Доклады Академии наук СССР
1992. Том 322, № 3

УДК 517.956.227 МАТЕМАТИКА

© А.С. МАКИН

О СРЕДНИХ РИССА БИОРТОГОНАЛЬНЫХ РАЗЛОЖЕНИЙ ПО КОРНЕВЫМ ФУНКЦИЯМ НЕСАМОСОПРЯЖЕННЫХ РАСШИРЕНИЙ ОПЕРАТОРА ШРЕДИНГЕРА

(Представлено академиком В.А. Ильиным 18 XI 1991)

В настоящей работе устанавливаются достаточные условия базисности средних Рисса спектральных разложений, отвечающих оператору Шредингера

(1) $\quad Lu = \Delta u - q(x)u,$

рассматриваемому в произвольной области G пространства R^N, $N \geqslant 2$. Функция $q(x)$ предполагается, вообще говоря, комплекснозначной.

Следуя В.А. Ильину [1], под собственной функцией оператора (1), отвечающей комплексному собственному значению λ, будем понимать любую, не равную тождественно нулю комплекснозначную функцию $\overset{\circ}{u}(x)$ из класса $C^{(2)}(G)$, являющуюся регулярным решением уравнения $L\overset{\circ}{u} + \lambda\overset{\circ}{u} = 0$.

Аналогично под присоединенной функцией порядка l, $l = 1, 2, \ldots$, отвечающей тому же λ и собственной функции $\overset{\circ}{u}(x)$, будем понимать любую комплекснозначную функцию $\overset{l}{u}(x)$ из класса $C^{(2)}(G)$, являющуюся регулярным решением уравнения $L\overset{l}{u} + \lambda\overset{l}{u} = \overset{l-1}{u}$.

Пусть $\{u_n(x)\}$ – система собственных и присоединенных функций оператора (1), λ_n – соответствующие собственные значения. Предполагается, что числа λ_n не имеют конечных точек сгущения, а также для любого номера n $|\lambda_{n+1}| \geqslant |\lambda_n|$. Если $u_n(x)$ – присоединенная функция порядка m, то по определению существует цепочка функций $\overset{k}{u}_n(x)$, $k = 0, 1, \ldots, m$, определяемая равенствами $\overset{m}{u}_n = u_n$,

$$L\overset{m-l}{u}_n + \lambda_n\overset{m-l}{u}_n = \overset{m-l-1}{u}_n, \quad l = 0, \ldots, m-1, \quad L\overset{\circ}{u}_n + \lambda\overset{\circ}{u}_n = 0.$$

Если $u_n(x)$ – собственная функция, то, очевидно, цепочка состоит лишь из одной функции $\overset{\circ}{u}_n = u_n$.

Договоримся обозначать символом $\overset{m}{u}_n \sim \overset{k}{u}_n$ тот факт, что функции $\overset{k}{u}_n$ принадлежат цепочке, соответствующей функции u_n.

Пусть система $\{u_n(x)\}$ полна и минимальна в $L_2(G)$, тогда существует и притом единственная биортогонально сопряженная к ней в $L_2(G)$ система $\{v_n(x)\}$, т.е. такая система, что $v_n(x) \in L_2(G)$ и

$$(u_n, v_k) = \int_G u_n(x)\overline{v_k(x)}\,dx = \begin{cases} 0 & \text{при } n \neq k, \\ 1 & \text{при } n = k. \end{cases}$$

Обозначим $\lambda(n) = \min\limits_{|\lambda_k| > |\lambda_n|} |\lambda_k|$. Для любой функции $f(x)$ из класса $L_2(G)$

составим частичную сумму риссовских средних порядка α биортогонального ряда

$$S_n^{\alpha}(x,f)=\sum_{i=1}^{n}(f,v_i)\sum_{\substack{0\leqslant l\leqslant\alpha\\ m\\ u_n\sim u_n^{m-l}}}\frac{(-1)^l}{l!}\frac{\partial^l}{\partial\lambda_i^l}\left(1-\frac{\lambda_i}{\lambda(n)}\right)^{\alpha}u_i^{m-l}(x).$$

Обозначим также через μ_n тот квадратный корень из λ_n, действительная часть которого неотрицательна.

Теорема 1. *Пусть выполнены следующие условия*:

1) *существует постоянная M такая, что* $|\operatorname{Im}\mu_n|\leqslant M$ *для всех номеров* n;

2) $\sum\limits_{t\leqslant|\mu_n|\leqslant t+1}\|u_n\|_{L_2(K)}\|v_n\|_{L_2(G)}\leqslant C(K)(t^{N-1}+1)$ *для любого* $t\geqslant 0$ *и любого компакта K области G.*

3) $h(\lambda_n)\leqslant c|\mu_n|^{\epsilon}$, *где* $0\leqslant\epsilon<1$, *а* $h(\lambda_n)$ – *максимальный порядок присоединенных функций системы* $\{u_n\}$, *отвечающих собственным значениям, равным* λ_n.

4) *функция* $q(x)$ *принадлежит классу* $C^{(\infty)}(G)$.

Тогда для любого α, удовлетворяющего неравенствам

$$\alpha>\frac{N-1+\epsilon}{1-\epsilon},\qquad [\alpha]\geqslant\frac{N-1+\epsilon}{1-\epsilon},$$

и любого компакта K области G справедливо равенство

$$\lim_{n\to\infty}\|S_n^{\alpha}(x,f)-f(x)\|_{L_2(K)}=0.$$

Отметим, что условие 3) теоремы 1 допускает неограниченный рост порядка присоединенных функций, входящих в систему $\{u_n\}$.

Вопросы сходимости средних Рисса спектральных разложений, отвечающих несамосопряженным расширениям оператора Лапласа, рассматривались Я.Ш. Салимовым в работах [2–4]. Всюду накладывалось условие, что порядки всех присоединенных функций ограничены одной постоянной. При выполнении аналогичного требования базисность средних Рисса достаточно высокого порядка разложений по собственным и присоединенным функциям оператора Шредингера установлена в [5].

Ослабить сформулированное выше ограничение на рост порядка присоединенных функций удалось благодаря установленной автором точной по порядку оценке антиаприорного типа для корневых функций общего несамосопряженного эллиптического оператора второго порядка.

Приведем точную формулировку данного результата. В произвольной области G пространства R^N рассматривается эллиптический оператор

$$(2)\qquad Lu=\sum_{i,j=1}^{N}\frac{\partial}{\partial x_i}\left[a_{ij}(x)\frac{\partial u}{\partial x_j}\right]+\sum_{i=1}^{N}b_i(x)\frac{\partial u}{\partial x_i}+c(x)u.$$

Коэффициенты $a_{ij}(x)$ будем считать вещественнозначными функциями, остальные коэффициенты, вообще говоря, комплекснозначными. Пусть выполнены следующие условия:

1) коэффициенты $a_{ij}(x)$ оператора (2) удовлетворяют условию эллиптичности, т.е. $a_{ij}(x)=a_{ji}(x)$ и для любого компакта K области G

$$\inf_{|\xi|=1,\,x\in K}\sum_{i,j=1}^{N}a_{ij}(x)\xi_i\xi_j>0,$$

где ξ – вещественный вектор с обычной нормой;

2) функции $a_{ij}(x)$, $\partial a_{ij}/\partial x_i$, $b_i(x)$, $c(x)$ непрерывны в области G.

Пусть $\overset{i}{u}(x)$, $i = 0, 1, \ldots,$ – цепочка корневых функций оператора (2), отвечающая собственному значению λ, $\mu = \sqrt{\lambda}$, $\operatorname{Re}\mu \geqslant 0$.

Теорема 2. *Пусть выполнены условия*:

1) $|\operatorname{Im}\mu| \leqslant M$;

2) $n \leqslant c(|\mu| + 1)^{\epsilon}$, *где* $0 \leqslant \epsilon < 1$.

Тогда для любых компактов K и K' области G, первый из которых лежит строго внутри второго и любых номеров m и n таких, что $0 < m \leqslant n$, справедлива оценка

$$\|\overset{n-m}{u}\|_{L_2(K)} \leqslant C^m(K, K')(n|\mu| + 1)^m \|\overset{n}{u}\|_{L_2(K')}. \tag{3}$$

Оценка (3) усиливает результаты, полученные в [1, 6].

Приведем пример, иллюстрирующий теорему 1. Рассмотрим на отрезке $[-\pi, \pi]$ систему функций

$$g_n(x) = \frac{1 + \varphi_n(x)}{\sqrt{2\pi}} e^{inx}, \qquad n = 0, \pm 1, \pm 2, \ldots,$$

где $\varphi_n(x) = c_n(x^2 - \pi^2)^{\alpha_n}$, причем $\alpha_n = [|n|^{\epsilon}] + 2$, $0 < c_n < 3/(128\alpha_n^4\pi^{4\alpha_n})$, $0 < \epsilon < 1$.

Легко проверить, что система функций $\{g_n\}$ удовлетворяет условиям Биркгофа (см. [7]) и согласно теореме Пэли–Винера (см. [7]) образует базис Рисса на отрезке $[-\pi, \pi]$. Стало быть, для любого номера n

$$\|g_n\|_{L_2[-\pi,\pi]} \|h_n\|_{L_2[-\pi,\pi]} \leqslant C_1,$$

где $\{h_n\}$ – биортогонально сопряженная в $L_2[-\pi, \pi]$ система. Очевидно, что функция $g_n(x)$ является присоединенной функцией порядка $2\alpha_n$ оператора $Lg = g''$, отвечающей собственному значению n^2. Далее рассмотрим на отрезке $[-\pi, \pi]$ систему функций

$$v_m(y) = \exp[i(m + \tfrac{1}{4}\operatorname{sgn} m)y], \qquad m = 0, \pm 1, \pm 2, \ldots$$

Из работ [8, 9] следует, что система $\{v_m\}$ полна и минимальна в $L_2[-\pi, \pi]$, причем для любого m

$$\|v_m\|_{L_2[-\pi,\pi]} \|\psi_m\|_{L_2[-\pi,\pi]} \leqslant C_2, \tag{5}$$

где $\{\psi_m\}$ – биортогонально сопряженная в $L_2[-\pi, \pi]$ система.

М.Г. Гасымовым [10] была рассмотрена краевая задача

$$\begin{gathered} \omega'' - q(z)\omega + \lambda\omega = 0, \\ \omega(0) = \omega(2\pi), \quad \omega'(0) = \omega'(2\pi), \end{gathered} \tag{6}$$

где

$$q(z) = \sum_{k=1}^{\infty} q_k e^{ikz}, \qquad \sum_{k=1}^{\infty} |q_k| < \infty.$$

Он показал, что собственные значения имеют вид

$$\lambda_0 = 0, \quad \lambda_{2l-1} = \lambda_{2l} = l^2, \qquad l = 1, 2, \ldots$$

Собственному значению λ_{2l-1} соответствует собственная функция

$$\omega_{2l-1}(z) = e^{ilz}\left(1 + \sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{k + 2l} \sum_{\alpha=k}^{\infty} v_{k,\alpha} e^{i\alpha z}\right),$$

где $v_{k,\alpha}$ – некоторые числа. Если $v_{2l,2l} = 0$, то $\omega_{2l}(z)$ – собственная функция, если $v_{2l,2l} \neq 0$, то $\omega_{2l}(z)$ – присоединенная функция. Исходя из [10], легко показать, что можно выбрать q_k таким образом, чтобы $q(z) \in C^{(\infty)}(0, 2\pi)$ и задача (6) имела бесконечно много присоединенных функций. Доказывается также, что для любого k

$$(7) \qquad \| \omega_k \|_{L_2[0,2\pi]} \| \gamma_k \|_{L_2[0,2\pi]} \leqslant C_3,$$

где $\{\gamma_k\}$ – биортогонально сопряженная в $L_2[0, 2\pi]$ система. Из (4), (5), (7) следует, что система корневых функций оператора Шредингера $u_{n,m,k}(x, y, z) = g_n(x) v_m(y) \omega_k(z)$, рассматриваемая в области $(-\pi, \pi) \times (-\pi, \pi) \times (0, 2\pi)$, удовлетворяет всем условиям теоремы 1, причем порядок присоединенных функций неограниченно растет.

Автор выражает глубокую благодарность акад. В.А. Ильину за постановку задачи и внимание к настоящей работе.

Московский институт приборостроения

Поступило
29 XI 1991

ЛИТЕРАТУРА

1. *Ильин В.А.* – Дифференц. уравнения, 1982, т. 18, № 1, с. 30–37. 2. *Салимов Я.Ш.* – ДАН, 1986, т. 286, № 2, с. 291–295. 3. *Салимов Я.Ш.* – Дифференц. уравнения, 1986, т. 22, № 5, с. 864–876. 4. *Салимов Я.Ш.* – Там же, № 12, с. 2097–2106. 5. *Макин А.С.* – Тез. докл. Всес. шк. молодых ученых. Ташкент, 1988, с. 115–116. 6. *Макин А.С.* – Дифференц. уравнения, 1988, т. 24, № 1, с. 116–123. 7. *Винер Н., Пэли Р.* Преобразование Фурье в комплексной области. М.: Наука, 1964. 8. *Моисеев Е.И.* – ДАН, 1984, т. 275, № 4, с. 794–798. 9. *Седлецкий А.М.* – УМН, 1982, т. 37, № 5, с. 51–95. 10. *Гасымов М.Г.* – Функц. анализ и его прил., 1980, т. 14, вып. 1, с. 14–19.