborg, 1977, № 5. 9. *Паулаускас В.И.* – ДАН, 1980, т. 254, № 2, с. 286. 10. *Юринский В.В.* – ДАН, 1981, т. 258, № 3, с. 557.

УДК 514.76 + 514.17 + 519.81

МАТЕМАТИКА

А.М. ВЕРШИК, А.Г. ЧЕРНЯКОВ

КРИТИЧЕСКИЕ ТОЧКИ ПОЛЕЙ ВЫПУКЛЫХ МНОГОГРАННИКОВ И ОПТИМУМ ПО ПАРЕТО–СМЕЙЛУ ОТНОСИТЕЛЬНО ВЫПУКЛОГО КОНУСА

(Представлено академиком Л.В. Канторовичем 25 II 1982)

1. Пусть K – выпуклый, замкнутый конус в $\mathbf{R}^m$, не содержащий прямых и имеющий непустую внутренность (такой конус будем называть конусом порядка). Зададим на $\mathbf{R}^m$ отношение частичного порядка $\underset{K}{\geqslant}$, полагая $a \underset{K}{\geqslant} b \Leftrightarrow$ $\Leftrightarrow a - b \in K$. Пусть X – гладкое n-мерное многообразие (без края), φ: $X \to \mathbf{R}^m$ – гладкое отображение $n \geqslant m$.

Определение. Точка $x \in X$ называется точкой локального максимума отображения φ относительно конуса K, если для некоторой ее окрестности U из условий $y \in U$, $\varphi(y) \underset{K}{\geqslant} \varphi(x)$ вытекает, что $y = x$. Максимальные относительно $\mathbf{R}^m_+$ точки называются максимальными (или оптимальными) по Парето.

2. Определение. Точку $x \in X$ назовем критической точкой отображения φ относительно K, если

(1) $\quad d_x\varphi(T_xX) \cap \operatorname{Int} K = \phi.$

Пусть $K^* \subset \mathbf{R}^{m*}$ – сопряженный конус, $d_x\varphi^*$: $\mathbf{R}^{m*} \to T_x^*X$ – сопряженный к $d_x\varphi$ оператор. Как показывают стандартные рассуждения теории двойственности, выражение (1) эквивалентно соотношению $\ker d_x\varphi^* \cap K^* \neq \{\mathbf{0}\}$, т.е.

(2) $\quad \mathbf{0}_{T_x^*X} \in d_x\varphi^*(K^* \setminus \mathbf{0}).$

Любая максимальная относительно K точка является критической. Критические точки в смысле (2) определены для произвольного выпуклого конуса K (не обязательно конуса порядка); при $K = \{\mathbf{0}\}$ это обычные критические точки. Если K – конус порядка, то в $\mathbf{R}^m$ найдется такая аффинная гиперплоскость H, что множество $I^* = K^* \cap H$ компактно, имеет непустую внутренность в H, и $K^* = \operatorname{cone} I^*$. Любое такое множество I^* будем называть основанием конуса K^*. Условие (2) эквивалентно включению

(3) $\quad \mathbf{0}_{T_x^*X} \in d_x\varphi^*(I^*).$

При $K = \mathbf{R}^m_+$ в качестве I^* можно взять стандартный симплекс $\Delta^{m-1} \subset \mathbf{R}^m$, а включение (3) принимает вид

(4) $\quad \mathbf{0}_{T_x^*X} \in \mathrm{co}_{T_x^*X}(d_x\varphi_1, d_x\varphi_2, \ldots, d_x\varphi_m)$

(см. [1, 2]). Последнее условие встречается также при изучении максимумов функции $\varphi(x) = \min\limits_{1 \leqslant i \leqslant m} \varphi_i(x)$: если максимум достигается локально в точке x_0, то $\mathbf{0}_{T_x^*X} \in \mathrm{co}\{d_x\varphi_{i_k} | \varphi_{i_k}(x_0) = \min\limits_i \varphi_i(x_0)\}$ (справа стоит субдифференциал функции φ). Включение (4) фигурирует как достаточное условие экстремума и в задаче максимизации гладкой функции при гладких ограничениях.

3. Понятие Парето-критической точки было введено С. Смейлом в [1], в этой же работе была высказана гипотеза о структуре множества $\theta(\varphi)$ таких точек. Ее уточненная формулировка такова: *если $n > 2m - 4$, то для почти всех φ $\theta(\varphi)$ – подмногообразие с углами в X.* Несколько более слабый вариант этого утверждения был наряду с другими фактами доказан в работах Мело и Вана [3–5]. В статье авторов [2] гипотеза о структуре $\theta(\varphi)$ была доказана на основании общего результата о стратифицируемых подрасслоениях. С помощью той же техники в настоящей работе получено обобщение гипотезы Смейла на случай произвольного конуса (следствие теоремы 2). Это обобщение может служить объяснением того факта, что в теории Парето-оптимума фигурируют многообразия с углами: в случае произвольного конуса порядка K множество критических точек устроено так же, как основание конуса K^*. Теорема 1 служит аналогом результатов Мело–Вана для произвольного конуса K. Вторая часть работы посвящена обсуждению понятия гладкого поля выпуклых многогранников и его особых точек. При этом результат о Парето-критических точках оказывается частным случаем общей теоремы.

4. Определение. Пусть Z – стратифицированное в смысле Уитни (см. [6]) подмножество многообразия Y (подмногообразие с краем или с углами предполагается снабженным минимальной стратификацией), $S \subset X$. Будем говорить, что S – трансверсальный прообраз множества Z, если для каждой точки $x \in X$ найдется такая ее окрестность U в X и такое гладкое отображение f: $U \to Y$, что f трансверсально всем стратам множества Z и $S \cap U = f^{-1}(Z)$. Ясно, что S стратифицируемо по Уитни.

Прежде чем сформулировать основные теоремы, введем следующие обозначения. Пусть $G(m, r)$ – грассманово многообразие r-мерных плоскостей в $\mathbf{R}^m$, $A \subset \mathbf{R}^m$. Положим $\tilde{A}(m, r) = \{x \in G(m, r) | x \cap A \neq \phi\}$. Если A – полуалгебраично, то в силу теоремы Зайденберга–Тарского $\tilde{A}(m, r)$ также полуалгебраично и, следовательно, статифицируемо. Если $\mathbf{0} \bar{\in} A$ и A – подмногообразие с краем или углами, то таково же и $\tilde{A}(m, 1) \subset \mathbf{R}P^{m-1}$. Через $\theta_K(\varphi)$ обозначим множество всех критических точек отображения φ относительно конуса K; $\theta_K^i(\varphi) = \{x \in \theta_K(\varphi) | \operatorname{corank} d_x\varphi = i\}$; I_K^* – основание конуса K^*.

Теорема 1. *Предположим, что K – полуалгебраический конус порядка в $\mathbf{R}^m$. В пространстве $C^\infty(X, \mathbf{R}^m)$, снабженном C^∞-топологией Уитни, найдется такое открытое и всюду плотное подмножество $\mathcal{U}$, что для любого $\varphi \in \mathcal{U}$:*

1) $\theta_K(\varphi)$ – замкнутое $(m-1)$-мерное стратифицируемое подмножество в X;

2) для любого $i = 1, 2, \ldots, m$ $\theta_K^i(\varphi)$ – трансверсальный прообраз множества $\tilde{I}_K^*(m, i)$;

3) $\theta_K(\varphi)$ устойчиво, если X компактно, т.е. найдется такая окрестность $\mathcal{U}_\varphi \subset \mathcal{U}$ отображения φ, что для любого $\psi \in \mathcal{U}_\varphi$ существует сохраняющий статификацию гомеоморфизм $\theta_K(\varphi)$ на $\theta_K(\psi)$.

Теорема 2. *Пусть K – произвольный (не обязательно полуалгебраический) конус порядка в $\mathbf{R}^m$. Предположим, что I_K^* – подмногообразие с краем* *(с углами) в* $\mathbf{R}^m$. *В пространстве* $C^\infty(X, \mathbf{R}^m)$ *найдется такое открытое и всюду плотное подмножество* $\mathfrak{U}$, *что для любого* $\varphi \in \mathfrak{U}$ $\theta_K^1(\varphi)$ *есть* $(m-1)$*-мерное подмногообразие с краем (с углами) в* X.

При $n > 2m - 4$ для почти всех $\varphi \in C^\infty(X, \mathbf{R}^m)$ $\theta_K(\varphi) = \theta_K^1(\varphi)$.

Следствие. *Если* $n > 2m - 4$, *то для почти всех гладких отображений* φ: $X \to \mathbf{R}^m$ $\theta_K(\varphi)$ *есть* $(m-1)$*-мерное замкнутое подмножество, являющееся трансверсальным прообразом основания* I_K^* *конуса* K^*. *В частности, если* I_K^* *– многообразие с краем или углами, то таково же и* $\theta_K(\varphi)$.

5. Одним из основных понятий глобального выпуклого анализа является понятие поля выпуклых многогранников в векторном расслоении, введенное в [2]. Оно возникает в теории Парето-оптимума, геометрии выпуклых многогранников и других вопросах.

Пусть E – гладкое векторное расслоение над X, $V \subset E$, $V_x = V \cap E_x$ – выпуклый многогранник в слое E_x для любого $x \in X$. Упорядоченную пару (E, V) назовем семейством многогранников в расслоении E. Обозначим через F_X^m тривиальное расслоение $X \times \mathbf{R}^m$.

Определение. Пусть P – многогранник в $\mathbf{R}^m$, $P_X = X \times P \subset F_X^m$, f: $F_X^m \to E$ – C^∞-морфизм векторных расслоений. Семейство многогранников $P_f = (E, f(P_X))$ назовем полем многогранников (или P-полем, где P указывает на порождающий многогранник), порожденным отображением f. В частности, Δ^{m-1}-поле отвечает стандартному симплексу $\Delta^{m-1} \subset \mathbf{R}^m$.

Примеры. 1. Пусть K – многогранный конус порядка в $\mathbf{R}^m$, I^* – многогранник, лежащий в основании конуса K^*. В теории Парето–Смейла основную роль играет поле $d^*\varphi(I^*)$ многогранников в T^*X.

2. Пусть $X = G(m, r)$, $E = E(m, r)$ – тавтологическое векторное расслоение над X, $E^\perp$ –ортогональное дополнение к E в F_X^m, π, $\pi^\perp$ – ортогональные проекции F_X^m на E и $E^\perp$ соответственно, P – многогранник в $\mathbf{R}^m$. Поле многогранников $P_\pi \equiv \equiv P_{m,r}$ называется каноническим P-полем на $G(m,r)$, $P_{\pi^\perp}$ обозначается также через $P_{m,r}^\perp$.

3. Рассмотрим гладкое отображение φ: $X \to Y$, векторное расслоение E над Y и индуцированное расслоение $\bar{\varphi}E$ над X. Пусть V – поле многогранников в E. Поместив в каждый слой $(\bar{\varphi}E)_x$ индуцированного расслоения многогранник $V_{\varphi(x)}$, получим поле $\bar{\varphi}V$ многогранников в $\bar{\varphi}E$, называемое индуцированным.

Обозначим через $\mathrm{Pol}(n, m)$ (соответственно $\mathrm{pol}(n, m)$) совокупность всех многогранников в $\mathbf{R}^n$, имеющих не более m (ровно m) вершин. Отображение Conv: $\mathrm{Hom}(m, n) \to \mathrm{Pol}(n, m)$, которое каждой $(n \times m)$-матрице ставит в соответствие выпуклую оболочку ее столбцов, позволяет ввести на $\mathrm{Pol}(n, m)$ топологию (совпадающую с топологией, порожденной метрикой Хаусдорфа). При этом над $\mathrm{pol}(n, m)$ отображение Conv – накрытие. Тем самым $\mathrm{pol}(n, m)$ превращается в гладкое nm-мерное многообразие; каждая нумерация вершин задает карту (см. [2]). Топологическое пространство $\mathrm{Pol}(\mathbf{E}, m)$ и многообразие $\mathrm{pol}(\mathbf{E}, m)$ определено для любого конечномерного векторного пространства $\mathbf{E}$; $\mathrm{Pol}(\cdot, m)$ ковариантный функтор, позволяющий ассоциировать с каждым векторным расслоением E локально-тривиальное C^0-расслоение $\mathrm{Pol}(E, m)$ и C^∞-расслоение $\mathrm{pol}(E, m)$: слой $(\mathrm{Pol}(E, m))_x$ совпадает с $\mathrm{Pol}(E_x, m)$. Для любого морфизма f: $E' \to E$ задан морфизм C^0-расслоений $\mathrm{Pol}(f)$: $\mathrm{Pol}(E', m) \to \mathrm{Pol}(E, m)$.

Определение. Гладким полем m-вершинников в расслоении E называется C^∞-сечение над X расслоения $\mathrm{pol}(E, m)$; $\mathcal{P}(E, m)$ – пространство всех таких сечений, снабженное C^∞-топологией Уитни.

Заметим, что для любого векторного расслоения E имеет место канонический изоморфизм $\mathrm{pol}(J^r(E, m)) \cong J^r(\mathrm{pol}(E, m))$, т.е. r-струи полей из $\mathcal{P}(E, m)$ можно рассматривать как поля m-вершинников в расслоении $J^r(E)$ (r-струй сечений E).

Теорема 3. *Пусть (E, V) – семейство многогранников над компактным многообразием X. Следующие утверждения эквивалентны.*

1) *V – поле многогранников в E.*

2) *Найдутся такие сечения $s_1, s_2, \ldots, s_k \in \Gamma^\infty(X, E)$, что для любого $x \in X$ $V_x = \mathrm{co}_{E_x}(s_1(x), s_2(x), \ldots, s_k(x))$.*

3) *V есть Δ^q-поле для некоторого q.*

4) *$V = (\mathrm{Pol}\, f)(\xi)$, где ξ – гладкое поле m-вершинников в расслоении E', $f \in \mathrm{Hom}(E', E)$.*

5) *V индуцировано (в смысле примера 3 п. 5) каноническим полем проекций симплекса над грассмановым многообразием (см. пример 2).*

6. Определение. Точка $x \in X$ называется особой точкой поля многогранников (E, V), если $\mathbf{0}_{E_x} \in V_x$, совокупность особых точек обозначается $\theta(V)$.

Включение (3) показывает, что $\theta_K(\varphi) = \theta(I^*_{d\varphi^*})$. Пусть $D\colon G(m, r) \to$ $\to G(m, m-r)$ – канонический диффеоморфизм грассмановых многообразий, соответствующий переходу к ортогональному дополнению, P – многогранник в $\mathbf{R}^m$. Определенное в п. 5 множество $\widetilde{P}(m, r)$ совпадает с $\theta(P^\perp_{m,r})$ (см. п. 5, пример 2), а также с $D^{-1}(\theta(P_{m,m-r}))$.

Итак, Парето-критические точки – это особые точки некоторых специальных полей многогранников. Для данного выше определения особой точки имеются и другие весьма серьезные основания. А именно, в теории выпуклых многогранников известна техника диаграмм Гейла (см., например, [7]). Суть ее сводится к следующему: комбинаторный тип выпуклого многогранника может быть задан списком тех подмножеств вершин некоторой специально построенной конфигурации, внутренности выпуклых оболочек которых содержат 0. Таким образом, точки перестройки комбинаторного типа многогранников поля суть особые точки для некоторого вспомогательного поля (полей). В частности, с помощью методов и результатов настоящей работы может быть описана стратификация многообразия Грассмана $G(m, r)$, связанная с его разбиением в соответствии с комбинаторными типами слоев канонического Δ^{m-1}-поля (см. п. 5, пример 2). Следующая теорема, описывающая структуру множества особых точек поля многогранников, аналогична теореме 1. Пусть $p\colon J^r(E') \to E$ – эпиморфизм векторных расслоений над X. Для любого поля $\xi \in \mathcal{P}(E', m)$ его r-струю $j^r\xi$ можно рассматривать как элемент пространства $\mathcal{P}(J^r(E', m))$ (см. п. 5), в частности, определено поле $\xi_p^{(r)} \equiv (\mathrm{Pol}\, p)(j^r\xi)$; $\xi_p^{(r)}(x)$ – многогранник в E_x.

Теорема 4. *В пространстве $\mathcal{P}(E', m)$ гладких полей m-вершинников в расслоении E', $m \leqslant \dim E'$, найдется такое открытое и всюду плотное подмножество $\mathcal{U}$, что для любого $\xi \in \mathcal{U}$:*

1) *$\theta(\xi_p^{(r)})$ – замкнутое стратифицированное подмножество в X;*

2) *если X компактно, то $\theta(\xi_p^{(r)})$ устойчиво относительно малых шевелений ξ;*

3) *множество $\{x \in \theta(\xi_p^{(r)}) \mid \mathrm{codim\,Lin}\, \xi_p^{(r)}(x) = i\}$ – трансверсальный прообраз множества $\widetilde{\Delta}^{m-1}(m, i) \subset G(m, i)$.*

Ленинградский государственный университет
им. А.А. Жданова

Поступило
9 III 1982

ЛИТЕРАТУРА

1. *Смейл С.* – УМН, 1972, т. 27, вып. 3, с. 177. 2. *Вершик А.М., Черняков А.Г.* В кн.: Оптимизация, Новосибирск, 1982. 3. *De Melo W.* – Bol. Soc. Brasil. Mat., 1976, vol. 7, № 2, p. 121. 4. *Wan Y.-H.* – Topology, 1977, vol. 16, № 1, p. 113. 5. *Wan Y.-H.* – J. Mathem. Econ., 1978, vol. 5, № 3, p. 225. 6. *Мезер Дж.* – УМН, 1972, т. 27, вып. 5, с. 85. 7. *Grünbaum B.* Convex polytopes. L.; N.Y.; Sydney: Interscience Publishers, 1967.