



Math-Net.Ru

Общероссийский математический портал

И. И. Шарпудинов, Некоторые свойства ортогональных многочленов Мейкснера, *Матем. заметки*, 1990, том 47, выпуск 3, 135–137

Использование Общероссийского математического портала Math-Net.Ru подразумевает, что вы прочитали и согласны с пользовательским соглашением

<http://www.mathnet.ru/rus/agreement>

Параметры загрузки:

IP: 18.97.14.89

16 марта 2025 г., 09:39:40



фициент теплопроводности, b — градиент равновесной температуры, g — ускорение силы тяжести, β — коэффициент теплового расширения жидкости, k_3 — единичный вектор оси Ox_3 .

Развитие методики, предложенной в работах [2, 4, 6], позволяет свести описанную задачу к исследованию операторного пучка вида (1).

Воронежский лесотехнический институт

Поступило
06.06.89

СПИСОК ЦИТИРОВАННОЙ ЛИТЕРАТУРЫ

1. К е л д ы ш М. В. // ДАН СССР. 1951. Т. 77, № 1. 2. К р е й н С. Г. // ДАН СССР. 1964. Т. 159, № 2. 3. Р а д з и е в с к и й Г. В. // Мат. сб. 1980. Т. 112, № 3. 4. К р е й н С. Г., Л а п т е в Г. И. // Функцион. анализ и его прил. 1968. Т. 2, № 2. 5. К о п а ч е в с к и й Н. Д. // ДАН СССР. 1981. Т. 15, № 2. 6. N g o H u y C a n // Tap chi so hoc. 1987. V. 9, N 2.

НЕКОТОРЫЕ СВОЙСТВА ОРТОГОНАЛЬНЫХ МНОГОЧЛЕНОВ МЕЙКСНЕРА

И. И. Шарпудинов

Пусть $0 < c < 1$, $\beta > 0$. Классические многочлены Мейкснера $m_n(x) = m_n(x; \beta, c)$ ($n = 0, 1, \dots$) образуют ортогональную систему на множестве $Z^+ = \{0, 1, \dots\}$ с весом $\mu(x) = \mu(x; \beta, c) = c^x \Gamma(x + \beta) / \Gamma(x + 1)(\beta)$, где $\Gamma(z)$ — гамма-функция Эйлера (см. [1—3]). Следуя [1], будем считать, что $m_n(0) = (\beta)_n = \beta \dots (\beta + n - 1)$. Эти многочлены находят приложения в различных задачах спектральной теории оценивания [4—6], идентификации параметров систем [7], приближенного вычисления интегралов [8, 9]. Характер большинства из этих приложений таков, что они непосредственно или опосредованно приводят к вопросу об асимптотических свойствах многочленов Мейкснера.

Пусть $z^{[0]} = 1$, $z^{[n]} = z(z-1) \dots (z-n+1)$ ($n \geq 1$),

$$x^k = \sum_{n=0}^k \sigma(k, n) x^{[n]}, \quad (x + \gamma)^{[m]} = \sum_{j=0}^m s(m, j, \gamma) x^j,$$

$L_r^{(\alpha)}(x)$ — многочлен Лагерра степени r , $a(k) = \min\{k-1, n+\beta-1\}$, $T_{\beta, n} = \{(j, k) \mid n \leq k \leq j \leq n + \beta - 1\}$, $K_{\beta, n} = \{(j, k) \mid 0 \leq j \leq a(k), k \geq n\}$,

$$f_{j, k}(x) = \sigma(k, n) s(n + \beta - 1, j, \beta - 1) x^{j-k} L_k^{(j-k)} \left(x \ln \frac{1}{c} \right), \quad (1)$$

$$\Phi_{j, k}(x) = \frac{j!}{k!} \sigma(k, n) s(n + \beta - 1, j, \beta - 1) (\ln c)^{k-j} L_j^{(k-j)} \left(x \ln \frac{1}{c} \right). \quad (2)$$

Следующее утверждение обобщает результат, полученный в [10], для $\beta = 1$ на случай произвольного натурального β .

ТЕОРЕМА 1. Пусть $0 < c < 1$, β — натуральное число. Тогда

$$\frac{c^n \Gamma(x + \beta)}{n! \Gamma(x + 1)} m_n(x; \beta, c) = \sum_{(j, k) \in T_{\beta, n}} f_{j, k}(x) + \sum_{(j, k) \in K_{\beta, n}} \Phi_{j, k}(x).$$

Пусть N — произвольное положительное число, $h = N^{-1}$, $0 < c < 1$. Введем в рассмотрение полиномы ($n = 0, 1, \dots$)

$$\mathcal{M}_n(x) = \mathcal{M}_n(x; N, \beta, c) = c^{nh/2} \left(\frac{\Gamma(\beta)}{n! \Gamma(n + \beta)} \right)^{1/2} m_n(Nx; \beta, c^h),$$

образующие ортонормированную систему на множестве $\{0, h, 2h, \dots\}$ с весом $(1 - c^h)^\beta \mu(Nx, \beta, c^h)$, т. е.

$$(1 - c^h)^\beta \sum_{k=0}^{\infty} \mu(k, \beta, c^h) \mathcal{M}_n(kh) \mathcal{M}_l(kh) = \delta_{nl}.$$

Пусть $a(k) = a(k; n, \beta)$ имеет тот же смысл, что и в теореме 1. Положим для натурального β

$$F_{\beta, n}(x) = F_{\beta, n}(x; N) = \sum_{(j, k) \in T_{\beta, n}} \frac{f_{j, k}(x) (\ln c)^{\beta-1}}{N^{\beta+k-j-1}}, \quad (3)$$

$$R_{\beta, n}(x) = R_{\beta, n}(x; N) = \sum_{(j, k) \in K_{\beta, n}} \frac{\Phi_{j, k}(x) (\ln c)^{\beta-1}}{N^{k-j+\beta-1}}. \quad (4)$$

С л е д с т в и е. Пусть $0 < c < 1$. Тогда для произвольного натурального β имеет место равенство

$$c^{nh/2} \left(\frac{\Gamma(n + \beta)}{n! \Gamma(\beta)} \right)^{1/2} \frac{\Gamma(Nx + \beta) (\ln c)^{\beta-1}}{N^{\beta-1} \Gamma(Nx + 1)} \mathcal{M}_n(x) = F_{\beta, n}(x) + R_{\beta, n}(x). \quad (5)$$

Поскольку функции $\Phi_{j, k}(x)$ и $f_{j, k}(x)$, определяемые с помощью равенств (2) и (1), не зависят от N , то в силу (3) и (4) правая часть равенства (5) представляет собой асимптотическую формулу по параметру N для его левой части при $N \rightarrow \infty$.

Положим $a_l(k) = \min\{k - l, n + \beta - 1\}$, $K_{\beta, n, l} = \{(j, k) \mid 0 \leq j \leq a_l(k), k \geq n\}$. В частности, заметим, что $a_1(k) = a(k)$, $K_{\beta, n, 1} = K_{\beta, n}$. Пусть

$$R_{\beta, n}(x) = \bar{R}_{\beta, n, l}(x) + R_{\beta, n, l}(x) \quad (\bar{R}_{\beta, n, 1}(x) \equiv 0),$$

где

$$\bar{R}_{\beta, n, l}(x) = \sum_{(j, k) \in K_{\beta, n} \setminus K_{\beta, n, l}} \frac{\Phi_{j, k}(\ln c)^{\beta-1}}{N^{k-j+\beta-1}},$$

$$R_{\beta, n, l}(x) = \sum_{(j, k) \in K_{\beta, n, l}} \frac{\Phi_{j, k}(x) (\ln c)^{\beta-1}}{N^{k-j+\beta-1}}.$$

Тогда равенство (5) может быть переписано следующим образом:

$$c^{nh/2} \left(\frac{\Gamma(n + \beta)}{n! \Gamma(\beta)} \right)^{1/2} \frac{\Gamma(Nx + \beta) (\ln c)^{\beta-1}}{N^{\beta-1} \Gamma(Nx + 1)} \mathcal{M}_n(x) = F_{\beta, n}(x) + \bar{R}_{\beta, n, l}(x) + R_{\beta, n, l}(x).$$

ТЕОРЕМА 2. Пусть целые $\beta, l \geq 1, n \geq l, 0 < c < 1, 0 \leq x \ln(1/c) \leq 1, 2 \mid \ln c \mid e^2 / (N \ln 2) < 1$. Тогда имеет место оценка

$$|R_{\beta, n, l}(x)| \leq (e^{1/2} + 2^{-1/2}).$$

$$\cdot \left\{ \frac{\exp(|\ln c| (n + 2\beta - 2)^2 / N)}{1 - 2e^2 |\ln c| / (N \ln 2)} \left(\frac{2 |\ln c| e^2}{N \ln 2} \right)^{n+\beta+l} + \frac{1}{(\beta + l - 1)!} \cdot \left[\frac{(2n + \beta + l)^2 |\ln c|}{N \ln 4} + \frac{(n + 2\beta - 2)^2 |\ln c|}{N} \right]^{\beta+l-1} \cdot \exp \left(\frac{(2n + \beta + l)^2 |\ln c|}{N \ln 4} + \frac{(n + 2\beta - 2)^2 |\ln c|}{N} \right) \right\}.$$

ТЕОРЕМА 3. Пусть $0 < c < 1$, l и β — натуральные числа, $\gamma \geq 1$, $n \geq \gamma$, $x \ln(1/c) \geq \gamma/n$,

$$\frac{e^4}{\gamma \ln 2} |\ln c| \frac{1}{N} (n + 2\beta - 2)^2 \leq \delta < 1, \quad \frac{n + 2\beta - 2}{n + \gamma - 1} \frac{e^3 |\ln c|}{N \ln 2} < \delta.$$

Тогда при $n \geq l$ найдется положительная постоянная $A = A(\beta, l, \gamma, \delta)$, такая, что

$$|R_{\beta, n, l}(x)| \leq A \left(|\ln c| \frac{n^2}{N} \right)^{l+\beta-1} J_{n, \beta}(x),$$

где

$$J_{n, \beta}(x) = \max_{n \leq j \leq n+\beta-1} \left\{ \frac{1}{n+\beta-1} \left| L_{j-1}^{(1)} \left(x \ln \frac{1}{c} \right) \right| + \left| L_j^{(0)} \left(x \ln \frac{1}{c} \right) \right| \right\}.$$

ТЕОРЕМА 4. Пусть $0 < c < 1$, $x > 0$,

$$\frac{e^2 |\ln c|}{N \ln 2} \left[1 + \left(\frac{2}{x \ln(1/c)} \right)^{1/2} \right] \leq \delta < 1.$$

Тогда имеет место асимптотическая формула

$$M_n(x; N, 1, c) = L_n^{(0)} \left[\left(x + \frac{1}{2N} \right) \ln \frac{1}{c} \right] + V_n(x),$$

в которой для остаточного члена $V_n(x)$ справедлива оценка

$$|V_n(x)| \leq \frac{A}{N^2 n^{1/2}} (n^3 x^{-5/4} + n x^{-3/4}) e^{-x/2} e^{-n \ln c / (2N)} \cdot \exp \left\{ \frac{(n+1)^{3/2}}{N} \left[\left(\frac{|\ln c|}{x} \right)^{1/2} \left(2 + \frac{2e}{\ln 2} \right) + \frac{2^{1/2} e}{\ln 2} |\ln c| \right] \right\},$$

где $A = A(c, \delta)$ — положительная постоянная, зависящая от c и δ .

Автор признателен Б. С. Кашину за обсуждение результатов и помощь в работе.

Дагестанский государственный педагогический институт

Поступило
02.10.89

СПИСОК ЦИТИРОВАННОЙ ЛИТЕРАТУРЫ

1. Бейтмен Г., Эйрдейи А. Высшие трансцендентные функции. Т. 2. М.: Наука, 1974.
2. Meixner J. // J. London Math. Soc. 1934. N 9. P. 6—13.
3. Никифоров А. Ф., Суслов С. К., Уваров В. Б. Классические ортогональные полиномы дискретной переменной. М.: Наука, 1985.
4. Перов В. П. Прикладная спектральная теория оценивания. М.: Наука, 1982.
5. Спектральные методы обработки информации в научных исследованиях (Материалы I Всесоюзного семинара «Спектральные методы обработки информации в научных исследованиях на основе ортогональных базисов») / Пуццино: Отд. науч.-техн. инф. науч. центра биологии и селекции АН СССР, 1980.
6. Gimlin D. R., Keys R. G., Keener M. S. // IEEE Trans. Systems, Man and Cybernetics. 1979. V. 9, N 5. P. 301—304.
7. Dooge J. C. I., Garvey V. J. // Proc. Roy. Irish Acad. Sect. A. 1978. V. 78, N 18. P. 157—179.
8. Gabutti B., Minetti V. // J. of Computational Phys. 1981. V. 42, N 2. P. 277—287.
9. Шарпудинов И. И. // Изв. вузов. Математика. 1986. № 2. С. 80—82.
10. Шарпудинов И. И. Асимптотические свойства многочленов Мейкснера и их приложения. М., 1983. Деп. в ВИНТИ № 1433—83.