

УДК 517.53

Многомерная тауберова теорема для голоморфных функций ограниченного аргумента и квазиасимптотика пассивных систем

Дрожжинов Ю. Н.

Статья посвящена доказательству тауберовой теоремы, устанавливающей связь между квазиасимптотическим поведением обобщенной функции в конусе и поведением в окрестности нуля в трубчатой области над конусом ее преобразования Лапласа. При этом предполагается, что преобразование Лапласа имеет ограниченный аргумент. Доказательство опирается на тот факт, что гиперболическая метрика (метрика Каратеодори) не увеличивается при голоморфных отображениях.

В третьем параграфе работы, используя доказанную тауберову теорему, мы даем описание поведения вблизи точки на острове границы голоморфных функций с неотрицательной мнимой частью. Выяснены условия существования «углового» предела таких функций. Построен пример голоморфной функции с неотрицательной мнимой частью в $T^{\mathbb{R}^n}_+$, у которой существует один и тот же предел по счетному множеству лучей, входящих в начало координат, но нет «углового» предела. Другими словами, существуют лучи, входящие в начало координат, по которым предел не существует.

Следующий (четвертый) параграф посвящен изучению квазиасимптотического поведения решений многомерных уравнений в свертках. Это изучение позволило исследовать поведение фундаментальных решений некоторых гиперболических операторов.

В последнем параграфе доказан ряд теорем о квазиасимптотическом поведении фундаментальных решений пассивных трансляционно-инвариантных систем. Разобран ряд примеров. В частности, показано, что носитель квазиасимптотики фундаментального решения системы уравнений вращающейся сжимаемой жидкости (акустики) сосредоточен только на двух лучах, принадлежащих конусу пассивности, пространственные проекции которых совпадают с осью вращения.

§ 1. Основные понятия и обозначения

Пусть Γ — замкнутый, выпуклый, острый конус в \mathbb{R}^n с вершиной в нуле. Сопряженный конус $\Gamma^* = [y \in \mathbb{R}^n: (y, t) \geq 0, t \in \Gamma]$, $\text{int } \Gamma^* = C$. Через $S_{\Gamma'}$ обозначаем пространство медленно растущих обобщенных функций, носители которых лежат в конусе Γ ; $S_{\Gamma'} = \{f(t) \in S', \text{ Supp } f \subset \Gamma\}$. Это сверточная алгебра, роль единицы в которой играет $\delta(t)$.

Для каждой $f(t) \in S_{\Gamma'}$ определено преобразование Лапласа

$$L[f(t)] \equiv (f(t), e^{izt}) = \tilde{f}(z), \quad z = x + iy, \quad x \in \mathbb{R}^n, \quad y \in C, \quad zt = \sum_{i=1}^n z_i t_i. \quad (1.1)$$

Преобразование Лапласа осуществляет изоморфизм алгебры $S_{\Gamma'}$ на ал-

гебру голоморфных в трубчатой области $T^c = \mathbb{R}^n + iC$ функций, удовлетворяющих оценке: существуют $a, b, M > 0$ такие, что

$$|\tilde{f}(z)| \leq M \frac{(1+|z|)^a}{|\Delta_c(y)|^b}, \quad z \in T^c, \quad (1.2)$$

где $\Delta_c(y)$ — расстояние от точки $y \in C$ до границы конуса C (константы a, b, M свои для каждой $\tilde{f}(z)$). Алгебру этих голоморфных функций, следуя В. С. Владимирову [1], будем обозначать через $H(C)$, так что $L[S_{\Gamma'}] = H(C)$. Очень часто нам будут встречаться голоморфные в T^c функции с неотрицательной мнимой частью, множество которых обозначим $H_+(C)$. Таким образом,

$$H_+(C) = \{\tilde{f}(z) \in H(C); \operatorname{Im} \tilde{f}(z) \geq 0, z \in T^c\}.$$

Пусть $\Theta_{\Gamma}(t)$ — характеристическая функция конуса Γ . Функция

$$K_c(z) = L[\Theta_{\Gamma}(t)] \quad (1.3)$$

принадлежит $H(C)$ и называется ядром Коши трубчатой области T^c . Конус Γ называется регулярным, если $K_c(z)$ есть делитель единицы в алгебре $H(C)$. Другими словами, если $K_c^{-1}(z) \in H(C)$.

В регулярных конусах определены обобщенные функции $\Theta_{\Gamma}^{\alpha} \in S_{\Gamma}'$ формулой

$$L[\Theta_{\Gamma}^{\alpha}] = K_c^{\alpha}(z), \quad z \in T^c, \quad -\infty < \alpha < +\infty. \quad (1.4)$$

Они позволяют в S_{Γ}' (с регулярным конусом Γ) ввести операции дробных интегрирований и дифференцирований относительно конуса Γ .

Первообразной порядка α обобщенной функции $f(t) \in S_{\Gamma}'$ относительно Γ называется свертка

$$f^{(-\alpha)}(t) = \Theta_{\Gamma}^{\alpha}(t) * f(t).$$

Следуя [2], мы говорим, что $f(t) \in S_{\Gamma}'$ имеет квазиасимптотику порядка α , если существует $g(t) \in S_{\Gamma}'$, $g(t) \neq 0$, такая, что

$$\frac{1}{k^{\alpha}} f(kt) \rightarrow g(t), \quad k \rightarrow \infty, \text{ в } S'. \quad (1.5)$$

Т. е. для любой основной функции $\varphi(t) \in S$

$$\left(\frac{1}{k^{\alpha}} f(kt, \varphi(t)) \right) \rightarrow (g(t), \varphi(t)) \quad (k \rightarrow \infty).$$

Квазиасимптотика является естественным расширением на обобщенные функции степенной асимптотики в следующем смысле.

Для того чтобы $f(t) \in S_{\Gamma}'$ имела квазиасимптотику порядка α , необходимо и достаточно, чтобы нашлось такое P , что P -я первообразная относительно конуса Γ была обычной непрерывной функцией и имела асимптотику порядка $\alpha + nP$ в конусе Γ при $|t| \rightarrow +\infty$. Т. е.

$$\lim_{|t| \rightarrow \infty} \frac{1}{|t|^{\alpha+nP}} f^{(-P)}(|t|e) = g^{(-P)}(e), \quad e \in \operatorname{pr} \Gamma, \quad (1.6)$$

причем существуют постоянные M и T_0 такие, что

$$\frac{1}{|t|^{\alpha+nP}} |f^{(-P)}(t)| \leq M \text{ при } |t| > T_0, \quad t \in \operatorname{int} \Gamma.$$

Квазиасимптотика, если она существует, это однородная функция порядка α :

$$g(\sigma t) = \sigma^{\alpha} g(t), \quad \sigma > 0, \quad t \in \Gamma.$$

Под квазиасимптотикой порядка α вектор-функций и матриц-функций мы будем понимать покомпонентную квазиасимптотику порядка α . Мы пишем $W(t) \in (S_{\Gamma'})^N$, если $W(t) = (w_1(t), \dots, w_N(t))$, причем $W_j(t) \in S_{\Gamma'}$, $j=1, 2, \dots, N$. Аналогично, $N \times N$ -матрица-функция $Z(t) \in (S_{\Gamma'})^{N \times N}$, если $Z(t) = \{z_{ij}(t)\}$, $i, j=1, \dots, N$, причем каждая компонента $z_{ij}(t) \in S_{\Gamma'}$.

О п р е д е л е н и е. Вектор-функция $W(t) \in (S_{\Gamma'})^N$ имеют квазиасимптотику порядка α , если существует вектор-функция $W^0(t) \in (S_{\Gamma'})^N$, $W^0(t) \neq 0$, такая, что

$$\frac{1}{k^\alpha} W(kt) \xrightarrow{k \rightarrow \infty} W^0(t) \text{ в } S' \quad (1.7)$$

(здесь сходимость понимается как покомпонентная сходимость).

О п р е д е л е н и е. Матрица-функция $Z(t) \in (S_{\Gamma'})^{N \times N}$ имеет квазиасимптотику порядка α , если существует $N \times N$ -матрица-функция $G(t) \in (S_{\Gamma'})^{N \times N}$, $G(t) = \{g_{ij}(t)\} \neq 0$, такая, что

$$\frac{1}{k^\alpha} z_{ij}(kt) \rightarrow g_{ij}(t), \quad k \rightarrow \infty, \text{ в } S', \quad i, j = 1, \dots, N. \quad (1.8)$$

При этом мы пишем: $\frac{1}{k^\alpha} Z(kt) \xrightarrow{k \rightarrow \infty} G(t)$.

Отметим, что при существовании квазиасимптотики порядка α предполагается, что хотя бы одна компонента матрицы $G(t)$ отлична от тождественного нуля.

Подробнее по поводу используемых понятий и обозначений см. [1], [2] и [4].

§ 2. Тауберова теорема для голоморфных функций ограниченного аргумента

Голоморфная в области $\mathcal{D} \subset \mathbb{C}^n$ функция $F(z)$ имеет там ограниченный аргумент, если $F(z) \neq 0$ при $z \in \mathcal{D}$ и существует $M > 0$ такое, что

$$|\arg F(z)| \leq M, \quad z \in \mathcal{D}.$$

При этом предполагается, что $\arg F(z)$ меняется непрерывным образом, когда z пробегает область \mathcal{D} . Отметим, что голоморфная функция $F(z)$ с неотрицательной мнимой (или вещественной) частью в \mathcal{D} имеет там ограниченный аргумент.

Т е о р е м а 1. Пусть $f(t) \in S_{\Gamma'}$ и ее преобразование Лапласа $\tilde{f}(z)$ имеет ограниченный аргумент в T^c . Для того чтобы она имела квазиасимптотику порядка α относительно конуса Γ

$$\frac{1}{k^\alpha} f(kt) \rightarrow g(t), \quad k \rightarrow \infty \text{ в } S',$$

необходимо и достаточно выполнение условия

А) Существует телесный подконус $C' \subset C$ ($\text{int } C' \neq \emptyset$) такой, что

$$\rho^{\alpha+n} \tilde{f}(i\rho y) \rightarrow h(iy), \quad y \in C'. \quad (2.1)$$

При этом для любого $z \in T^c$ существует

$$\lim_{\rho \rightarrow 0} \rho^{\alpha+n} \tilde{f}(\rho z) = \tilde{h}(z) \quad (2.2)$$

и выполняется равенство

$$h(z) = (g(t), e^{izt}) \equiv \tilde{g}(z), \quad z \in T^c. \quad (2.3)$$

Доказательство. Согласно общей тауберовой теореме работы [2] для доказательства теоремы 1 достаточно показать, что для функций ограниченного аргумента из выполнения условия А) всегда вытекает условие

В) Существуют M, N , вектор $e \in C$ ($|e| = 1$) такие, что

$$|\rho^{\alpha+n} \tilde{f}(\rho(x + i\delta e))| \leq \frac{M}{\delta^N}, \quad 0 < \rho \leq 1, \quad 0 < \delta \leq 1, \quad \text{при } |x| < 1. \quad (2.4)$$

Заметим, что нам достаточно ограничиться случаем $\alpha = -n$ и функцией $\tilde{f}(z)$, имеющей неотрицательную мнимую часть. Действительно, рассмотрим $\gamma(z) = (z, e)^{\alpha+n} \tilde{f}(z)$, где $e \in C'$. Так как $(y, e) > 0$ для y , лежащих в окрестности вектора e на $\text{rg } C'$, то $\gamma(z)$ имеет ограниченный аргумент. Ограничиваясь в дальнейшем для $\text{Im } z = y$ этой малой окрестностью вектора e , мы подберем κ настолько большим, чтобы функция $\gamma_1(z) = e^{i\varphi_0} [\gamma(z)]^{1/\kappa}$ при некотором φ_0 имела аргумент, лежащий в интервале $(0, \pi)$, т. е. $\text{Im } \gamma_1(z) > 0$. Кроме того, при $z = iy$, $y \in C_1' \subset C'$

$$\lim_{\rho \rightarrow +0} \gamma_1(i\rho y) = \lim_{\rho \rightarrow +0} e^{i\varphi_0} [(iy, e)^{\alpha+n} \rho^{\alpha+n} \tilde{f}(i\rho y)]^{1/\kappa} = e^{i\varphi_0} [(iy, e)^{\alpha+n} h(iy)]^{1/\kappa}.$$

Если теперь считать оценку В) доказанной для $\alpha = -n$ и $\text{Im } \gamma_1(z) > 0$ в T^c , т. е.

$$|\gamma_1(\rho(x + i\delta e))| \leq \frac{M}{\delta^N}, \quad 0 < \rho \leq 1, \quad 0 < \delta \leq 1, \quad \text{при } |x| < 1, \quad (2.5)$$

то из (2.5) имеем

$$|(x, e) + i\delta(e, e)|^{(\alpha+n)/\kappa} |\rho^{\alpha+n} \tilde{f}(\rho(x + i\delta e))|^{1/\kappa} \leq \frac{M}{\delta^N}, \quad 0 < \rho \leq 1, \quad 0 < \delta \leq 1, \\ \text{при } |x| < 1.$$

Отсюда, учитывая, что

$$|(x, e) + i\delta(e, e)|^{(\alpha+n)/\kappa} \geq \delta^{(\alpha+n)/\kappa} \text{ при } |x| < 1, \quad 0 < \delta \leq 1,$$

и получаем для $\tilde{f}(z)$ оценку В), в которой вместо N следует подставить $N\kappa + \alpha + n + 1$.

Заметим далее, что нам достаточно ограничиться случаем конуса C , равного $R_+^n = \{y \in R^n: y_i > 0, i = 1, \dots, n\}$. Действительно, в конусе $C_1' \subset C'$ можно выбрать сколь угодно малый n -гранный подконус

$$C'' = \{y \in C_1' \subset C': (e_i, y) > 0, e_i \in (C_2')^*, i = 1, \dots, n,$$

для которого e_i линейно независимы, а $C_2' \Subset C_1'$.

Сделаем линейное преобразование

$$y \rightarrow Qy = [(e_1, y), \dots, (e_n, y)]. \quad (2.6)$$

Оно преобразует конус C'' в конус R_+^n . Поэтому (а так же в силу линейной независимости e_i) отображение $z \rightarrow Qz$ биголоморфно отображает $T^{C''}$ на $T^{R_+^n}$, причем лучи $i\rho y$, $y \in C''$, переходят в лучи $i\rho Qy$. И если теперь оценка В) доказана для $T^{R_+^n}$ с некоторым вектором e , то, делая обратное отображение $z \rightarrow Q^{-1}z$, мы получаем оценку В) и для области $T^{C''}$ с вектором $Q^{-1}e \in C'' \subset C'$.

Итак, пусть теперь $\tilde{f}(z)$ — функция с неотрицательной мнимой частью при $z \in T^{R_+^n}$ ($\tilde{f}(z) \in H_+(R_+^n)$) и

$$\lim_{\rho \rightarrow +0} \tilde{f}(i\rho y) = h(iy), \quad y \in R_+^n, \quad h(iy) \neq 0. \quad (2.7)$$

Докажем, что существуют $M > 0$, вектор $e \in R_+^n$ ($|e| = 1$) такие, что

$$|\tilde{f}(\rho(x + i\delta e))| \leq \frac{M}{\delta}, \quad 0 < \rho \leq 1, \quad 0 < \delta \leq 1, \quad \text{при } |x| < 1. \quad (2.8)$$

Для этого рассмотрим функцию $d(y) = \max_{0 < \rho \leq 1} |\tilde{f}(i\rho y)|$, где $y \in R_+^n$. Из (2.7)

и теоремы единственности для голоморфных функций вытекает, что существует $y^0 \in R_+^n$ ($|y^0| = 1$) такое, что $0 < d(y^0) < \infty$. В качестве e мы выбираем y^0 . Теперь следующая лемма, интересная сама по себе, заканчивает доказательство теоремы 1.

Лемма 1. Пусть $\tilde{f}(z) \in H_+(R_+^n)$ и существует $e \in R_+^n$ такое, что

$$\max_{0 < \rho \leq 1} |\tilde{f}(i\rho e)| = a < \infty; \quad (2.9)$$

тогда выполнена оценка (2.8).

Доказательство леммы. Пусть $\zeta = i\rho e$, $z = \rho(x + i\delta e)$,

$$\Delta(\zeta, z) = \max_{1 \leq v \leq n} \left| \frac{\zeta_v - z_v}{\zeta_v - \bar{z}_v} \right|.$$

Расстояние между точками ζ и z в $T_+^{R_+^n}$ в метрике Каратеодори будет

$$C_{R_+^n}(\zeta, z) = \ln \frac{1 + \Delta(\zeta, z)}{1 - \Delta(\zeta, z)}.$$

Введем голоморфное отображение $\mathcal{F}(z): z \rightarrow (\tilde{f}(z), \dots, \tilde{f}(z)) \in \mathbb{C}^n$. Так как $\tilde{f}(z) \in H_+(R_+^n)$, то $\mathcal{F}(z): T_+^{R_+^n} \rightarrow T_+^{R_+^n}$. По свойству метрики Каратеодори не увеличиваться при голоморфных отображениях (см. [3]) имеем

$$C_{R_+^n}(\mathcal{F}(\zeta), \mathcal{F}(z)) = \ln \frac{1 + \Delta(\mathcal{F}(\zeta), \mathcal{F}(z))}{1 - \Delta(\mathcal{F}(\zeta), \mathcal{F}(z))} \leq \ln \frac{1 + \Delta(\zeta, z)}{1 - \Delta(\zeta, z)} = C_{R_+^n}(\zeta, z),$$

откуда вытекает неравенство $\Delta(\mathcal{F}(\zeta), \mathcal{F}(z)) \leq \Delta(\zeta, z)$, т. е.

$$\left| \frac{\tilde{f}(\zeta) - \tilde{f}(z)}{\tilde{f}(\zeta) - \bar{\tilde{f}}(z)} \right| \leq \max_{1 \leq v \leq n} \frac{\sqrt{x_v^2 + (1 - \delta)^2 e_v^2}}{\sqrt{x_v^2 + (1 + \delta)^2 e_v^2}}. \quad (2.10)$$

Оценивая далее, получаем

$$\frac{|\tilde{f}(z)| - |\tilde{f}(\zeta)|}{|\tilde{f}(z)| + |\tilde{f}(\zeta)|} \leq \max_{1 \leq v \leq n} \frac{\sqrt{x_v^2 + e_v^2 + \delta^2 e_v^2 - 2\delta e_v^2}}{\sqrt{x_v^2 + e_v^2 + \delta^2 e_v^2 + 2\delta e_v^2}}.$$

Вычитая по единице из обеих частей, учитывая неравенство $|x| < 1$ и обозначая $\max e_v^2 = A$, $\min e_v^2 = B$, $v = 1, \dots, n$, имеем

$$\frac{-2|\tilde{f}(\zeta)|}{|\tilde{f}(z)| + |\tilde{f}(\zeta)|} \leq \frac{-\delta B}{1 + A(1 + \delta^2)}.$$

Решая это неравенство, видим, что

$$|\tilde{f}(z)| \leq \frac{2}{\delta} \frac{1 + A(1 + \delta^2)}{B} |\tilde{f}(\zeta)|. \quad (2.11)$$

Отсюда с учетом (2.9) вытекает требуемая оценка (2.8). Лемма доказана.

З а м е ч а н и е. Теорема 1 справедлива в следующей формулировке:

Пусть $f(t) \in S_{T'}'$ и существует $R > 0$ такое, что $f(z)$ имеет ограниченный аргумент в области $\mathcal{D} = T^c \cap \{|z| < R\}$. Для того чтобы $f(t)$ имела квазиасимптотику порядка α , необходимо и достаточно выполнения условия А).

Доказательство. Необходимость следует непосредственно из теоремы 1. Для доказательства достаточности, как и в теореме, ограничимся случаем $C = R_+^n$. Возьмем поликруг $V = \{|z_j - \varepsilon i| < \varepsilon, j = 1, \dots, n\} \subset \mathcal{D}$ и отображим его биголоморфно на $T^{R_+^n}$:

$$W(z) = \left(w_j = \frac{-iz_j}{z_j - 2\varepsilon i}; j = 1, \dots, n \right): V \rightarrow T^{R_+^n} \subset \mathbf{C}_w^n.$$

При этом условия А) перейдут в условия А) для $\tilde{f}(z(w))$, где $z = z(w)$ — обратное отображение для $w = w(z)$. Используя доказательство теоремы 1, мы видим, что для $\tilde{f}(z(w))$ выполнены оценки В). Пользуясь теперь общей тауберовой теоремой работы [2], где $\tilde{f}(z(w))$ в $T^{R_+^n} \subset \mathbf{C}_w^n$ мы получаем существование «углового» предела и оценок В) для любых векторов $e \in R_+^n$. Совершив обратное преобразование, мы получим справедливость оценок В) для $\tilde{f}(z)$, откуда и будет следовать существование квазиасимптотики $\tilde{f}(t)$; при этом мы снова пользуемся общей тауберовой теоремой.

§ 3. «Угловой» предел голоморфной функции ограниченного аргумента

Пусть $F(z)$ голоморфна в трубчатой области T^c .

О п р е д е л е н и е. Мы будем говорить, что $F(z)$ имеет угловой предел в точке $z=0$, если существует

$$\lim_{\rho \rightarrow +0} F(\rho z) = h(z), \quad z \in T^c. \quad (3.1)$$

При этом функцию $h(z)$ называем угловым пределом в $z=0$.

Это понятие очевидным образом распространяется на любую граничную точку T^c , а так же и на некоторые другие области в \mathbf{C}^n , например, поликруги.

Используя полученную тауберову теорему, мы выясним некоторые условия, при которых голоморфная функция ограниченного аргумента обладает угловым пределом в граничной точке. При этом исследуем характер поведения функции вдоль лучей, входящих в граничную точку. Не нарушая общности, считаем, что граничная точка совпадает с началом координат.

В одномерном случае если существует предел по одному лучу (у функции ограниченного аргумента), то существует угловой предел, причем h не зависит от z (направления луча), см. [7].

Пусть $F(z) \in H_+(R_+^1)$, $z = x + iy \in \mathbf{C}$. Если существует

$$\lim_{y \rightarrow +0} F(iy) = h, \quad (3.2)$$

то существует угловой предел (3.1), причем $h(z) \equiv h$, и из леммы предыдущего параграфа (для $n=1$) получаем оценку: существует $M > 0$ такое, что

$$|F(\rho e^{i\varphi})| \leq \frac{M}{\sin \varphi}, \quad z = \rho e^{i\varphi}. \quad (3.3)$$

В работе [4] для получения оценки (3.3) использовалось представление Герглотца — Неванлинны. Мы уточним константу M , используя принцип гармонической меры.

Теорема 2. Пусть $F(z) \in H_+(R_+^1)$ и $|F(iy)| \leq 1$ при $y > 0$. Тогда

$$|F(\rho e^{i\varphi})| \leq \frac{2}{|\operatorname{tg} \varphi|} + 1. \quad (3.4)$$

Доказательство. Пусть $\mathcal{D} = \{z \in \mathbb{C}: x > 0, y > 0\}$, дуга $\alpha = \{x = 0, y > 0\}$; тогда гармоническая мера $\omega(z, \alpha, \mathcal{D}) = 2/\pi \operatorname{arg} z$. Голomorphic функция $w = F(z) \equiv u(z) + iv(z)$ отображает \mathcal{D} в область \mathcal{D}^* , лежащую в верхней полуплоскости комплексной плоскости $w = u + iv$. При этом граничная дуга α отображается внутрь единичного круга $|w| \leq 1$. Пусть дуга $A = \{w: v > 0, |w| = 1\}$ и область $E = \{w \in \mathbb{C}: v > 0, |w| > 1\}$. Нетрудно подсчитать, что гармоническая мера

$$\omega(w, A, E) = 2 - \frac{2}{\pi} \operatorname{arg} \frac{w+1}{w-1}.$$

По принципу гармонической меры (см. [7, с. 44]), имеем

$$\frac{2}{\pi} \operatorname{arg} z \leq 2 - \frac{2}{\pi} \operatorname{arg} \frac{w(z)+1}{w(z)-1},$$

откуда легко получается неравенство

$$\operatorname{tg} \varphi = \frac{y}{x} \leq \frac{2v(z)}{|w(z)|^2 - 1} \leq \frac{2|w(z)|}{|w(z)|^2 - 1}, \quad 0 < \varphi < \frac{\pi}{2}.$$

Далее,

$$|w(z)|^2 - \frac{2}{\operatorname{tg} \varphi} |w(z)| - 1 \leq 0,$$

откуда и следует (3.4) для $0 < \varphi < \pi/2$. Аналогично доказывается случай $\pi/2 < \varphi < \pi$. Теорема доказана.

В случае $n \geq 2$, когда рассматриваемая область \mathcal{D} имеет гладкую границу в окрестности нуля, а $F(z)$ имеет в \mathcal{D} неотрицательную мнимую часть, из теоремы Е. М. Чирки (см. [6]), нетрудно получить следующий результат:

Если существует

$$\lim_{\rho \rightarrow +0} F(\rho z^0) = h, \quad z^0 \in \mathcal{D},$$

то существует угловой предел (3.1) для z , принадлежащих некоторой окрестности $z=0$ в \mathcal{D} , причем $h(z) \equiv h$.

Простые примеры показывают, если граница \mathcal{D} не гладкая, то дело обстоит значительно сложнее. Имеет место следующая

Теорема 3. Пусть $F(z)$ голоморфная в T^c и в окрестности $z=0$ имеет ограниченный аргумент. Если существует

$$\lim_{\rho \rightarrow +0} F(\rho z) = h(z), \quad z \in E \subset T^c, \quad (3.5)$$

где E — коническое множество единственности голоморфных функций (например, телесный подконус $C' \subset C$), то существует угловой предел (3.1). При этом $h(z)$ — однородная голоморфная в T^c функция нулевого порядка.

Доказательство следует непосредственно из теоремы 1 и замечания к общей тауберовой теореме работы [2].

Отметим, что в условиях теоремы 3 для любого $z = x + ide$, $e \in C$ ($|e| = 1$) имеют место угловые оценки (2.4), причем M и N не зависят

от e . Легко переформулировать теорему 3 для поликруга и граничной точки на его остоле.

Возникает вопрос: насколько существенно условие (3.5) для существования углового предела? Нельзя ли вместо конического множества единственности ограничиться конечным (или счетным) множеством лучей? Следующий пример дает ответ на этот вопрос.

Пример 1. Существует голоморфная функция $F(z_1, z_2)$ в T^{R^2} с ограниченной неотрицательной мнимой частью, у которой существует (один и тот же) предел по счетному множеству лучей, входящих в начало координат, и не существует углового предела.

Рассмотрим функцию одного комплексного переменного

$$f(z) = \frac{1}{\pi} \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{d\mu(\xi)}{\xi - z}, \quad \text{где } \mu(\xi) = \begin{cases} -2, & \xi \leq -1, \\ \xi [2 + \sin \ln |\xi|], & |\xi| < 1, \\ 2, & \xi \geq 1, \end{cases} \quad (3.6)$$

непрерывная и нечетная функция $\mu(\xi)$ определяет неотрицательную конечную меру $d\mu(\xi)$. Кроме того, $\mu(0) = 0$, $|\mu(\xi)| \leq 3|\xi|$, причем $\mu(\xi)$ не имеет симметрической производной в нуле, так как

$$\frac{\mu(\xi) - \mu(-\xi)}{2\xi} = \frac{\mu(\xi)}{\xi} = 2 + \sin \ln |\xi|, \quad |\xi| < 1.$$

Нетрудно сосчитать, что

$$\operatorname{Re} f(iy) = 0, \quad 0 < \operatorname{Im} f(z) < 4. \quad (3.7)$$

В классе гармонических положительных в верхней полуплоскости функций справедливо обращение теоремы Фату: Для существования углового предела в некоторой точке на действительной оси, необходимо и достаточно существования симметрической производной в этой точке у меры, которая определяет эту гармоническую функцию (см. [9]).

Более полный обзор тауберовых теорем для гармонических в полуплоскости функций можно найти в работе [10].

Из свойств функции $\mu(\xi)$ вытекает, что не существует углового предела в нуле функции $f(z)$.

Положим

$$F(z_1, z_2) = f(z_1) - f(z_2) + 4i, \quad (z_1, z_2) = z \in T^{R^2}. \quad (3.8)$$

Из (3.7) вытекает, что $0 < \operatorname{Im} F(z_1, z_2) < 8$, $\operatorname{Re} F(iy_1, iy_2) = 0$. Интегрируя по частям и делая замену переменных $\xi = \alpha y_1 \eta$, имеем

$$\begin{aligned} F(iy_1, i\alpha y_1) &= \frac{i}{\pi} \left[\int_0^{\infty} \frac{2y_1 d\mu(\xi)}{\xi^2 + y_1^2} - \int_0^{\infty} \frac{2\alpha y_1 d\mu(\xi)}{\xi^2 + (\alpha y_1)^2} + 4\pi \right] = \\ &= \frac{i}{\pi} \left[4 \int_0^{\infty} \frac{\mu(y_1 \eta) - \frac{1}{\alpha} \mu(\alpha y_1 \eta)}{y_1 \eta} \cdot \frac{\eta^2}{(1 + \eta^2)^2} d\eta + 4\pi \right] = \frac{i}{\pi} \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{y_1 d\nu_{\alpha}(\xi)}{\xi^2 + y_1^2} + 4i, \end{aligned} \quad (3.9)$$

где $\nu_{\alpha}(\xi) = \mu(\xi) - \frac{1}{\alpha} \mu(\alpha \xi)$. Формула (3.9) показывает, что $F[iy_1, i\alpha y_1] \equiv \mathcal{F}_{\alpha}(iy_1)$ есть след на мнимой оси гармонической неотрицательной в верхней полуплоскости функции, определяемой мерой $d(V_{\alpha}(\xi) + 4\xi)$. Вычислим ее симметрическую производную при $\xi = 0$.

Имеем

$$\frac{v_\alpha(\xi) - v_\alpha(-\xi)}{2\xi} + 4 = 4 - 2 \sin \ln \alpha \cdot \cos \left[\ln |\xi| + \frac{1}{2} \ln \alpha \right].$$

При $\alpha = \alpha_n = e^{in}$, $n = 0, \pm 1, \dots$, симметрическая производная существует и равна 4, при остальных α , $0 < \alpha < \infty$, $\alpha \neq \alpha_n$, симметрической производной не существует. Пользуясь теперь обращением теоремы Фату, мы видим, что $F(z_1, z_2)$ имеет пределы по лучам $\{z_1 = iy_1, z_2 = i\alpha_n y_1\}$, а пределов по лучам $\{z_1 = iy_1, z_2 = i\alpha y_1, \alpha \neq \alpha_n\}$ не существует. Следовательно, углового предела в $z = 0$ не существует.

§ 4. Квазиасимптотика решений многомерных уравнений в свертках

В сверточной алгебре $S_{\Gamma'}$ рассмотрим уравнение

$$K(t) * u(t) = f(t). \quad (4.1)$$

Этот параграф посвящен выяснению некоторых достаточных условий на ядро уравнения $K(t) \in S_{\Gamma'}$ и правую часть $f(t) \in S_{\Gamma'}$, при которых существует решение многомерного уравнения в свертках $u(t) \in S_{\Gamma'}$, обладающее квазиасимптотикой.

Утверждение 1. Пусть $f_j(t) \in S_{\Gamma'}$ и обладают квазиасимптотикой порядка α_j

$$\frac{1}{k^{\alpha_j}} f_j(kt) \rightarrow f_j^0(t), \quad k \rightarrow \infty \text{ в } S', \quad j = 1, \dots, p. \quad (4.2)$$

Тогда свертка $f(t) = f_1(t) * \dots * f_p(t)$ обладает квазиасимптотикой по-

рядка $\alpha = \sum_{j=1}^p \alpha_j + (p-1)n$:

$$\frac{1}{k^\alpha} f(kt) \xrightarrow{k \rightarrow \infty} f^0(t) = f_1^0(t) * \dots * f_p^0(t). \quad (4.3)$$

Действительно, согласно общей тауберовой теореме работы [2] из (4.2) вытекает, что

$$\rho^{\alpha_j+n} \tilde{f}_j(\rho z) \rightarrow \tilde{f}_j^0(z), \quad \rho \rightarrow 0, \quad z \in T^C, \quad j = 1, \dots, p,$$

и оценка В для каждой $\tilde{f}_j(z)$, а потому оценка В справедлива для

$\prod_{j=1}^p \tilde{f}_j(z)$ и

$$\rho^{\alpha+n} \tilde{f}(\rho z) = \prod_{j=1}^p \rho^{\alpha_j+n} \tilde{f}_j(\rho z) \rightarrow \prod_{j=1}^p \tilde{f}_j^0(z), \quad \rho \rightarrow +0.$$

Снова пользуясь общей тауберовой теоремой, получаем (4.3).

Рассмотрим уравнение в свертках

$$K(t) * \mathcal{E}(t) = \delta(t), \quad (4.4)$$

где $K(t) \in S_{\Gamma'}$. Его решение $\mathcal{E}(t) \in S_{\Gamma'}$, если оно существует, называется фундаментальным решением уравнения (4.4).

Теорема 4. Пусть $K(t) \in S_{\Gamma'}$ имеет квазиасимптотику порядка α и $\tilde{K}(z)$ имеет ограниченный аргумент в T^C . Тогда фундаментальное решение $\mathcal{E}(t)$ уравнения (4.4) существует и обладает квазиасимптотикой порядка $l = -\alpha - 2n$

$$\frac{1}{k^l} \mathcal{E}(kt) \rightarrow \mathcal{E}^0(t), \quad k \rightarrow \infty \text{ в } S', \quad (4.5)$$

причем $\mathcal{E}^0(z)$ имеет ограниченный аргумент в T^C .

Доказательство. Согласно условиям теоремы

$$\rho^{\alpha+n}\tilde{K}(\rho z) \xrightarrow{\rho \rightarrow +0} \tilde{K}^0(z), \quad z \in T^c,$$

где $\tilde{K}^0(z)$ имеет ограниченный аргумент. Делая в (4.4) преобразование Лапласа, получаем

$$\tilde{\mathcal{E}}(z) = \frac{1}{\tilde{K}(z)}, \quad z \in T^c. \quad (4.6)$$

Отметим, что $\tilde{\mathcal{E}}(z)$, определяемое формулой (4.6), существует, является голоморфной функцией в T^c и имеет там ограниченный аргумент. Следовательно, фундаментальное решение существует, $\mathcal{E}(t) \in S_{\Gamma'}$. Так как

$$\rho^{-\alpha-2n+n}\tilde{\mathcal{E}}(\rho z) = \frac{1}{\rho^{\alpha+n}\tilde{K}(\rho z)} \xrightarrow{\rho \rightarrow +0} \frac{1}{\tilde{K}^0(z)} \equiv \tilde{\mathcal{E}}^0(z), \quad z \in T^c,$$

то $\tilde{\mathcal{E}}^0(z)$ имеет ограниченный аргумент в T^c и справедливо (4.5) (мы воспользовались теоремой 1). Теорема доказана.

Следствие. Пусть $K(t) \in S_{\Gamma'}$ обладает квазиасимптотикой порядка α , $\operatorname{Re} \tilde{K}(z) \geq 0$ в T^c . Пусть также $f(t) \in S_{\Gamma'}$ и обладает квазиасимптотикой порядка β

$$\frac{1}{k^\beta} f(kt) \rightarrow f^0(t), \quad k \rightarrow \infty \text{ в } S'.$$

Тогда уравнение (4.1) имеет решение $u(t) \in S_{\Gamma'}$, обладающее квазиасимптотикой порядка $\beta - \alpha - n$, которую можно вычислить по формуле

$$\frac{1}{k^{\beta-\alpha-n}} u(kt) \xrightarrow{k \rightarrow \infty} u^0(t) = \mathcal{E}^0(t) * f^0(t), \quad (4.7)$$

где $\mathcal{E}^0(t)$ — квазиасимптотика фундаментального решения.

Доказательство очевидным образом вытекает из теоремы 4 и утверждения 1.

Применим полученные результаты для вычисления квазиасимптотик фундаментальных решений некоторых гиперболических операторов с постоянными коэффициентами.

Пример 2. Квазиасимптотика фундаментальных решений гиперболических операторов с постоянными коэффициентами.

Рассмотрим гиперболический оператор $Q(D)$, $D = \left(\frac{\partial}{\partial t_1}, \dots, \frac{\partial}{\partial t_n} \right)$, относительно конуса C . В этом случае (см. [1, § 14.7]) существует точка $y_0 \in \mathbb{R}^n$ такая, что $Q(y_0 - iz) \neq 0$ при всех $z \in T^c$. Положим $P(D) = Q(D + y_0)$, так что $P(D)$ тоже гиперболический оператор, причем его символ

$$P(-iz) \neq 0, \quad z \in T^c, \quad (4.8)$$

и имеет ограниченный аргумент в T^c . Фундаментальные решения этих операторов

$$Q(D)E(t) = \delta(t), \quad P(D)\mathcal{E}(t) = \delta(t) \quad (4.9)$$

связаны формулой $E(t) = e^{(y_0, t)} \mathcal{E}(t)$.

Запишем символ оператора $P(D)$ в виде

$$P(-iz) = \sum_{j=l}^m P_j(-iz) \quad (l \geq 0), \quad (4.10)$$

где $P_j(-iz)$ — однородный полином порядка j .

Утверждение 2. Фундаментальное решение $\mathcal{E}(t)$ гиперболического оператора $P(D)$ имеет квазиасимптотику порядка $l-n$

$$\frac{1}{k^{l-n}} \mathcal{E}(kt) \rightarrow \mathcal{E}^0(t), \quad k \rightarrow \infty \text{ в } S', \quad (4.11)$$

причем

$$L[\mathcal{E}^0(t)] = \frac{1}{P_l(-iz)}. \quad (4.12)$$

Доказательство. $\tilde{\mathcal{E}}(z) = 1/P(-iz)$ и согласно теореме 1

$$\rho^l \tilde{\mathcal{E}}(\rho y) = \rho^l \frac{1}{\sum_{j=l}^m P_j(\rho y)} \xrightarrow{\rho \rightarrow +0} \frac{1}{P_l(y)}, \quad y \in C, \quad (4.13)$$

откуда и следует требуемое утверждение.

Отметим, в частности, что так как $\tilde{\mathcal{E}}^0(z)$ имеет ограниченный аргумент, то для гиперболического полинома $P(-iz)$ младший однородный полином $P_l(-iz) \neq 0$ для $z \in T^c$.

В качестве иллюстрации разберем подробно случай $m=n=2$. Линейной заменой переменных всегда можно добиться того, что конус $\bar{C} = \Gamma = \{t_1 \geq |t_2|\}$. Заменой зависимой и независимых переменных гиперболическому уравнению второго порядка от двух независимых переменных можно придать вид

$$Q(D)E \equiv \frac{\partial^2 E}{\partial t_1^2} - \frac{\partial^2 E}{\partial t_2^2} \pm d^2 E = \delta(t).$$

1) Волновое уравнение: $d=0$, $Q(D) = P_2(D)$. Фундаментальное решение имеет квазиасимптотику порядка 0, причем $\tilde{\mathcal{E}}^0(-iz) = \tilde{\mathcal{E}}(-iz)$. Следовательно, квазиасимптотика совпадает с фундаментальным решением

$$E(t) \equiv \mathcal{E}(t) = \mathcal{E}^0(t) = \frac{\Theta_{\Gamma}(t)}{2}.$$

2) Уравнение Клейна — Гордона: $Q(D)E \equiv \frac{\partial^2 E}{\partial t_1^2} - \frac{\partial^2 E}{\partial t_2^2} + d^2 E = \delta(t)$. В этом случае $Q(D) = P(D) = P_2(D) + P_0(D)$, $P_0(D) = d^2$. Фундаментальное решение имеет квазиасимптотику порядка -2 ; $L[\mathcal{E}^0(t)] = 1/d^2$, откуда $\mathcal{E}^0(t) = d^{-2}\delta(t)$. Пользуясь известным (см. [1]) выражением для фундаментального решения уравнения Клейна — Гордона, получаем формулу

$$k^2 \mathcal{E}(kt) \equiv k^2 \frac{\Theta_{\Gamma}(kt)}{2} J_0(kd \sqrt{t_1^2 - t_2^2}) \xrightarrow{k \rightarrow \infty} \frac{1}{d^2} \delta(t) \text{ в } S'. \quad (4.14)$$

3) Телеграфное уравнение: $Q(D)E \equiv \frac{\partial^2 E}{\partial t_1^2} - \frac{\partial^2 E}{\partial t_2^2} - d^2 E = \delta(t)$.

В этом случае

$$P(D) = \frac{\partial^2}{\partial t_1^2} - \frac{\partial^2}{\partial t_2^2} + 2d \frac{\partial}{\partial t_1} = P_2(D) + P_1(D), \quad \text{где } P_1(D) = 2d \frac{\partial}{\partial t_1}.$$

Поэтому $E(t) = e^{dt_1} \mathcal{E}(t)$, где $P(D)\mathcal{E}(t) = \delta(t)$. Функция $\mathcal{E}(t)$ имеет квазиасимптотику порядка -1 , $L[\mathcal{E}^0(t)] = 1/-idz_1$, откуда

$$\mathcal{E}^0(t) = \frac{1}{2d} \Theta(t_1) \delta(t_2). \quad (4.15)$$

Пользуясь фундаментальным решением телеграфного уравнения, получаем формулу

$$k\mathcal{E}(kt) \equiv k \frac{\Theta_{\Gamma}(kt)}{2} e^{-dkt} I_0(kd \sqrt{t_1^2 - t_2^2}) \xrightarrow{k \rightarrow \infty} \frac{\Theta(t_1)}{2d} \delta(t_2) \text{ в } S'. \quad (4.16)$$

Здесь $I_0(\xi)$ — функция Бесселя мнимого аргумента.

§ 5. Квазиасимптотика фундаментальных решений пассивных систем

Рассмотрим матричное уравнение в свертках

$$Z(t) * A(t) = I \delta(t). \quad (5.1)$$

Здесь $N \times N$ -матрицы-функции $Z(t) \in (S_{\Gamma'})^{N \times N}$; $A(t) \in (S_{\Gamma'})^{N \times N}$, I — единичная матрица (в формуле (5.1) вместо умножения компонент матриц, надо брать их свертку). Если для заданной матрицы $Z(t)$ решение (5.1) существует, то матрица функции $A(t)$ называется фундаментальным решением (фундаментальной матрицей) сверточного оператора $Z(t) *$.

Сверточный оператор $Z(t) *$ называется пассивным оператором относительно конуса Γ , если матрица-функция $\tilde{Z}(z)$ — преобразование Лапласа матрицы $Z(t)$ — положительно вещественна в T^c .

Матрица $\tilde{Z}(z)$ положительно вещественна в T^c , если:

$$1) \quad 2\operatorname{Re} \tilde{Z}(z) = \tilde{Z}(z) + \overline{\tilde{Z}^T(z)} \geq 0;$$

$$2) \quad \tilde{Z}(iy) \text{ вещественна для } y \in C;$$

где $\tilde{Z}^T(z)$ означает транспонирование матрицы $\tilde{Z}(z)$ и взятие комплексного сопряжения (см. [1]).

Теорема 5. Пусть матрица-функция $Z(t) \in (S_{\Gamma'})^{N \times N}$ и ее преобразование Лапласа $\tilde{Z}(z)$ — положительно вещественная матрица-функция в T^c . Для того чтобы $Z(t)$ имела квазиасимптотику порядка α относительно конуса Γ

$$\frac{1}{k^\alpha} Z(kt) \xrightarrow{k \rightarrow \infty} G(t) \quad (G(t) \neq 0), \quad (5.2)$$

необходимо и достаточно, чтобы

A) Существовал телесный подконус $C' \subset C$ ($\operatorname{int} C' = \emptyset$) такой, что

$$\rho^{\alpha+n} \tilde{Z}(i\rho y) \xrightarrow{\rho \rightarrow +0} H(iy), \quad y \in C' \quad (H(iy) \neq 0). \quad (5.3)$$

При этом $H(z) = L[G(t)] \equiv \tilde{G}(z)$, $z \in T^c$, и матрица $\tilde{G}(z)$ положительно вещественна в T^c .

Доказательство. Необходимость непосредственно следует из общей тауберовой теоремы работы [2]. Достаточность вытекает из тауберовой теоремы 1. Действительно, для любого вектора $a \in C^N$ функция $\langle \tilde{Z}(z)a, a \rangle$ имеет неотрицательную вещественную часть и из условия A вытекает соотношение

$$\rho^{\alpha+n} \langle \tilde{Z}(i\rho y)a, a \rangle \xrightarrow{\rho \rightarrow +0} \langle H(iy)a, a \rangle, \quad y \in C',$$

т. е. $\langle Z(t)a, a \rangle$ имеет квазиасимптотику порядка α , равную $\langle G(t)a, a \rangle$, где $L[\langle G(t)a, a \rangle] = \langle H(z)a, a \rangle$ (здесь $\langle \cdot, \cdot \rangle$ — скалярное произведение в C^N).

Пользуясь равенством

$$\begin{aligned} \langle Z(t), a, b \rangle &= \frac{1}{4} \langle Z(t)(a+b), a+b \rangle - \frac{1}{4} \langle Z(t)(a-b), a-b \rangle + \\ &+ \frac{i}{4} \langle Z(t)(a+ib), a+ib \rangle - \frac{i}{4} \langle Z(t)(a-ib), a-ib \rangle, \end{aligned}$$

для любых векторов a и b из \mathbf{C}^N получаем, что $\langle Z(t)a, b \rangle$ имеет квазиасимптотику порядка α , преобразование Лапласа которой равно $\langle H(z)a, b \rangle$.

Отсюда следует (5.2). В частности,

$$\rho^{\alpha+n} \operatorname{Re} \langle \tilde{Z}(\rho z)a, a \rangle \geq 0, \quad z \in T^c, \quad a \in \mathbf{C}^N.$$

Переходя к пределу при $\rho \rightarrow +0$, имеем

$$\operatorname{Re} \langle H(z)a, a \rangle \geq 0, \quad z \in T^c, \quad a \in \mathbf{C}^N.$$

Следовательно, $\operatorname{Re} H(z) = \operatorname{Re} L[G(t)] \geq 0$, а так как $\tilde{Z}(i\rho y)$ вещественна при $y \in C$, то и $H(iy)$ — вещественная матрица. Т. е. матрица $\tilde{G}(z) \equiv H(z)$ положительно вещественна. Теорема доказана.

Пусть теперь $Z(t) *$ — невырожденный пассивный оператор ($\det \tilde{Z}(z) \neq 0$ в T^c), обладающий квазиасимптотикой $G(t)$ порядка α .

Согласно [1, § 19.5] он обладает единственным фундаментальным решением $A(t) \in (S_{\Gamma'})^{N \times N}$, которое определяет невырожденный пассивный оператор $A(t) *$ относительно того же конуса Γ . Квазиасимптотика оператора $Z(t) *$, в свою очередь, определяет пассивный оператор $G(t) *$ (это вытекает из теоремы 5). Если этот оператор невырожден ($\det \tilde{G}(z) \neq 0$ в T^c), то справедливо

Утверждение 3. *Фундаментальное решение $A(t) \in (S_{\Gamma'})^{N \times N}$ пассивного невырожденного оператора $Z(t) *$, обладающего невырожденной квазиасимптотикой $G(t)$ порядка α , имеет квазиасимптотику порядка $-\alpha - 2n$*

$$k^{\alpha+2n} A(kt) \xrightarrow[k \rightarrow \infty]{} A^0(t), \quad (5.4)$$

причем

$$L[A^0(t)] = \tilde{G}^{-1}(z). \quad (5.5)$$

Действительно, делая преобразование Лапласа (5.1), имеем

$$\rho^{\alpha+n} \tilde{Z}(\rho z) \cdot \rho^{-\alpha-2n+n} \tilde{A}(\rho z) = I.$$

Переходя к пределу при $\rho \rightarrow +0$ и, учитывая, что

$$\rho^{\alpha+n} \tilde{Z}(\rho z) \xrightarrow[\rho \rightarrow +0]{} \tilde{G}(z), \quad z \in T^c, \quad \det \tilde{G}(z) \neq 0,$$

получаем

$$\rho^{-\alpha-2n+n} \tilde{A}(\rho z) \xrightarrow[\rho \rightarrow +0]{} \tilde{G}^{-1}(z), \quad z \in T^c.$$

откуда (и из теоремы 5) следуют (5.4) и (5.5). Утверждение доказано.

Если пассивный оператор $G(t) *$ вырожден ($\det \tilde{G}(z) = 0, z \in T^c$), то квазиасимптотику фундаментального решения $A(t)$ пассивного невырожденного оператора $Z(t) *$ следует искать следующим образом. Делая преобразование Лапласа, находим $\tilde{A}(z) = \tilde{Z}^{-1}(z)$ и подбираем γ таким образом, чтобы существовал предел (если это возможно)

$$\lim_{\rho \rightarrow +0} \rho^{\gamma+n} \tilde{Z}^{-1}(\rho z) = \tilde{A}^0(z), \quad z \in T^c. \quad (5.6)$$

Обращая преобразование Лапласа

$$L[A^0(t)] = \tilde{A}^0(z), \quad (5.7)$$

получаем, что фундаментальное решение $A(t)$ обладает квазиасимптотикой $A^0(t)$ порядка γ .

В сверточной алгебре $S_{\Gamma'}$ рассмотрим систему сверточных уравнений

$$Z(t) * u(t) = f(t), \quad (5.8)$$

где $N \times N$ -матрица-функция $Z(t) \in (S_{\Gamma'})^{N \times N}$, вектор-функция $f(t) \in (S_{\Gamma'})^N$.

Утверждение 4. Если $Z(t) *$ — пассивный невырожденный оператор, обладающий невырожденной квазиасимптотикой $G(t)$ порядка α , а вектор-функция $f(t)$ имеет квазиасимптотику $f^0(t) \in (S_{\Gamma'})^N$ порядка β , то решение системы (5.8) $u(t) \in (S_{\Gamma'})^N$ существует и обладает квазиасимптотикой порядка $\beta - \alpha - n$, вычисляемой по формуле

$$u^0(t) = A^0(t) * f^0(t), \quad (5.9)$$

где $A^0(t)$ находится из формулы (5.5).

Доказательство непосредственно следует из утверждений 3 и 1.

Пример 3. Рассмотрим пассивную систему ($n=3, N=4$)

$$I \frac{\partial u}{\partial t_1} + A_2 \frac{\partial u}{\partial t_2} + A_3 \frac{\partial u}{\partial t_3} + Bu = I\delta(t), \quad (5.10)$$

$$A_2 = \begin{pmatrix} \frac{1}{3} & & 0 \\ 3 & \frac{1}{3} & \\ 0 & 1 & -1 \end{pmatrix}, \quad A_3 = \begin{pmatrix} 0 & \frac{1}{3} & 0 \\ \frac{1}{3} & 0 & \\ 0 & 0 & 1 \\ & 1 & 0 \end{pmatrix}, \quad B = \begin{pmatrix} 0 & & \frac{1}{3} \\ & -\frac{1}{3} & \\ & \frac{1}{3} & \\ -\frac{1}{3} & & 0 \end{pmatrix}.$$

Здесь t_1 играет роль времени, а t_2 и t_3 — роль пространственных координат.

Нетрудно видеть, что

$$\lim_{\rho \rightarrow +0} \tilde{Z}(\rho z) = \tilde{G}(z) = B, \quad \det B \neq 0.$$

Согласно утверждению 3 фундаментальное решение этой системы обладает квазиасимптотикой порядка -3 и равно

$$A^0(t) = \begin{pmatrix} 0 & -3 \\ & 3 \\ -3 & \\ 3 & 0 \end{pmatrix} \delta(t). \quad (5.11)$$

Система (5.10) из кристаллооптики исследовалась Д. Людвигом [8], который показал, что в фундаментальной матрице этой системы есть компоненты следующего вида (t_2, t_3 фиксированы, $t_1 \rightarrow +\infty$):

$$\frac{c_1(t_2, t_3)}{\sqrt{t_1}} e^{\frac{i}{2} t_1} + \frac{c_2(t_2, t_3)}{\sqrt{t_1}} e^{-\frac{i}{2} t_1} + o\left(\frac{1}{\sqrt{t_1}}\right). \quad (5.12)$$

Асимптотика по другим направлениям в причинном конусе не исследована. Формула (5.11) не противоречит (5.12), но дает так же и некоторую «усредненную» характеристику (квазиасимптотику) поведения фундаментального решения и по другим направлениям.

Пример 4. Система уравнений Дирака ($n=4, N=4$). После некоторых преобразований соответствующий оператор может быть написан в виде (см. [1, § 19.7])

$$Z(t) = \sum_{\mu=0}^3 \gamma^0 \gamma^\mu \frac{\partial}{\partial t_\mu} + im\gamma^0, \quad (5.13)$$

где γ^μ — 4×4 -матрицы Дирака, t_0 — время; t_1, t_2, t_3 — пространственные координаты.

Это пассивный невырожденный оператор относительно конуса $\Gamma = \{t_0 \geq \sqrt{t_1^2 + t_2^2 + t_3^2}\}$. Нетрудно подсчитать, что

$$\bar{G}(z) = im\gamma^0, \quad \det \bar{G}(z) \neq 0, \quad z \in \Gamma^c.$$

Используя утверждение 3, получаем: фундаментальное решение оператора Дирака (5.13) имеет квазиасимптотику порядка -4

$$A^0(t) = \begin{pmatrix} 0 & & m \\ & m & \\ -m & & 0 \end{pmatrix} \delta(t). \quad (5.14)$$

Пример 5. Уравнения вращающейся жидкости и акустики ($n=4, N=4$):

$$\alpha \frac{\partial p}{\partial t} + \rho \operatorname{div} v, \quad \rho \frac{\partial v}{\partial t} + \operatorname{grad} p + v \times \omega. \quad (5.15)$$

При $\alpha > 0$ эта система пассивна и невырождена относительно конуса $\Gamma = \{t \geq \sqrt{\alpha} \sqrt{x^2 + y^2 + z^2}\}$. Вводя координаты, используемые в настоящей статье: t_1 — время, $\tilde{t} = (t_2, t_3, t_4)$ — пространственные координаты, и вектор-функцию $u(t) = (p, \rho v_1, \rho v_2, \rho v_3)$, считая ось вращения ω направленной вдоль координаты t_4 , оператор системы (5.15) перепишем в виде

$$Z(t) * u \equiv \begin{pmatrix} \alpha \frac{\partial}{\partial t_1} & \frac{\partial}{\partial t_2} & \frac{\partial}{\partial t_3} & \frac{\partial}{\partial t_4} \\ \frac{\partial}{\partial t_2} & \frac{\partial}{\partial t_1} & \frac{|\omega|}{\rho} & 0 \\ \frac{\partial}{\partial t_3} & -\frac{|\omega|}{\rho} & \frac{\partial}{\partial t_1} & 0 \\ \frac{\partial}{\partial t_4} & 0 & 0 & \frac{\partial}{\partial t_1} \end{pmatrix} \delta(t) * u.$$

Делая преобразование Лапласа и обращая полученную матрицу $Z(z)$, можно получить, что при $\gamma = -3$ существует предел в (5.6)

$$\tilde{A}^0(z) = \frac{1}{\Delta(z)} \begin{pmatrix} -iz_1 & 0 & 0 & iz_4 \\ & 0 & & \\ iz_4 & 0 & 0 & -iaz_1 \end{pmatrix},$$

где $\Delta(z) = (-iz_1)^2 - \frac{1}{\alpha} (-iz_4)^2$. Можно сосчитать, что

$$\Delta(z) = L \left[\frac{\Theta(t_1 - \sqrt{\alpha} |t_4|)}{2} \delta(t_2, t_3) \right].$$

По формулам (5.6) и (5.7) получается, что фундаментальное решение имеет квазиасимптотику порядка -3

$$A^0(t) = \begin{pmatrix} \frac{\partial}{\partial t_1} & 0 & 0 & -\frac{\partial}{\partial t_4} \\ & 0 & & \\ -\frac{\partial}{\partial t_4} & 0 & 0 & \alpha \frac{\partial}{\partial t_1} \end{pmatrix} \frac{\Theta(t_1 - \sqrt{\alpha} |t_4|)}{2} \delta(t_2, t_3). \quad (5.16)$$

Формула (5.16) показывает, что $A^0(t)$ отлична от нуля только в направлении двух лучей на конусе Γ , пространственные проекции которых совпадают с осью вращения.

В заключение выражаю глубокую благодарность Б. И. Завьялову за полезные обсуждения и помощь в работе.

Литература

1. *Владимиров В. С.* Обобщенные функции в математической физике. М.: Наука, 1979.
2. *Дрожжинов Ю. Н., Завьялов Б. И.* Тауберовы теоремы для обобщенных функций с носителями в конусах.— Матем. сб., 1979, т. 108 (150), с. 78—90.
3. *Шабат Б. В.* Введение в комплексный анализ. Т. II. М.: Наука, 1976.
4. *Дрожжинов Ю. Н., Завьялов Б. И.* Квазиасимптотика обобщенных функций и тауберовы теоремы в комплексной области.— Матем. сб., 1977, т. 102 (144), с. 372—390.
5. *Лере Ж.* Обобщенное преобразование Лапласа. М.: Мир, 1969.
6. *Чирка Е. М.* Теоремы Линделёфа и Фату в C^n .— Матем. сб., 1973, т. 92 (134), с. 622—644.
7. *Неванлинна Р.* Однозначные аналитические функции. М.: ОГИЗ, 1941.
8. *Ludwig D.* Examples of the behavior of solutions of hyperbolic equations for large times.— J. Math. and Mech., 1963, v. 12, № 4.
9. *Loomis L.* The converse of the Fatou theorem for positiv harmonic functions.— Trans. Amer. Math. Soc., 1943, v. 53, p. 239—250.
10. *Gehring F.* Harmonic functions and Tauberian theorems.— Proc.— London Math. Soc., 1960, v. X, p. 88—106.

Москва
Математический институт
им. В. А. Стеклова АН СССР

Поступила в редакцию
13.IV.1981