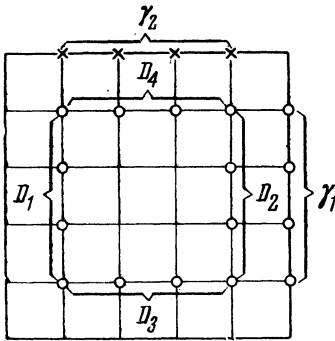


О ТОЧНОСТИ СХЕМ ПЕРЕМЕННЫХ НАПРАВЛЕНИЙ ДЛЯ УРАВНЕНИЯ ТЕПЛОПРОВОДНОСТИ

С. А. БРЯКВИНА

(Москва)

1. Для численного решения уравнения теплопроводности в случае двух пространственных переменных и прямоугольной области в работах [1]—[4] был предложен ряд экономичных методов. Изучение сходимости каждого из методов в [1]—[3] сводилось к исследованию схемы, которую, следуя [5], назовем производящей. При этом считалось, что названная схема эквивалентна схеме с исключенными промежуточными шагами. Однако, как показано в [4], [6], схемы [1]—[3] после исключения промежуточных шагов приводят к соотношению, которое отличается от производящей схемы некоторым дополнительным членом. Порядок этого дополнительного члена существенно зависит от способа задания граничного условия для решения разностной схемы на промежуточном шаге.



Фиг. 1

В связи с этим в [4], [6] была доказана сходимость схем [1]—[3] со скоростью $O(\tau^\beta / h^{3/2}) + O(\tau^\alpha + h^2)$, где β равно 2 для схем [1], [2] и 1 для схемы [3], а $\alpha = 1, 2$ для схем [1], [2] соответственно. Для схемы [3] α равно 2 при $\sigma = 0.5$ и 1 при $0.5 < \sigma \leq 1$, где σ — параметр схемы.

Из результатов [7], [8] следует сходимость схемы [3] со скоростью $O(\tau + h^2)$, но уже при другой трактовке этой схемы и соответствующем определении понятия аппроксимации.

В настоящей работе доказана сходимость схем [1]—[3] со скоростью $O(\tau^\beta / h^{1/2}) + O(\tau^\alpha + h^2)$.

Для схемы [3] при $\sigma = 1$ доказана сходимость со скоростью $O(\tau + h^2)$. Следует отметить, что граничное условие для решения на промежуточном шаге в схемах [1], [2] может быть выбрано так, что скорость сходимости этих схем будет равна $O(\tau^\alpha + h^2)$.

По схемам [1]—[4] проведена серия расчетов, часть результатов которых приведена в конце заметки. Из полученных результатов, в частности, следует, что для схемы [3] имеет место сходимость со скоростью $O(\tau + h^2)$, а для схем [1], [2] — со скоростью $O(\tau^\alpha + h^2)$.

2. В параллелепипеде $\bar{Q}_T = \bar{\Omega} \times [0 \leq t \leq T]$, основанием которого является квадрат $\bar{\Omega} = \{x = (x_1, x_2): 0 \leq x_\alpha \leq 1, \alpha = 1, 2\}$ с границей Γ , рассматривается задача:

$$\frac{\partial u}{\partial t} = \frac{\partial^2 u}{\partial x_1^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial x_2^2}, \quad (x, t) \in Q_T = \Omega \times (0 < t \leq T); \quad (1)$$

$$u|_{t=0} = u_0(x), \quad x \in \bar{\Omega}; \quad (2)$$

$$u|_{\Gamma} = \varphi(x, t), \quad t \in [0, T]. \quad (3)$$

Введем пространственно-временную разностную сетку $\bar{\omega}_h \times \omega_\tau$ следующим образом: $\bar{\omega}_h = \{x_i = (i_1 h, i_2 h): 0 \leq i_\alpha \leq N, Nh = 1\}$ с границей Γ_h , $\omega_\tau = \{t_j = j\tau, j = 0, 1, \dots, \dots, T/\tau\}$. Пусть $D = \bigcup_{i=1}^4 D_i$ — множество приграничных точек (см. фиг. 1).

Нам потребуются скалярные произведения (см. [5])

$$(v, z) = \sum_{\omega_{i_1}} vzh, \quad (v, z)_D = \sum_{D_i} vzh, \quad (v, z]_x = \sum_{\omega_{h+\gamma_x}} vzh, \quad (v, z] = \sum_{\omega_{h+\gamma_1+\gamma_2}} vzh$$

и нормы

$$\|v\| = \sqrt{(v, v)}, \quad \|v_{x_\alpha}\| = \sqrt{\left(\frac{v_{x_\alpha}}{x_\alpha}, \frac{v_{x_\alpha}}{x_\alpha}\right)}, \quad \|v\|_{D_i} = (v, v)_{D_i}.$$

Остальные обозначения, которыми мы в дальнейшем будем пользоваться, введены в [8].

3. Погрешность $z = u - v$ в схемах [1]—[3], предложенных для решения задачи (1)—(3), удовлетворяет условиям

$$z_{\bar{t}} = \Lambda(\sigma z + (1 - \sigma)\bar{z}) - \sigma^2 \tau^2 \Lambda_1 \Lambda_2 z_{\bar{t}} + \rho(1 - 2\sigma)\tau \Lambda_1 \Lambda_2 \bar{z} + \psi_1 + \tau\psi, \quad (4)$$

$$z|_{\bar{t}=0} = 0, \quad x \in \bar{\omega}_h, \quad (5)$$

$$z|_{\Gamma_h} = 0, \quad 0 \leq t \leq T, \quad (6)$$

где ρ равно 1 для схемы [3] и 0 для схем [1], [2], $\psi \neq 0$ для схемы [3] в D , а для схем [1], [2] — в области $\bigcup D_i$.

Теорема 1. Для решения разностной задачи (4)—(6) при $\sigma \geq 0.5$ имеет место априорная оценка

$$\|z^{j+1}\|_{W_2(1)} \leq 2 \left[\left(\sum_{j'=1}^{j+1} \tau \|\psi_1^{j'}\|^2 \right)^{1/2} + \tau h^{3/2} \|\psi^{j+1}\|_D + \sqrt{e\tau} h^{3/2} \|\overline{\psi^j}\|_D + \sqrt{1 + e\tau} h^{3/2} \|\overline{\psi_i^{j+1}}\|_D \right], \quad (7)$$

где

$$\|\overline{\psi^{j+p}}\| = \left(\frac{1}{t_j} \sum_{j'=1}^j \tau \|\psi^{j'+p}\|_D^2 \right)^{1/2}.$$

Доказательство. Достаточно рассмотреть случай, когда $\psi_1 = 0$, а $\psi \neq 0$ лишь в D_1 , так как решение z всегда можно представить в виде суммы z_1 и z_2 , где z_1 — решение задачи (4)—(6) при $\psi = 0$, а z_2 — при $\psi_1 = 0$. Для z_1 , следуя [9], можно получить оценку

$$\|z_1^{j+1}\|_{W_2(1)} \leq 2 \left(\sum_{j'=1}^{j+1} \tau \|\psi_1^{j'}\|^2 \right)^{1/2};$$

z_2 может быть представлено в виде суммы решений задачи (4)—(6), для каждого из которых $\psi \neq 0$ в одной из областей D_i . Априорная оценка для этих решений может быть получена аналогично оценке в рассматриваемом случае.

Перепишем (4) в виде

$$z_{\bar{t}} = \frac{1}{2} \Lambda(z + \bar{z}) + (\sigma - 0.5)\tau \Lambda z_{\bar{t}} - \sigma^2 \tau^2 \Lambda_1 \Lambda_2 z_{\bar{t}} + \rho(1 - 2\sigma)\tau \Lambda_1 \Lambda_2 \bar{z} + \tau\psi. \quad (8)$$

Следуя [5], умножим (8) на $z_{\bar{t}}$. Суммируя по сетке и применяя первую разностную формулу Грина, получим

$$\begin{aligned} (z_{\bar{t}}^2, 1) = & -\frac{1}{2} \left(\left(\frac{z_{x_2}^2}{x_2} \right)_{\bar{t}}, 1 \right]_1 - \frac{1}{2} \left(\left(\frac{z_{x_2}^2}{x_2} \right)_{\bar{t}}, 1 \right]_2 - (\sigma - 0.5)\tau \sum_{\alpha=1}^2 \|z_{t x_\alpha}^2\|^2 - \\ & - \sigma^2 \tau^2 \left(\frac{z_{x_1 x_2}^2}{t x_1 x_2}, 1 \right) + \rho(1 - 2\sigma)\tau \left(\frac{z_{x_1 x_2}}{t x_1 x_2}, \frac{z_{x_1 x_2}}{t x_1 x_2} \right) + \tau(\psi, z_{\bar{t}}). \end{aligned}$$

Учитывая, что $2(\bar{z} z_{\bar{t}}) = (z_{\bar{t}}^2)_{\bar{t}} - \tau(z_{\bar{t}})^2$, $(\psi, z_{\bar{t}}) = (\psi, z)_{\bar{t}} - (\psi_{\bar{t}}, \bar{z})$, и обозначая

$$\sum_{\alpha=1}^2 \|z_{t x_\alpha}^2\|^2 = I, \quad I + 2\rho(2\sigma - 1)\tau \left(\frac{z_{x_1 x_2}^2}{t x_1 x_2}, 1 \right) = I^*,$$

будем иметь

$$I_{\bar{t}} \leq -2(\sigma - 0.5)\tau \sum_{\alpha=1}^2 \|z_{t x_\alpha}^2\|^2 - 2(\sigma^2 + \rho - 2\rho\sigma)\tau^2 \left(\frac{z_{x_1 x_2}^2}{t x_1 x_2}, 1 \right) + 2\tau(\psi, z)_{\bar{t}} - 2\tau(\psi_{\bar{t}}, \bar{z}).$$

Полагая $\sigma \geq 0.5$ и суммируя по всем $t_j, j' = 1, \dots, j+1$, получим

$$I \leq 2\tau (\psi, z) - 2\tau^2 \sum_{j'=1}^{j+1} (\psi_{\bar{t}}, \check{z}), \quad (9)$$

где

$$\sum_{j'=1}^{j+1} (\psi_{\bar{t}}, \check{z}) = \sum_{j'=2}^{j+1} (\psi_{\bar{t}}, \check{z})$$

в силу нулевых начальных данных. Преобразуем $(\psi_{\bar{t}}, \check{z})$. Воспользуемся тем, что ψ отлично от нуля только в приграничных точках

$$(\psi_{\bar{t}}, \check{z}) = h \sum_{i_2=1}^{N-1} h \psi_{\bar{t}}(h, i_2 h) \check{z}(h, i_2 h).$$

Так как z удовлетворяет нулевым граничным условиям, то

$$\check{z}(h, i_2 h) = h \check{z}_{x_1}(h, i_2 h).$$

Оценим

$$\begin{aligned} \tau^2 (\psi_{\bar{t}}, \check{z}_{x_1}^2)_{D_1} &= h^2 \left(\frac{\tau^{3/2}}{\sqrt{h}} \psi_{\bar{t}}^2, \sqrt{\tau h} \check{z}_{x_1} \right)_{D_1} \leq c_0 h^2 \tau^3 \|\psi_{\bar{t}}^2\|_{D_1} + \\ &+ \frac{\tau}{4c_0} (h \check{z}_{x_1}^2, 1)_{D_1} \leq c_0 h^2 \tau^3 \|\psi_{\bar{t}}^2\|_{D_1} + \frac{\tau}{4c_0} \check{I}. \end{aligned}$$

Аналогично оценим

$$\tau (\psi, z) = \tau h^2 (\psi, z_{x_1})_{D_1} \leq \tau h^2 \|\psi\|_{D_1}^2 + \frac{1}{4} I.$$

Подставляя полученные оценки в (9), будем иметь

$$I \leq 4\tau^2 h^2 \|\psi\|_{D_1}^2 + 4c_0 \tau^2 h^3 \sum_{j'=2}^{j+1} \tau \|\psi_{\bar{t}}^{j'}\|_{D_1}^2 + \frac{1}{c_0} \sum_{j'=1}^{j+1} \tau \check{I}. \quad (10)$$

При соответствующем выборе c_0 на основании леммы 2 из [5] и леммы 2 из [7] заключаем, что имеет место оценка

$$\|z^{j+1}\|_{W_2(\Omega)} \leq 2 [\tau h^{3/2} \|\psi^{j+1}\|_{D_1} + \sqrt{e} \tau h^{3/2} \|\bar{\psi}^j\|_{D_1} + \sqrt{1+e} \tau h^{3/2} \|\bar{\psi}_t^{j+1}\|_{D_1}].$$

4. Используя представление ψ в соотношении (4) для схем [1]—[3] и учитывая соответствующее граничное условие для \bar{v} (см. [4], [5]), мы можем, применяя полученную априорную оценку (7), оценить скорость сходимости этих схем при достаточной гладкости решения u таким образом:

$$\|u - v\|_{W_2(\Omega)} = O(\tau^\beta / h^{1/2}) + O(\tau^\alpha + h^2) \quad (11)$$

(значения α и β см. в п. 1).

З а м е ч а н и е 1. Вместо схемы из [2] нами была рассмотрена следующая схема *):

$$\frac{\bar{v} - \check{v}}{\tau} = \Lambda_1 (\sigma \bar{v} + (1 - \sigma) \check{v}) + \Lambda_2 \check{v}, \quad \frac{v - \bar{v}}{\tau} = \sigma \Lambda_2 (v - \check{v}), \quad (12)$$

$$v|_{t=0} = u_0, \quad (13)$$

$$\bar{v}|_{\Gamma_h} = v|_{\Gamma_h} = \varphi. \quad (14)$$

Эта схема при $\sigma = 1$ совпадает со схемой [2]. При $\sigma = 0.5$ она эквивалентна схеме из [1] ($\bar{v}|_{\Gamma_h} = (\varphi + \check{\varphi})/2$). Для решения задачи (12) — (14) верна оценка (11), где $\beta = 2$, а α равно 2 при $\sigma = 0.5$ и 1 при $0.5 < \sigma \leq 1$.

З а м е ч а н и е 2. Если в схемах [1], (12) определим \bar{v} на границе из условий

$$\bar{v}|_{\Gamma_h} = \frac{\varphi + \check{\varphi}}{2} - \frac{\tau^2}{4} \Lambda_2 \varphi_{\bar{t}}, \quad \bar{v}|_{\Gamma_h} = \varphi - \sigma \tau^2 \Lambda_2 \varphi_{\bar{t}}$$

*) Эта схема была получена из схемы, предложенной в [10].

соответственно, то $\psi = 0$ в (4), и в этом случае для этих схем будет иметь место оценка

$$\|u - v\|_{(1)W_2} = O(\tau^\alpha + h^2).$$

5. Для схемы [3] при $\sigma = 1$ оценка (11) может быть уточнена. Рассмотрим задачу

$$z_{\bar{t}} = \Lambda z - \tau \Lambda_1 \Lambda_2 z + \psi_1 + \psi_2, \quad z|_{t=0} = 0, \quad z|_{\Gamma_h} = 0, \quad (15)$$

где $\psi_1 = O(h^2 + \tau)$, а $\psi_2 \neq 0$ лишь в $\bigcup_1^2 D_i$ и там имеет порядок $O(\tau/h^2)$. Имеет место

Теорема 2. *Схема [3] при $\sigma = 1$ сходится в среднем со скоростью $O(\tau + h^2)$, т. е.*

$$\|z\| \leq M(h^2 + \tau).$$

Доказательство. Представим решение задачи (15) в виде суммы двух решений $z = z_1 + z_2$, где z_1 — решение задачи

$$\Lambda z_1 - \tau \Lambda_1 \Lambda_2 z_1 + \psi_1 + \psi_2 = 0, \quad z_1|_{\Gamma_h} = 0. \quad (16)$$

Тогда z_2 удовлетворяет условиям

$$z_{2\bar{t}} = \Lambda z_2 - \tau \Lambda_1 \Lambda_2 z_2 - z_{1\bar{t}}, \quad z_2|_{t=0} = 0, \quad z_2|_{\Gamma_h} = 0. \quad (17)$$

Оценим решение задачи (16). Применим метод Фурье. Пусть φ_{k_1} , φ_{k_2} и λ_{k_1} , λ_{k_2} — собственные функции и собственные значения операторов Λ_1 и Λ_2 . Тогда

$$z_1 = \sum_{k_1, k_2=1}^{N-1} c_{\mathbf{k}} \varphi_{k_1} \varphi_{k_2}, \quad (\psi_1 + \psi_2) = \sum_{k_1, k_2=1}^{N-1} a_{\mathbf{k}} \varphi_{k_1} \varphi_{k_2}, \quad \mathbf{k} = (k_1, k_2).$$

Для $c_{\mathbf{k}}$ получим выражение

$$c_{\mathbf{k}} = \frac{a_{\mathbf{k}}}{(\lambda_{k_1} + \lambda_{k_2} + \tau \lambda_{k_1} \lambda_{k_2})}.$$

Итак, находим

$$z_1 = \sum_{\mathbf{k}} \frac{a_{\mathbf{k}}}{\lambda_{\mathbf{k}} + \tau \lambda_{k_1} \lambda_{k_2}} \varphi_{k_1} \varphi_{k_2}, \quad \lambda_{\mathbf{k}} = \lambda_{k_1} + \lambda_{k_2},$$

$$\|z_1\|^2 = \sum_{\mathbf{k}} \frac{a_{\mathbf{k}}^2}{(\lambda_{\mathbf{k}} + \tau \lambda_{k_1} \lambda_{k_2})^2}.$$

Для оценки z_1 нам достаточно оценить решение следующей задачи:

$$\Lambda z_3 + \psi_1 + \psi_2 = 0, \quad z_3|_{\Gamma_h} = 0. \quad (18)$$

Действительно,

$$\|z_1\|^2 \leq \sum_{\mathbf{k}} \left(\frac{a_{\mathbf{k}}}{\lambda_{\mathbf{k}}} \right)^2 = \|z_3\|^2.$$

Оценим решение задачи (18). Из [11] следует, что

$$z_3^j(P) = \sum_{Q \in \omega_h - \bigcup_1^2 D_i} h^2 G_h(P, Q) \psi_1^j(Q) + \sum_{Q \in \bigcup_1^2 D_i} h^2 G_h(P, Q) \psi_2^j(Q), \quad (19)$$

где G_h — функция Грина, а P, Q — точки ω_h . Воспользуемся тем, что при $\psi_1^j(Q) = 1$ и $h^2 \psi_2^j(Q) = 1$, обе суммы в [19] ограничены (см. [11]) и $|\psi_1| \leq M_1(\tau + h^2)$, $|\psi_2| \leq M_2(\tau/h^2)$. Тогда $\|z_1\| \leq \|z_3\| \leq M_3(\tau + h^2)$.

Теперь оценим $z_{1\bar{t}}$:

$$\|z_{1\bar{t}}\|^2 = \sum_{\mathbf{k}} \frac{(a_{\mathbf{k}})^2}{(\lambda_{\mathbf{k}} + \tau \lambda_{k_1} \lambda_{k_2})} \leq \|z_{3\bar{t}}\|^2$$

Используя формулу (19) при достаточной гладкости решения u в замкнутой области, получим $|z_{3\bar{t}}| \leq M_4(\tau + h^2)$. Отсюда $\|z_{1\bar{t}}\| \leq M_4(\tau + h^2)$. Применяя метод

Таблица 1

t	m	m_1	τ	h	$\frac{\tau}{h^2}$	Схема [4], $\sigma = 0.5$	Схема [1], $\bar{v} _{\Gamma_h} = \frac{\varphi + \bar{\varphi}}{2}$	Схема [3], $\sigma = 0.5,$ $\bar{v} _{\Gamma_h} = \bar{\varphi}$	Схема [3], $\sigma = 1,$ $\bar{v} _{\Gamma_h} = \bar{\varphi}$	Схема [4], $\sigma = 1$	Схема [2]
0.75	0.1	0.1	0.0125	0.05	5	$0.271 \cdot 10^{-5}$	$0.866 \cdot 10^{-5}$	$0.271 \cdot 10^{-5}$	$0.865 \cdot 10^{-4}$	$0.814 \cdot 10^{-4}$	$0.192 \cdot 10^{-3}$
			0.025		10	$0.251 \cdot 10^{-5}$	$0.273 \cdot 10^{-4}$	$0.251 \cdot 10^{-5}$	$0.171 \cdot 10^{-3}$	$0.152 \cdot 10^{-3}$	$0.43 \cdot 10^{-3}$
			0.05		20	$0.169 \cdot 10^{-5}$	$0.104 \cdot 10^{-3}$	$0.169 \cdot 10^{-5}$	$0.342 \cdot 10^{-3}$	$0.274 \cdot 10^{-3}$	$0.106 \cdot 10^{-2}$
0.004			0.0002	0.1	0.02	$0.87 \cdot 10^{-6}$	$0.87 \cdot 10^{-6}$	$0.87 \cdot 10^{-6}$	$0.97 \cdot 10^{-6}$	$0.97 \cdot 10^{-6}$	$0.107 \cdot 10^{-5}$
				0.05	0.08	$0.22 \cdot 10^{-6}$	$0.22 \cdot 10^{-6}$	$0.22 \cdot 10^{-6}$	$0.33 \cdot 10^{-6}$	$0.32 \cdot 10^{-6}$	$0.44 \cdot 10^{-6}$
				0.025	0.32	$0.6 \cdot 10^{-7}$	$0.6 \cdot 10^{-7}$	$0.6 \cdot 10^{-7}$	$0.16 \cdot 10^{-6}$	$0.16 \cdot 10^{-6}$	$0.22 \cdot 10^{-6}$
				0.1		$0.199 \cdot 10^{-5}$	$0.199 \cdot 10^{-5}$	$0.198 \cdot 10^{-5}$	$0.223 \cdot 10^{-5}$	$0.22 \cdot 10^{-5}$	$0.251 \cdot 10^{-5}$
				0.05		$0.51 \cdot 10^{-6}$	$0.51 \cdot 10^{-6}$	$0.51 \cdot 10^{-6}$	$0.75 \cdot 10^{-6}$	$0.75 \cdot 10^{-6}$	$0.99 \cdot 10^{-6}$
				0.025		$0.13 \cdot 10^{-6}$	$0.12 \cdot 10^{-6}$	$0.12 \cdot 10^{-6}$	$0.27 \cdot 10^{-6}$	$0.26 \cdot 10^{-6}$	$0.36 \cdot 10^{-6}$
0.75	0.1	0.2	0.0125	0.05	5	$0.233 \cdot 10^{-4}$	$0.873 \cdot 10^{-4}$	$0.349 \cdot 10^{-2}$	$0.307 \cdot 10^{-2}$	$0.756 \cdot 10^{-3}$	$0.142 \cdot 10^{-2}$
			0.025		10	$0.161 \cdot 10^{-4}$	$0.281 \cdot 10^{-3}$	$0.702 \cdot 10^{-2}$	$0.562 \cdot 10^{-2}$	$0.142 \cdot 10^{-2}$	$0.335 \cdot 10^{-2}$
			0.05		20	$0.132 \cdot 10^{-4}$	$0.107 \cdot 10^{-2}$	$0.141 \cdot 10^{-1}$	$0.951 \cdot 10^{-2}$	$0.257 \cdot 10^{-2}$	$0.914 \cdot 10^{-2}$
0.004			0.0002	0.1	0.02	$0.737 \cdot 10^{-5}$	$0.741 \cdot 10^{-5}$	$0.801 \cdot 10^{-5}$	$0.117 \cdot 10^{-4}$	$0.827 \cdot 10^{-5}$	$0.871 \cdot 10^{-5}$
				0.05	0.08	$0.189 \cdot 10^{-5}$	$0.191 \cdot 10^{-5}$	$0.154 \cdot 10^{-4}$	$0.211 \cdot 10^{-4}$	$0.281 \cdot 10^{-5}$	$0.324 \cdot 10^{-5}$
				0.025	0.32	$0.48 \cdot 10^{-6}$	$0.48 \cdot 10^{-6}$	$0.197 \cdot 10^{-4}$	$0.266 \cdot 10^{-4}$	$0.139 \cdot 10^{-5}$	$0.151 \cdot 10^{-5}$
				0.1		$0.169 \cdot 10^{-4}$	$0.171 \cdot 10^{-4}$	$0.142 \cdot 10^{-4}$	$0.205 \cdot 10^{-4}$	$0.191 \cdot 10^{-4}$	$0.201 \cdot 10^{-4}$
				0.05		$0.414 \cdot 10^{-5}$	$0.417 \cdot 10^{-5}$	$0.213 \cdot 10^{-4}$	$0.289 \cdot 10^{-4}$	$0.642 \cdot 10^{-5}$	$0.741 \cdot 10^{-5}$
				0.025		$0.105 \cdot 10^{-5}$	$0.108 \cdot 10^{-5}$	$0.247 \cdot 10^{-4}$	$0.341 \cdot 10^{-4}$	$0.224 \cdot 10^{-5}$	$0.603 \cdot 10^{-5}$
Порядок точности схем по τ						2	2	1	1	1	1

Таблица 2

t	m	m_1	τ	h	$\frac{\tau}{h^2}$	Схема [4], $\sigma = 0.5$	Схема [1], $\frac{\bar{v}}{\Gamma h} = \frac{\varphi + \bar{\varphi}}{2}$	Схема [3], $\sigma = 0.5$, $\frac{\bar{v}}{\Gamma h} = \bar{\varphi}$	Схема [3], $\sigma = 1$, $\frac{\bar{v}}{\Gamma h} = \bar{\varphi}$	Схема [4], $\sigma = 1$	Схема [2]
0.75	0.1	0.1	0.0125	0.05	5	$0.269 \cdot 10^{-5}$	$0.865 \cdot 10^{-5}$	$0.269 \cdot 10^{-5}$	$0.815 \cdot 10^{-4}$	$0.764 \cdot 10^{-4}$	$0.179 \cdot 10^{-3}$
			0.025		10	$0.288 \cdot 10^{-5}$	$0.277 \cdot 10^{-4}$	$0.289 \cdot 10^{-5}$	$0.161 \cdot 10^{-3}$	$0.142 \cdot 10^{-3}$	$0.397 \cdot 10^{-3}$
			0.05		20	$0.366 \cdot 10^{-5}$	$0.104 \cdot 10^{-3}$	$0.369 \cdot 10^{-5}$	$0.319 \cdot 10^{-3}$	$0.281 \cdot 10^{-3}$	$0.948 \cdot 10^{-3}$
0.004			0.0002	0.1	0.02	$0.86 \cdot 10^{-6}$	$0.87 \cdot 10^{-6}$	$0.87 \cdot 10^{-6}$	$0.97 \cdot 10^{-6}$	$0.97 \cdot 10^{-6}$	$0.107 \cdot 10^{-5}$
				0.05	0.08	$0.22 \cdot 10^{-6}$	$0.21 \cdot 10^{-6}$	$0.22 \cdot 10^{-6}$	$0.33 \cdot 10^{-6}$	$0.33 \cdot 10^{-6}$	$0.44 \cdot 10^{-6}$
				0.025	0.32	$0.6 \cdot 10^{-7}$	$0.6 \cdot 10^{-7}$	$0.6 \cdot 10^{-7}$	$0.16 \cdot 10^{-6}$	$0.16 \cdot 10^{-6}$	$0.21 \cdot 10^{-6}$
				0.1		$0.199 \cdot 10^{-5}$	$0.201 \cdot 10^{-5}$	$0.199 \cdot 10^{-5}$	$0.222 \cdot 10^{-5}$	$0.221 \cdot 10^{-5}$	$0.246 \cdot 10^{-5}$
				0.05		$0.51 \cdot 10^{-6}$	$0.51 \cdot 10^{-6}$	$0.51 \cdot 10^{-6}$	$0.75 \cdot 10^{-6}$	$0.76 \cdot 10^{-6}$	$0.98 \cdot 10^{-6}$
				0.025		$0.12 \cdot 10^{-6}$	$0.13 \cdot 10^{-6}$	$0.12 \cdot 10^{-6}$	$0.26 \cdot 10^{-6}$	$0.25 \cdot 10^{-6}$	$0.34 \cdot 10^{-6}$
0.75	0.1	0.2	0.0125	0.05	5	$0.238 \cdot 10^{-4}$	$0.827 \cdot 10^{-4}$	$0.354 \cdot 10^{-2}$	$0.408 \cdot 10^{-2}$	$0.633 \cdot 10^{-3}$	$0.117 \cdot 10^{-2}$
			0.025		10	$0.299 \cdot 10^{-4}$	$0.273 \cdot 10^{-3}$	$0.704 \cdot 10^{-2}$	$0.771 \cdot 10^{-2}$	$0.116 \cdot 10^{-2}$	$0.272 \cdot 10^{-2}$
			0.05		20	$0.543 \cdot 10^{-4}$	$0.103 \cdot 10^{-2}$	$0.139 \cdot 10^{-1}$	$0.145 \cdot 10^{-1}$	$0.207 \cdot 10^{-2}$	$0.689 \cdot 10^{-2}$
0.004			0.0002	0.1	0.02	$0.737 \cdot 10^{-5}$	$0.736 \cdot 10^{-5}$	$0.167 \cdot 10^{-4}$	$0.193 \cdot 10^{-4}$	$0.823 \cdot 10^{-5}$	$0.865 \cdot 10^{-5}$
				0.05	0.08	$0.189 \cdot 10^{-5}$	$0.189 \cdot 10^{-5}$	$0.181 \cdot 10^{-4}$	$0.234 \cdot 10^{-4}$	$0.278 \cdot 10^{-5}$	$0.322 \cdot 10^{-5}$
				0.025	0.32	$0.48 \cdot 10^{-6}$	$0.48 \cdot 10^{-6}$	$0.211 \cdot 10^{-4}$	$0.277 \cdot 10^{-4}$	$0.438 \cdot 10^{-5}$	$0.181 \cdot 10^{-5}$
				0.1		$0.169 \cdot 10^{-4}$	$0.169 \cdot 10^{-4}$	$0.333 \cdot 10^{-4}$	$0.767 \cdot 10^{-4}$	$0.189 \cdot 10^{-4}$	$0.198 \cdot 10^{-4}$
				0.05		$0.414 \cdot 10^{-5}$	$0.429 \cdot 10^{-5}$	$0.276 \cdot 10^{-4}$	$0.809 \cdot 10^{-4}$	$0.634 \cdot 10^{-5}$	$0.732 \cdot 10^{-5}$
				0.025		$0.105 \cdot 10^{-5}$	$0.106 \cdot 10^{-5}$	$0.307 \cdot 10^{-4}$	$0.852 \cdot 10^{-4}$	$0.495 \cdot 10^{-5}$	$0.592 \cdot 10^{-5}$
Порядок точности схем по τ						2	2	1	1	1	1

энергетических неравенств, мы можем оценить решение задачи (17) $\|z_2\| \leq \leq M_5(\tau + h^2)$. Отсюда заключаем, что

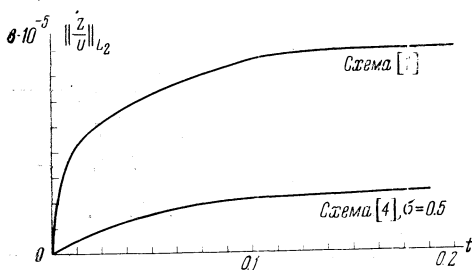
$$\|z\| \leq \|z_1\| + \|z_2\| \leq M(\tau + h^2).$$

6. Рассматривались следующие решения (1) — (3):

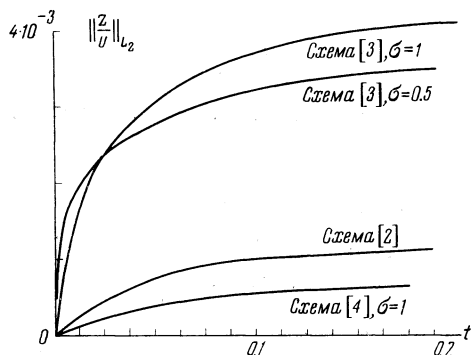
$$u(x_1, x_2, t) = \cos(2\pi n_1 x_1) \cos(2\pi m_1 x_2) \exp[-4\pi^2(m^2 + m_1^2)t],$$

$$u(x_1, x_2, t) = \exp[2\pi n_1 x_1] \exp[2\pi m_1 x_2] \exp[4\pi^2(m^2 + m_1^2)t].$$

Соответствующие задачи решались с помощью схем [1] — [4]. Были проведены эксперименты при нескольких значениях параметров h и τ . Параметры m , m_1 были подобраны так, чтобы решение не очень быстро изменялось от слоя к слою и можно было бы проследить зависимость



Фиг. 2



Фиг. 3

погрешности решения от h и τ . Полученные результаты позволили оценить порядок сходимости схем по h и τ (см. [12], стр. 307).

В табл. 1 и 2 дана зависимость относительной ошибки z/u в норме L_2 от шагов по пространству и времени в рассматриваемых схемах для первого и второго примеров. Для всех рассматриваемых схем получен второй порядок точности по h . Порядок точности схем по τ указан в таблицах.

Замечание 3. При $\sigma = 0.5$, $m = m_1 = 0.1$ относительная ошибка в схеме [3] ($\bar{v} |_{\Gamma_h} = \bar{\varphi}$) такая же, как и в схеме [4]. Это можно объяснить тем, что в этом случае выполняется условие $1/2 \partial u / \partial t = \partial^2 u / \partial x_1^2 = \partial^2 u / \partial x_2^2$, благодаря которому $\varphi = O(\tau/h^2)$ в (4). В этом случае верна оценка

$$\|u - v\|_{W_2(1)} = O(\tau^2/h^{1/2}) + O(\tau^2 + h^2).$$

Замечание 4. Задача (1) — (3) решалась также по схеме [3] в предположении, что \bar{v} на границе определялось из условий $\bar{v} |_{\Gamma_h} = \bar{\varphi}$, $\bar{v} |_{\Gamma_h} = \varphi$. В этом случае был получен первый порядок точности по τ и второй по h .

На фиг. 2 и 3 проиллюстрировано поведение относительной ошибки в норме L_2 при $m = 0.1$, $m_1 = 0.2$ с течением времени в схемах [1] — [4] для второго примера. Для первого примера эта зависимость аналогична. Результаты численных экспериментов дают основание предполагать, что полученные теоретические оценки могут быть улучшены.

В заключение выражаю искреннюю благодарность А. А. Самарскому и В. Б. Андрееву за полезные советы и внимание к работе.

Поступила в редакцию
7.06.1965

Цитированная литература

1. D. W. Peaceman, H. H. Rachford. The numerical solution of parabolic and elliptic differential equations. J. Soc. Industr. and Appl. Math., 1955, № 1, 28—41.
2. J. Douglas, H. H. Rachford. On the numerical solution of heat conduction problems in two and three variables. Trans. Amer. Math. Soc., 1956, 82, № 2, 421—439.

3. Н. Н. Яненко. Об одном разностном методе счета многомерного уравнения теплопроводности. Докл. АН СССР, 1959, 125, № 6, 1207—1210.
4. Е. Г. Дьяконов. Разностные схемы с расщепляющимся оператором для многомерных нестационарных задач. Ж. вычисл. матем. и матем. физ., 1962, 2, № 4, 549—568.
5. А. А. Самарский. Схемы повышенного порядка точности для многомерного уравнения теплопроводности. Ж. вычисл. матем. и матем. физ., 1963, 3, № 5, 812—840.
6. Е. Г. Дьяконов. О некоторых разностных схемах для решения краевых задач. Ж. вычисл. матем. и матем. физ., 1962, 2, № 1, 57—79.
7. А. А. Самарский. О сходимости метода дробных шагов для уравнения теплопроводности. Ж. вычисл. матем. и матем. физ., 1962, 2, № 6, 1117—1121.
8. А. А. Самарский. Об одном экономичном разностном методе решения многомерных параболических уравнений. Ж. вычисл. матем. и матем. физ., 1962, 2, № 5, 549—565.
9. Е. Г. Дьяконов. Разностные схемы с расщепляющимся оператором для общих параболических уравнений второго порядка с переменными коэффициентами. Ж. вычисл. матем. и матем. физ., 1964, 4, № 2, 278—292.
10. А. А. Самарский. О разностных схемах для многомерных дифференциальных уравнений математической физики. Appl. Math., 1965, 10, № 2, 146—164.
11. J. H. Bramble, V. E. Hubbard. On the formulation of finite difference analogues of the Dirichlet problem for Poisson's equation. Numer. Math., 1962, 4, № 4, 313—347.
12. И. С. Березин, Н. П. Жидков. Методы вычислений. Т. I. М., Физматгиз, 1959.

УДК 517.9:533.9

НЕЙТРОННЫЕ ВОЛНЫ ОТ БЕСКОНЕЧНОГО ПЛОСКОГО ИСТОЧНИКА ПЕРЕМЕННОЙ МОЩНОСТИ В ПОДКРИТИЧЕСКОЙ СИСТЕМЕ

Ю. Н. ДРОЖЖИНОВ, И. Г. КРУТИКОВА

(Москва)

В настоящей статье получена асимптотика решения задачи Коши для параболической системы уравнений, описывающих поведение плотности потока нейтронов в веществе, заполняющем все пространство, когда бесконечный плоский источник нейтронов имеет переменную мощность. Рассмотрен случай одной и двух энергетических групп нейтронов в диффузионном приближении. Показано, что возникают затухающие «бегущие» волны, амплитуды колебаний которых могут иметь экстремумы. Приведены результаты расчетов амплитуд колебаний для некоторых частот.

§ 1. Постановка задачи и получение асимптотики решения

В пространстве, заполненном веществом, находится бесконечный плоский источник нейтронов. Мы выбираем систему координат так, чтобы уравнение плоскости источника было $x = 0$. В диффузионном приближении для n энергетических групп плотность потока нейтронов, которая в силу симметрии задачи будет зависеть только от переменного x и времени t , является решением задачи Коши для системы

$$\frac{1}{v_m} \frac{\partial \varphi_m(x, t)}{\partial t} = D_m \frac{\partial^2 \varphi_m(x, t)}{\partial x^2} - \Sigma_{m m} \varphi_m(x, t) + \sum_{\substack{p=1 \\ p \neq m}}^n \Sigma_{m p} \varphi_p(x, t) + F_m(t) \delta(x), \quad (1.1)$$

$$\varphi_m(x, 0) = f_m(x), \quad m = 1, 2, \dots, n. \quad (1.2)$$

Здесь $\varphi_m(x, t)$ — плотность потока m -й энергетической группы нейтронов, v_m и