ДАЛЬНЕВОСТОЧНЫЙ МАТЕМАТИЧЕСКИЙ ЖУРНАЛ, 2003, Том 4, № 1, с. 127–133

УДК 574.3
MSC 2000 92D40 92D25

© Е.В. Ашихмина, Ю.Г. Израильский, Е.Я Фрисман*

Оптимизации промысла популяций, описываемых уравнением Риккера, при циклическом изменении лимитирующих рост численности факторов среды

В работе решается задача оптимизации промысловых изъятий из риккеровских популяций, интенсивность эксплуатации которых определяется их численностью при условии циклического изменения ограничивающих популяционный рост параметров среды

Показано, что для таких популяций величина оптимального изъятия определяется интенсивностью изменения этих факторов, а оптимальная стратегия эксплуатации предусматривает чередование лет интенсивного промысла с годами его практически полного отсутствия.

1. Введение. Постановка задачи

Одним из элементов рационального природопользования является контроль над эксплуатацией природных популяций. Такой контроль предусматривает решение задачи оптимизации процесса промысла: получение максимально возможной прибыли за n лет при сохранении репродуктивного потенциала эксплуатируемых популяций.

Данная задача представляет не только практический, но и чисто научный интерес, обусловленный необходимостью изучения общих закономерностей популяционной динамики и специфики колебаний численности отдельных популяций.

Корректное решение задачи определения оптимального изъятия из популяции невозможно на основе качественного описания динамических популяционных процессов и предусматривает использование их математической модели.

В данной работе задача оптимизации промысла решается для популяций, динамика численности которых в период между размножением и промыслом может быть описана риккеровским уравнением [1]

$$x_{n+1} = \alpha z_n e^{-\beta z_n}. \tag{1}$$

Здесь z_n — численность участвующих в размножении особей, α — скорость роста популяции при отсутствии лимитирования факторами внешней среды (кормовыми ресурсами, размером территории, наличием мест для размножения и подрастания потомства), β — степень экологического лимитирования роста численности.

* Институт автоматики и процессов управления Дальневосточного отделения Российской академии наук, 690041, г. Владивосток, ул. Радио, 5. Электронная почта: ach@iacp.dvo.ru, izrailsk@iacp.dvo.ru, frisman@iacp.dvo.ru.

Данная модель является классическим примером унимодальной зависимости численности пополнения от численности родителей для популяций с дискретным процессом размножения и наличием плотностной конкуренции за лимитированные факторы.

Поскольку естественная смертность в период промысла мала по сравнению с промысловой и ею можно пренебречь, величина z_n фактически составляет разницу между численностью популяции к началу промысла x_n и величиной изъятых в результате промысла особей y_n ($z_n = x_n - y_n$). Соответственно величину промыслового изъятия из популяции можно определить как

$$y_n = x_n - z_n. \tag{2}$$

Естественно, мы рассматриваем случай, когда промысел осуществляется сезонно и его периодичность согласована с жизненным циклом эксплуатируемой популяции.

Учет традиционно сложившейся специфики охоты на многие виды, когда интенсивность промысла определяется исключительно численностью популяции, позволяет определить зависимость величины z_n от x_n следующим образом:

$$z_n = f(x_n) = \frac{x_n}{1 + Ax_n}, \tag{3}$$

где A — параметр, характеризующий интенсивность промыслового изъятия [2, 3, 4, 5]. Соответственно имеем окончательный вид зависимости величины промыслового изъятия из популяции от ее численности

$$y_n = f(x_n) = \frac{Ax_n^2}{1 + Ax_n}. \tag{4}$$

Единственный параметр, который определяет величину дохода — это A. Оптимизация размеров промысла может осуществляться путем подбора такого его значения, при котором достигается максимум выражения

$$\bar{y} = \frac{A\bar{x}^2}{1 + A\bar{x}}, \tag{5}$$

где $\bar{x}$ — нетривиальная стационарная точка уравнения динамики численности, получаемого подстановкой выражения для z_n из уравнения (3) в риккеровсое уравнение динамики численности (1):

$$x_{n+1} = \frac{\alpha x_n}{1 + Ax_n} \exp\left\{-\beta \frac{x_n}{1 + Ax_n}\right\}. \tag{6}$$

Задача оптимизации промысла для таких популяции при $\beta = const$ была решена ранее в работе [4]. Было показано, что оптимальное изъятие достигается при равенстве параметров $A = \beta$.

Понятно, что полученные результаты могут иметь место лишь в случае, когда популяции находится в стационарной среде обитания: при постоянной степени экологического лимитирования роста численности факторами внешней среды.

В данной работе задача оптимизации решается для случая, когда параметр β, определяющий степень такого лимитирования, меняется в цикле длины два.

2. Оптимизация промысла при периодическом изменении параметра β в цикле длины два

Соответственно изменению параметра β, принимающего значения β_1 и β_2, стационарная численность популяции принимает значения u и v. Задача оптимизации в этом случае сводится к оптимизации выражения, представляющего суммарное промысловое изъятие из популяции за один цикл, которое мы обозначим через R.

$$R = \frac{Au^2}{1+Au} + \frac{Av^2}{1+Av}, \tag{7}$$

где u, v — стационарные значения численности.

Уравнения связей между стационарными численностями имеют, соответственно, следующий вид:

$$v = \frac{\alpha u}{1+Au} \exp\left\{-\frac{\beta_1 u}{1+Au}\right\} \tag{8}$$

$$u = \frac{\alpha v}{1+Av} \exp\left\{-\frac{\beta_2 v}{1+Av}\right\} \tag{9}$$

Не ограничивая общности рассмотрения, мы можем считать, что $\beta_1 \leq \beta_2$. Чтобы уменьшить число параметров задачи, перейдем к безразмерным переменным $\hat{\beta} = \beta_2/\beta_1$, $\hat{a} = A/\beta_1$, $\hat{u} = \beta_1 u$, $\hat{v} = \beta_1 v$, а крышки над символами безразмерных переменных далее для краткости опустим. Заметим, что $\beta \geq 1$ и фактически отражает интенсивность изменения ограничивающих численность популяции параметров.

Значения u и v должны удовлетворять уравнениям

$$\varphi_1 \equiv v - \frac{\alpha u}{1+au} \exp\left\{-\frac{u}{1+au}\right\} = 0, \tag{10}$$

$$\varphi_2 \equiv u - \frac{\alpha v}{1+av} \exp\left\{-\frac{\beta v}{1+av}\right\} = 0. \tag{11}$$

Для безразмерных переменных суммарное промысловое изъятие за один цикл задается выражением

$$R = \frac{au^2}{1+au} + \frac{av^2}{1+av}. \tag{12}$$

Промысел популяции может осуществляться двумя способами: стационарная стратегия промысла предусматривает постоянство параметра a, характеризующего интенсивность промысла, переменная стратегия предусматривает изменение данного параметра соответственно изменению параметра β в цикле длины два. Соответственно будет решаться и задача оптимизации.

2.1. Оптимизация при стационарной стратегии промысла

В этом случае для оптимизации промысла нужно найти максимальное по a значение R при u и v, удовлетворяющих системе (10)–(11). Данную задачу проще всего решать методом множителей Лагранжа, а именно, найти максимум

$$L = R + \lambda_1\varphi_1 + \lambda_2\varphi_2, \tag{13}$$

считая u и v независимыми переменными. Дифференцируя L по u, v и a и исключив экспоненты при помощи (10)–(11), получим систему уравнений

$$\begin{gathered} -(1+(a-1)u)v\lambda_1 + au^2(2+au) + (1+au)^2u\lambda_2 = 0 \\ av^2(2+av) + v(1+av)^2\lambda_1 - u(1+av-v\beta)\lambda_2 = 0 \\ u^2 + 2au^2v + v^2 + 2auv^2 + 2a^2u^2v^2 + \\ (1+(a-1)u)(1+av)^2uv\lambda_1 + (1+au)^2(1+av-v\beta)uv\lambda_2 = 0 \end{gathered} \tag{14}$$

После исключения множителей Лагранжа приходим к уравнению

$$v^3(a-\beta)+u^3(a+a^2v-1)(1+av-v\beta)+ \\ uv^2(2a^2v-1+v\beta-a(v+v\beta-1))+ \\ u^2v(a^3v^2-a^2(v-2)v-\beta+a(1-2v(1+\beta)))=0, \quad (15)$$

которое совместно с уравнениями (10)-(11) позволяет найти зависимость оптимальных коэффициентов интенсивности изъятия $a_{opt}(\beta)$, оптимального изъятия $R_{opt}(\beta)$ и оптимальных долей изъятия $\delta_{opt}(\beta)$. Напомним, что здесь β есть безразмерный параметр, отражающий интенсивность колебания факторов внешней среды, ограничивающих рост численности популяции. Система (10)-(11), (15) была решена численными методами. Результаты численного решения представлены на рисунках 1–2.

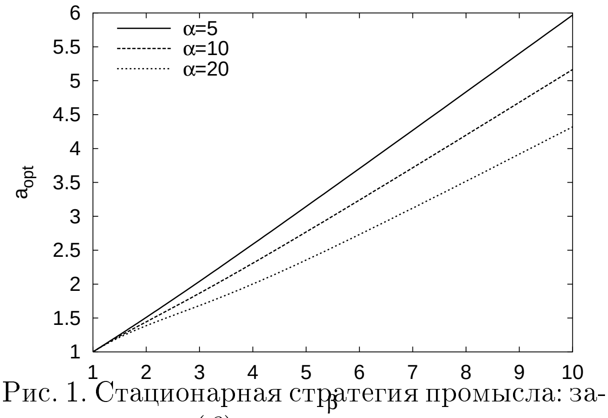

Рис. 1. Стационарная стратегия промысла: зависимость $a_{opt}(\beta)$ при разных значениях α

Анализ представленных на графиках результатов приводит к следующим выводам.

1) Характер всех найденных зависимостей определяется исключительно параметром β, т.е. интенсивностью колебания плотностнозависимых факторов, осуществляющих экологическое лимитирование роста численности популяции внешней средой.

2) Увеличение параметра β приводит:

   а) к линейному увеличению интенсивности промысла a_{opt} (рис. 1)

   б) к численному различию оптимальных долей изъятия δ_{opt} для последовательных лет промысла (рис. 2)

   в) к уменьшению оптимально возможного изъятия из данной популяции R_{opt} (рис. 3).

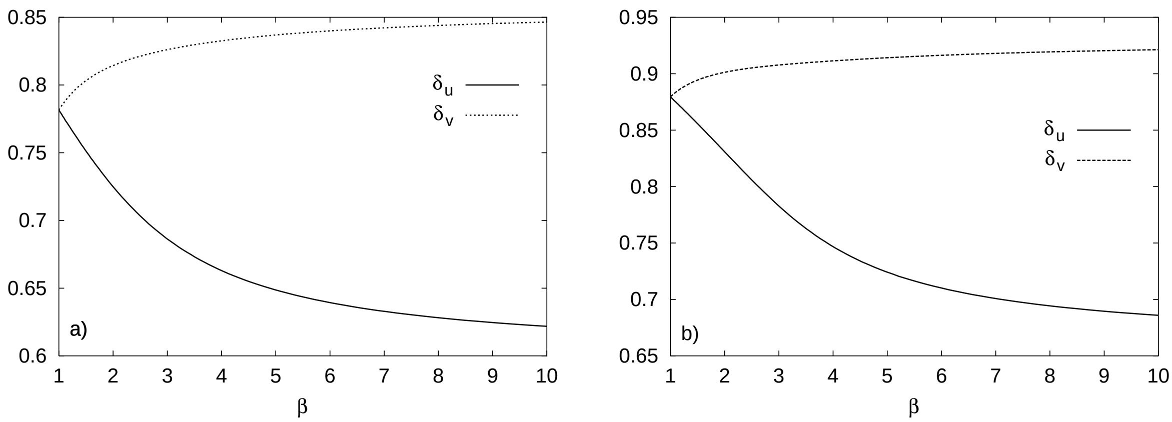

Рис. 2: Стационарная стратегия промысла: зависимость $\delta_{opt}(\beta)$ при $\alpha = 10$ (рис. a) и $\alpha = 20$ (рис. b)

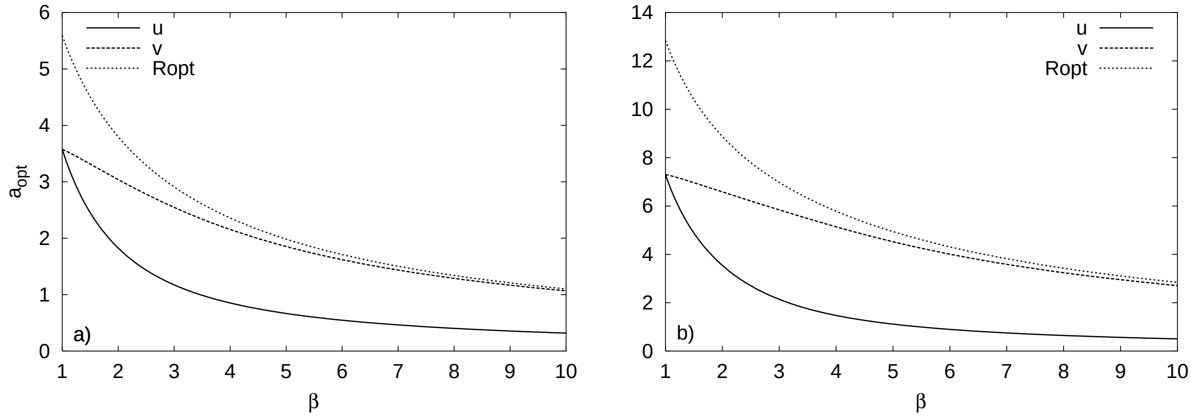

Рис. 3: Стационарная стратегия промысла: зависимость $R_{opt}(\beta)$ при $\alpha = 10$ (рис. a) и $\alpha = 20$ (рис. b)

2.2. Оптимизация при переменной стратегии промысла

Рассмотрим задачу оптимизации промысла при переменной стратегии промысла, т.е. с переменным коэффициентом интенсивности изъятия a. Естественно считать его меняющимся с периодом, равным периоду изменения параметра β. Рассмотрение по-прежнему проводится в безразмерных переменных. Уравнения (10)–(11) теперь запишутся в виде

$$\varphi_1 \equiv v - \frac{\alpha u}{1 + a_1 u} \exp\left\{-\frac{u}{1 + a_1 u}\right\} = 0; \tag{16}$$

$$\varphi_2 \equiv u - \frac{\alpha v}{1 + a_2 v} \exp\left\{-\frac{\beta v}{1 + a_2 v}\right\} = 0. \tag{17}$$

Требуется найти значения параметров a_1, a_2, при которых максимальна величина

$$R = \frac{a_1 u^2}{1 + a_1 u} + \frac{a_2 v^2}{1 + a_2 v} \tag{18}$$

Результаты численного решения этой задачи представлены на рис. 4–5.

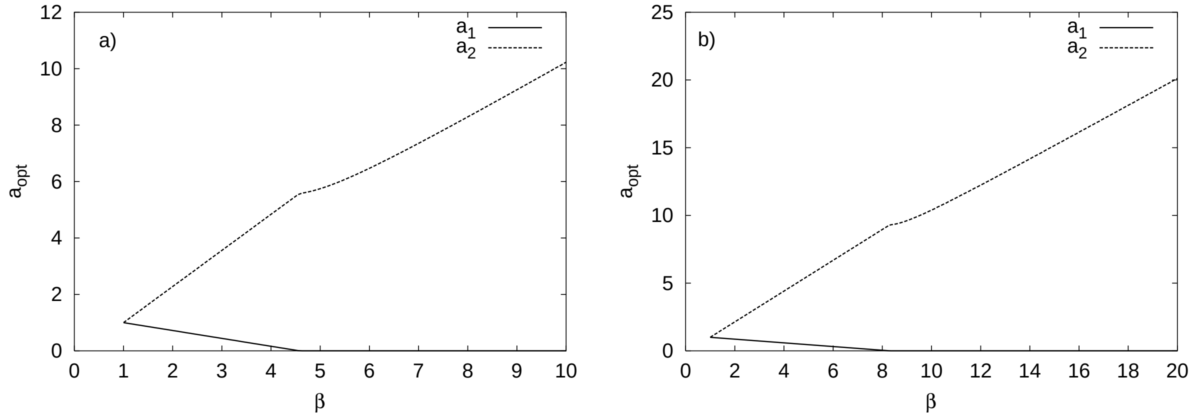

Рис. 4: Переменная стратегия промысла: зависимость $a_{opt}(\beta)$ при $\alpha = 10$ (рис. a) и при $\alpha = 20$ (рис. b)

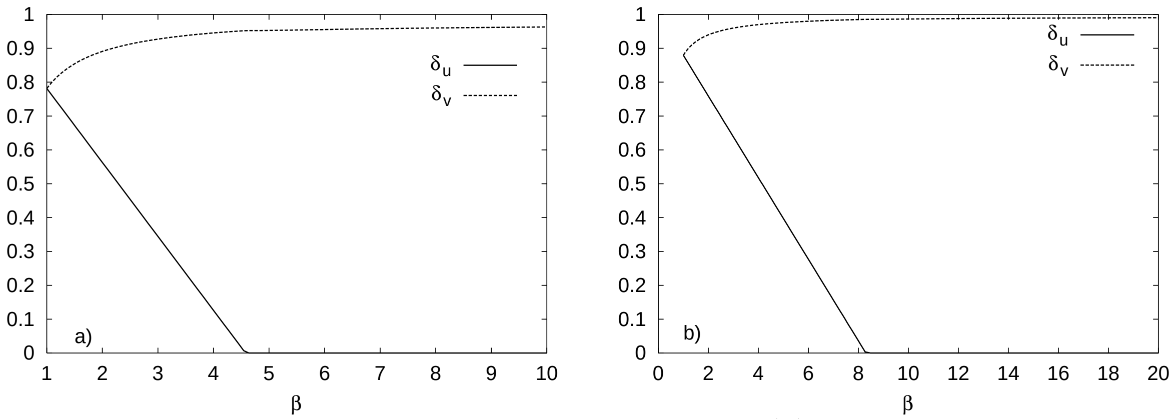

Рис. 5: Переменная стратегия промысла: зависимость $\delta_{opt}(\beta)$ при $\alpha = 10$ (рис. a) и при $\alpha = 20$ (рис. b)

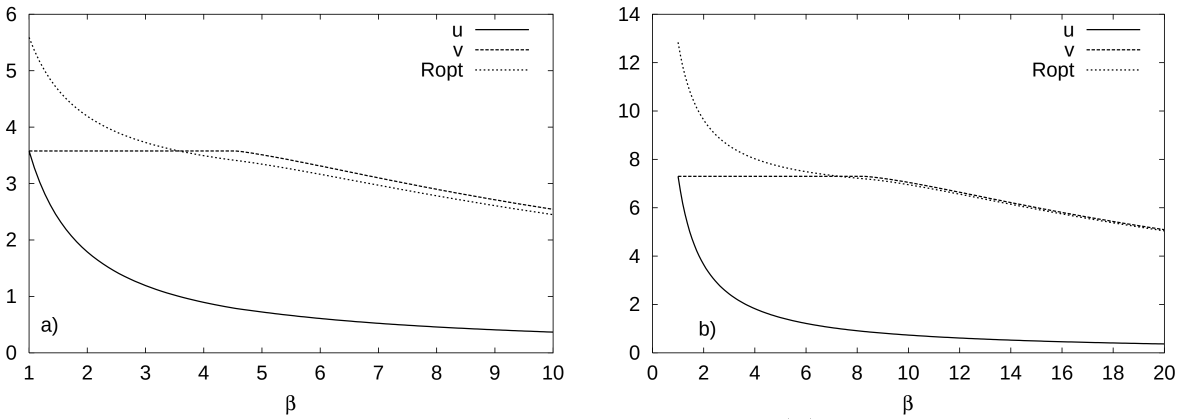

Рис. 6: Переменная стратегия промысла: зависимость $R_{opt}(\beta)$ при $\alpha = 10$ (рис. a) и при $\alpha = 20$ (рис. b)

Анализ представленных результатов позволяет сделать следующие выводы.

1) Изменение стратегии промысла не приводит к изменению характера рассматриваемых зависимостей, определяемого, как и в случае переменной стратегии промысла, исключительно параметром β.

2) Переменна стратегия промысла предусматривает чередование лет различной интенсивности промысла, т.е. различие параметра a_{opt} для последовательных лет промысла. Для лет с относительно большей численностью значение a_{opt} с ростом β линейно возрастает как и для случая стационарной стратегии промысла. Для лет с с относительно меньшей численностью рост β приводит к падению a_{opt} до нуля, после чего промысел для этих лет можно считать нецелесообразным (рис. 4).

3) Увеличение параметра β приводит к увеличению численного различия между оптимальными долями изъятия δ_{opt} в последовательные годы. Однако отмечается более резкое, чем в первом случае, падение величины $\delta_{opt}(\beta)$ для лет с относительно меньшей численностью (рис. 5). Это полностью согласуется с предыдущим выводом и означает нецелесообразность ведения какого-либо промысла в такие годы.

4) Увеличение параметра β при переменной стратегии промысла также приводит к уменьшению оптимально возможного изъятия из популяции R_{opt} (рис. 6).

Таким образом вне зависимости от стратегии промысла увеличение колебаний ограничивающих рост численности популяции факторов внешней среды приводит к снижению оптимально возможного изъятия из данной популяции и, соответственно, к снижению возможного дохода от промысла. Следовательно, экономически более целесообразным является эксплуатация популяций, находящихся в более стабильных условиях.

Поскольку постоянная стратегия промысла может рассматриваться как частный случай переменной, то оптимальная стратегия эксплуатации естественных популяций, находящихся, как правило, в условиях постоянного колебания факторов внешней среды, должна предусматривать чередование лет с различной интенсивностью промысла: лет оптимально возможной интенсивности с годами его практически полного отсутствия.

Список литературы

[1] *Рикер У.У.* Методы оценки и интерпретации биологических показателей популяций рыб. М.: Пищевая пром-сть, 1979, 137 с.

[2] *Ашихмина Е.В., Скалецкая Е.И., Фрисман Е.Я., Куликов А.Н.* Математическая модель динамики величины заготовок на примере локальной популяции маньчжурской белки: препринт 23(53). Владивосток: ИАПУ ДВНЦ АН СССР, 1981. 14 с.

[3] *Ашихмина Е.В., Куликов А.Н., Скалецкая Е.И., Фрисман Е.Я.* Математическое моделирование динамики величины заготовок локальной популяции маньчжурской белки (Sciurus vulgaris mantchuricus) Журн. общ. биологии. 1982. vol 43. n 5. С. 705–711.

[4] *Фрисман Е.Я., Луппов С.П., Ашихмина Е.В.* Математическая модель динамики численности локальной популяции, подверженной сезонному промыслу. Сб. Математическое моделирование в популяционной экологии. Владивосток: ДВНЦ АН СССР, 1985. С. 43–54.

[5] *Ashikhmina E.V., Frisman E.Y., Skaletskaya E., A.N.Kulikov.* Mathematical model for dynamics of the number of pelt products from the local population of mantchurian squirrels Ecolog. Model. 1985. vol 30. P 145–156.

Представлено в Дальневосточный математический сборник в окончательной форме 25 апреля 2003 г

Работа выполнена при финансовой поддержке Российского фонда фундаментальных исследований, грант 99-01-00633, 01-01-06328

E.V. Ashikhmina, E.Ya. Frisman, Yu.G. Izrailsky, Harvest optimization for Rikker's population, when environment parameters limiting population growth change cyclically. Far Eastern Mathematical Journal, 2003. v. 4, № 1, pp. 127–133.

SUMMARY

In this paper the problem of optimal harvest from Rikker's population is solved provided that harvest rate is determined by population size and environment parameters limiting population growth change cyclically.

It is shown, that for these populations the optimal harvest rate is determined by the amplitude of parameters variation, while the optimal harvest rate policy is to alternate years of intensive harvesting with the years of negligibly small harvesting

Keywords: *optimal harvest, Rikker's population, numerical modeling* .