Л. А. Золотухина, К. П. Латышев, В. Н. Чугуева, Сходимость к нормальному распределению одного частного вида суммы зависимых случайных векторов, *Матем. заметки*, 1969, том 5, выпуск 6, 691–695

https://www.mathnet.ru/mzm6882

МАТЕМАТИЧЕСКИЕ ЗАМЕТКИ

т. 5, № 6 (1969), 691—695

УДК 519.2

СХОДИМОСТЬ К НОРМАЛЬНОМУ РАСПРЕДЕЛЕНИЮ ОДНОГО ЧАСТНОГО ВИДА СУММЫ ЗАВИСИМЫХ СЛУЧАЙНЫХ ВЕКТОРОВ

Л. А. Золотухина, К. П. Латышев, В. Н. Чугуева

Методом моментов устанавливается асимптотическая нормальность последовательности зависимых случайных векторов специального вида. Библ. 2 назв.

При стохастическом подходе к интерпретации сейсмических наблюдений одной из задач является определение асимптотического поведения суммарной отраженной волны (см. [1]). При этом возникает необходимость в нахождении предельного распределения суммы зависимых случайных векторов, определяемых следующим способом.

Пусть $v_l(i, j, k)$ — случайные величины ($i, j, k = 0, \ldots$ $\ldots, n$; $l = 1, \ldots, r$). Назовем индекс i первым, j — вторым, k — третьим. Предположим, что $v_l(i, j, k)$ удовлетворяет следующим условиям:

a) $\mathsf{M}\,\{v_l(i, j, k)\} = 0$ *при всех* i, j, k, l.

b) *Если у случайной величины* $v_\mu(i_1, j_1, k_1)$ *индекс в скобках, стоящий на* q*-м месте* ($q = 1, 2, 3$), *совпадает с индексом случайной величины* $v_\nu(i_2, j_2, k_2)$, *стоящим на* s*-м месте* ($s = 1, 2, 3$), *то*

$$\mathsf{M}\,\{v_\mu(i_1, j_1, k_1)\, v_\nu(i_2, j_2, k_2)\} = \sigma_{\mu\nu}(qs)$$
$$(\mu, \nu = 1, 2, \ldots, r;\ i_1, j_1, k_1, i_2, j_2, k_2 = 0, 1, \ldots, n).$$

c) *Любые две группы случайных величин*

$$v_{\mu_1}(i_1, j_1, k_1) \ldots v_{\mu_\alpha}(i_\alpha, j_\alpha, k_\alpha) \text{ и } v_{\nu_1}(q_1, s_1, t_1) \ldots v_{\nu_\beta}(q_\beta, s_\beta, t_\beta)$$
$$(\mu_1, \ldots, \mu_\alpha, \nu_1, \ldots, \nu_\beta = 1, 2, \ldots, r;\ i_1, j_1, k_1, \ldots, q_\beta, s_\beta, t_\beta = 0, 1, \ldots, n)$$

взаимно независимы, если среди значений индексов в скобках первой группы случайных величин не встречаются индексы второй группы.

d) *Случайные величины* $v_l(i, j, k)$ *имеют совместно ограниченные моменты до порядка* m_0 *включительно, т. е.*

$$\mathsf{M}\left\{\prod_{\nu=1}^{r}\prod_{g=1}^{p_\nu} v_\nu(i_g^{(\nu)}, j_g^{(\nu)}, k_g^{(\nu)})\right\} < c < \infty$$

для всех $p_\nu \geqslant 0, \nu = 1, \ldots, r$, *таких, что*

$$\sum_{\nu=1}^{r} p_\nu \leqslant m_0,$$

и *для всех* $i_g^{(\nu)}, j_g^{(\nu)}, k_g^{(\nu)} = 0, 1, \ldots, n$; c, m_0 — *некоторые постоянные.*

Введем случайные величины

$$V_\nu = n^{-5/2}\sum_{i,\, j,\, k=0}^{n} v_\nu(i, j, k) \qquad (\nu = 1, \ldots, r) \tag{1}$$

и обозначим через $\boldsymbol{V}$ вектор $\boldsymbol{V} = (V_1, \ldots, V_r)$. Справедливо следующее утверждение.

ТЕОРЕМА 1. *Если случайные величины* $v_\nu(i, j, k)$ $(\nu = 1, 2, \ldots, r;\ i, j, k = 0, 1, \ldots, n)$ *удовлетворяют условиям* (a) — (d), *то все моменты вектора* $\boldsymbol{V}$ $\mathsf{M}\{V_1^{p_1}\ldots V_r^{p_r}\}$, *где* $\sum_{i=1}^{r} p_i \leqslant m_0$ *при* $n \to \infty$ *совпадают с соответствующими моментами случайного вектора*

$$\boldsymbol{X} = (X_1, \ldots, X_r) \in N(0, \|\sigma_{\mu\nu}\|),$$

где

$$\sigma_{\mu\nu} = \sum_{q,\, s=1}^{3}\sigma_{\mu\nu}(qs) \qquad (\mu, \nu = 1, 2, \ldots, r).$$

Доказательство. При доказательстве теоремы используются идеи работы [2]. Пусть $p_i \geqslant 0$ $(i = 1, \ldots, r)$ и $\sum_{i=1}^{r} p_i = m$. Согласно (1)

$$\mathsf{M}\{V_1^{p_1}\ldots V_r^{p_r}\} =$$
$$= n^{-5m/2}\,\mathsf{M}\Big\{\sum v_1(i_1^{(1)}, j_1^{(1)}, k_1^{(1)})\ldots v_1(i_{p_1}^{(1)}, j_{p_1}^{(1)}, k_{p_1}^{(1)})\ldots$$
$$\ldots v_r(i_1^{(r)}, j_1^{(r)}, k_1^{(r)})\ldots v_r(i_{p_r}^{(r)}, j_{p_r}^{(r)}, k_{p_r}^{(r)})\Big\}. \tag{2}$$

Суммирование проводится по области

$$D: \{i_1^{(1)}, j_1^{(1)}, k_1^{(1)}, \ldots, i_{p_r}^{(r)}, j_{p_r}^{(r)}, k_{p_r}^{(r)} = 0, 1, \ldots, n\}.$$

Каждое слагаемое из (2), используя условие (c), разобьем на максимальное число независимых групп. Если при этом слагаемое разбилось на l групп по $c_1, \ldots, c_l$ $\left(\sum_{\nu=1}^{l} c_\nu = m\right)$ элементов в каждой группе, то число различных индексов в таком слагаемом не больше $\sum_{\nu=1}^{l} (2c_\nu + 1) = 2m + l$. Следовательно, число слагаемых в (2), которые можно разбить не более чем на l групп, будет порядка $O(n^{2m+l})$. При $m \leqslant m_0$ согласно (d) вклад в $\mathsf{M}\{V_1^{p_1} \ldots V_r^{p_r}\}$ от всех слагаемых, разбившихся не более чем на l групп, будет иметь порядок $O(n^{l-m/2})$. Если слагаемое разбилось на $l > m/2$ независимых групп, то хотя бы одна группа будет состоять только из одного элемента, и в силу (a) математическое ожидание такого слагаемого равно нулю. Если $l < m/2$, то $O(n^{l-m/2}) \to 0$ при $n \to \infty$. При m нечетном либо $l > m/2$, либо $l < m/2$. Отсюда следует, что все моменты (2) с нечетным $m = \sum_{\nu=1}^{r} p_\nu \leqslant m_0$ стремятся к нулю при $n \to \infty$. При m четном положительный вклад при $n \to \infty$ в $\mathsf{M}\{V_1^{p_1} \ldots V_r^{p_r}\}$ дадут только те слагаемые из (2), которые разбились на $m/2$ независимых групп. Каждая группа при этом состоит из произведения двух случайных величин $v_l(i, j, k)$, имеющих в скобках один общий индекс.

Будем говорить, что *группа принадлежит типу* $A_{\mu\nu}$, если она состоит из элементов $v_\mu(i_1, j_1, k_1)\, v_\nu(i_2, j_2, k_2)$ с одним общим индексом (типы $A_{\mu\nu}$ и $A_{\nu\mu}$ отождествляются). Каждая группа в слагаемом, разбившемся на $m/2$ пар, будет одного из указанных типов. Пусть в слагаемом оказалось $\alpha_{\mu\nu}$ групп типа $A_{\mu\nu}$ $\left(\sum_{\mu=1}^{r} \sum_{\nu=\mu}^{r} \alpha_{\mu\nu} = m/2\right)$. Места общего индекса для пары

$$v_\mu(i_l(\mu\nu),\ j_l(\mu\nu),\ k_l(\mu\nu))\ v_\nu(q_l(\mu\nu),\ s_l(\mu\nu),\ t_l(\mu\nu))$$

обозначим через $a_l(\mu\nu)$, $b_l(\mu\nu)$ $(a_l(\mu\nu), b_l(\mu\nu) = 1, 2, 3)$ для $v_\mu(i_l(\mu\nu), j_l(\mu\nu), k_l(\mu\nu))$ и $v_\nu(q_l(\mu\nu), s_l(\mu\nu), t_l(\mu\nu))$ соответственно ($\mu \leqslant \nu$, $\mu = 1, \ldots, r$; $l = 1, \ldots, \alpha_{\mu\nu}$). При фиксированных $5m/2$ различных индексах, фиксированных

$$a_l(\mu\nu),\ b_l(\mu\nu),\ \alpha_{ij}$$

$$(i=1,\ \ldots,\ r;\ i\leqslant j;\ \mu=1,\ \ldots,\ r;\ \mu\leqslant\nu;\ l=1,\ \ldots,\ \alpha_{\mu\nu}),$$

число слагаемых, разбившихся на $\alpha_{\mu\nu}$ групп типа $A_{\mu\nu}$, равно

$$\prod_{j=1}^{r}p_j!\left(2^{\alpha_{jj}}\prod_{i=j}^{r}\alpha_{ij}!\right)^{-1}=$$

$$=\prod_{j=1}^{r}p_j!\left(2^{\sum_{j=1}^{r}\alpha_{jj}}\prod_{j=1}^{r}\prod_{i=j}^{r}\alpha_{ij}!\right)^{-1}.$$

Отсюда на основании (b) следует, что

$$\lim_{n\to\infty}\mathsf{M}\{V_1^{p_1}\ldots V_r^{p_r}\}=$$

$$=\sum\sum\prod_{i=1}^{r}p_i!\left(2^{\sum_{i=1}^{r}\alpha_{ii}}\prod_{i=1}^{r}\prod_{j=i}^{r}\alpha_{ij}!\right)^{-1}\times$$

$$\times\prod_{\mu=1}^{r}\prod_{\nu=\mu}^{r}\sigma_{\mu\nu}(a_1(\mu\nu),\ b_1(\mu\nu))\ldots\sigma_{\mu\nu}(a_{\alpha_{\mu\nu}}(\mu\nu),\ b_{\alpha_{\mu\nu}}(\mu\nu)), \tag{3}$$

где суммирование проводится по областям:

$$B_1:\ \{a_l(\mu\nu),b_l(\mu\nu)=1,2,3;\ \nu=1,\ \ldots,\ r;\ \mu\leqslant\nu;$$
$$l=1,\ \ldots,\ \alpha_{\mu\nu}\},$$

$$B:\ \left\{\alpha_{ij},\ j=1,\ldots,r;\ i\leqslant j;\ p_i=\sum_{l=1}^{i}\alpha_{li}+\sum_{l=i}^{r}\alpha_{il}\right\}.$$

Суммируя по B_1, получим

$$\lim_{n\to\infty}\mathsf{M}\{V_1^{p_1}\ldots V_r^{p_r}\}=$$

$$=\begin{cases}0, & \text{если } m=\sum_{i=1}^{r}p_i \text{ нечетно},\\ \sum_{B}\prod_{i=1}^{r}\dfrac{p_i!}{2^{\alpha_{ii}}}\prod_{j=i}^{r}\dfrac{(\sigma_{ij})^{\alpha_{ij}}}{(\alpha_{ij})!}, & \text{если } m=\sum_{i=1}^{r}p_i \text{ четно}.\end{cases}$$

Нетрудно показать путем разложения характеристической функции

$$\varphi(t_1,\ \ldots,\ t_r)=\exp\left\{-\frac{1}{2}\sum_{i,\ j=1}^{r}\sigma_{ij}t_it_j\right\}$$

случайного вектора $X \in N\{0, \|\sigma_{\mu\nu}\|\}$ $(\mu, \nu = 1, \ldots, r)$ в ряд по степеням t, что

$$\lim_{n\to\infty} \mathsf{M}\{V_1^{p_1}\ldots V_r^{p_r}\} = \mathsf{M}\{X_1^{p_1}\ldots X_r^{p_r}\} \qquad \left(\sum_{i=1}^{r} p_i = m \leqslant m_0\right).$$

Это и требовалось доказать.

ТЕОРЕМА 2. *Пусть для случайных величин* $v_l(i, j, k)$ $(l = 1, 2, \ldots, r;\ i, j, k = 0, 1, \ldots, n)$ *выполнены условия* (a), (b), (c) *теоремы* 1 *и условие*:

e) *Вероятностные интегралы, представляющие* $\mathsf{M}\{(v_l(i, j, k))^2\}$, *сходятся равномерно по* i, j, k *к некоторой постоянной* $c_l > 0$ $(l = 1, 2, \ldots, r)$. *Тогда распределение вектора* V *стремится при* $n \to \infty$ *к нормальному распределению с вектором средних, равным* 0, *и дисперсионной матрицей* $\|\sigma_{\mu\nu}\|$ $(\mu, \nu = 1, \ldots, r)$.

Доказательство аналогично доказательству теоремы 2 (см. [2]) с естественным обобщением на многомерный случай и потому опускается.

В заключение отметим, что теоремы 1 и 2 остаются справедливыми для случайных величин $v_l(i_1, \ldots, i_k)$ $(k \geqslant 2;\ l = 1, \ldots, r;\ i_1, \ldots, i_k = 0, 1, \ldots, n)$.

Ленинградское отделение
Математического института
им. В. А. Стеклова АН СССР

Поступило
5.IX.1968

ЦИТИРОВАННАЯ ЛИТЕРАТУРА

[1] Золотухина Л. А., Латышев К. П., Чугуева В. Н., Стохастические модели слоистой среды и вероятностные свойства отраженных волн, распространяющихся в этих средах, Труды Матем. ин-та АН СССР, 95 (1968), 42—97.

[2] Lomnicki Z. A., Zaremba S. K., A further instance of the Central Limit Theorem for dependent random variables, Math. Z., 66, № 5 (1957), 490—494.