$+\hat{C}_N^+(\varepsilon)\hat{Z}_N^+(\xi, \varepsilon)+\hat{C}_N^-(\varepsilon)\hat{Z}_N^-(\xi, \varepsilon)$, $\xi\in[\xi_0+\delta, a]$, так что colon $\{C_N^+(\varepsilon), C_N^-(\varepsilon)\}=D(\varepsilon)$ colon $\{\hat{C}_N^+(\varepsilon), \hat{C}_N^-(\varepsilon)\}$.

Доказательство теоремы дано в [5].

Матрица перехода $D(\varepsilon)$ строится следующим образом: $D(\varepsilon)=D_2(\varepsilon)D_1(\varepsilon)$. Обозначим через $\hat{y}_N^{\pm}(\xi, \varepsilon)$, $y_N^{\pm}(\xi, \varepsilon)$ вектор-столбцы $(\hat{Z}_N^{\pm}(\xi, \varepsilon), \varepsilon\hat{Z}_N^{\pm\prime}(\xi, \varepsilon))$, $(Z_N^{\pm}(\xi, \varepsilon), \varepsilon Z_N^{\pm\prime}(\xi, \varepsilon))$ соответственно, где $\hat{Z}_N^{\pm\prime}(\xi, \varepsilon)$ и $Z_N^{\pm\prime}(\xi, \varepsilon)$ — продифференцированные почленно асимптотические ряды (2). Матрицы $D_1(\varepsilon)$ и $D_2(\varepsilon)$ ищутся из уравнений $(\hat{y}_N^+(\xi_1, \varepsilon), \hat{y}_N^-(\xi_1, \varepsilon))=(l_1(\xi_1, \varepsilon), l_2(\xi_1, \varepsilon))D_1(\varepsilon)$, $\xi_1=\xi_0-\Delta$, $(l_1(\xi_2, \varepsilon), l_2(\xi_2, \varepsilon))=(\hat{y}_N^+(\xi_2, \varepsilon), \hat{y}_N^-(\xi_2, \varepsilon))D_2(\varepsilon)$, $\xi_2=\xi_0+\Delta$.

Матрицы $D_1(\varepsilon)$, $D_2(\varepsilon)$ будут иметь вид $D_i(\varepsilon)=\sum_{r=0}^{\infty} D_i^r(\varepsilon)\varepsilon^r$, аналогичный вид будет иметь матрица $D(\varepsilon)$.

Таким образом, выяснено асимптотическое поведение фундаментальной матрицы решений уравнения (1) при переходе через точку поворота и указан алгоритм построения матрицы перехода от асимптотического разложения фундаментальной матрицы решений до точки поворота к ее асимптотическому разложению за точкой поворота.

Автор выражает благодарность профессору А. Г. Свешникову за обсуждение результатов данной работы.

Литература

1. Свешников А. Г., Ильинский А. С.— ЖВМ и МФ, 1968, т. 8, № 2, с. 363—373.
2. Жданова Г. В., Федорюк М. В.— Труды Моск. мат. о-ва, 1977, т. 34, с. 213—242.
3. Гантмахер Ф. Р. Теория матриц.— М.: ГИТТЛ, 1954.—575 с.
4. Вазов В. Асимптотические разложения решений обыкновенных дифференциальных уравнений.— М.: Мир, 1968.—464 с.
5. Кадомцева А. Ф. Асимптотическое поведение коэффициентов отражения волн в нерегулярных волноводах с неоднородным заполнением.— ВИНИТИ № 3742—81 Деп.

Московский государственный университет им. М. В. Ломоносова

Поступила в редакцию 18 июля 1980 г.

УДК 517.927.6+517.968.74

В. П. МАКСИМОВ

О НЕКОТОРЫХ НЕЛИНЕЙНЫХ КРАЕВЫХ ЗАДАЧАХ

Рассматриваются нелинейные краевые задачи для функционально-дифференциальных уравнений, содержащих как частные случаи обыкновенные дифференциальные уравнения, дифференциальные уравнения с отклоняющимся аргументом и интегро-дифференциальные уравнения. Для задач с общими функциональными условиями предлагаются способы получения и использования априорных оценок решений для установления признаков разрешимости. Приводятся условия разрешимости асимптотически линейных и некоторых существенно нелинейных задач. Обсуждаются вопросы, связанные с применением полученных результатов к краевым задачам для функционально-дифференциальных уравнений нейтрального типа. Рассматривается одна краевая задача для уравнения Томаса — Ферми.

Обозначим через R^n евклидово пространство n-мерных вектор-столбцов с нормой $|\cdot|$; L_p^n, $1\leqslant p<\infty$,— пространство функций $x:[a, b]\to R^n$

с суммируемыми в степени p компонентами, $\|x\|_{L_p}=\left\{\int\limits_a^b |x(t)|^p dt\right\}^{1/p}$; L^n_∞ — пространство измеримых и ограниченных в существенном функций $x:[a, b]\to R^n$, $\|x\|_{L_\infty}=\operatorname{vrai\,sup}\limits_{t\in[a, b]}|x(t)|$; D^n_p, $1\leqslant p<\infty$,— пространство таких абсолютно непрерывных функций $x:[a, b]\to R^n$, что $\dot{x}\in L^n_p$, $\|x\|_{D_p}=|x(a)|+\|\dot{x}\|_{L_p}$; C^n — пространство непрерывных функций $x:[a, b]\to R^n$ с обычной нормой $\|\cdot\|_C$; p' — показатель степени, сопряженный с p, $1/p+1/p'=1$; X^* — пространство, сопряженное с банаховым пространством X; Q^* — оператор, сопряженный с оператором Q; I — тождественный оператор.

§ 1. ОБЩАЯ КРАЕВАЯ ЗАДАЧА. ПРЕДПОЛОЖЕНИЯ

Будем рассматривать краевую задачу

$$\mathscr{L}x=\mathscr{F}x, \quad lx=\varphi x, \tag{1}$$

где $\mathscr{L}:D^n_p\to L^n_p$ — линейный ограниченный оператор; $l:D^n_p\to R^n$ — линейный ограниченный вектор-функционал; $\mathscr{F}:D^n_p\to L^n_p$ — непрерывный оператор; $\varphi:D^n_p\to R^n$ — непрерывный вектор-функционал.

Предполагается, что операторы $\mathscr{L}$, $\mathscr{F}$ и φ удовлетворяют следующим условиям.

Оператор $\mathscr{L}$. Главная часть оператора $\mathscr{L}$ [1] является фредгольмовым оператором [2]. Другими словами, произведение оператора $\mathscr{L}$ на оператор $V:L^n_p\to D^n_p$, определяемый равенством $(Vz)(t)=\int\limits_a^t z(s)ds$, представимо в виде $\mathscr{L}V=P+K$, где $P:L^n_p\to L^n_p$ — линейный обратимый оператор, а оператор $K:L^n_p\to L^n_p$ вполне непрерывен. Оператор $Q=\mathscr{L}V$ называют главной частью оператора $\mathscr{L}$. Иногда мы будем требовать выполнения

Условия Q). Если $p=1$, то оператор $Q:L^n_1\to L^n_1$ обратим, причем обратный оператор $Q^{-1}:L^n_1\to L^n_1$ является регулярным [3], т. е. представим в виде разности двух линейных положительных операторов.

Оператор $\mathscr{F}$. Выполнено одно из следующих условий:

$\mathscr{F}$). Оператор $\mathscr{F}:D^n_p\to L^n_p$ вполне непрерывен.

$\mathscr{F}_C$). Оператор $\mathscr{F}:D^n_p\to L^n_p$ допускает распространение до непрерывного оператора $\mathscr{F}_C:C^n\to L^n_p$, причем если $p=1$, то для любого $r>0$ найдется такой $u_r\in L^1_1$, что для всех $x\in C^n$ таких, что $\|x\|_C\leqslant r$, почти всюду на $[a, b]$ выполняется неравенство $|(\mathscr{F}_C x)(t)|\leqslant u_r(t)$.

Отметим, что при $p>1$ $\mathscr{F}$) следует из $\mathscr{F}_C$). Действительно, $\mathscr{F}=\mathscr{F}_C W$, где $W:D^n_p\to C^n$ — оператор естественного вложения пространства D^n_p в C^n. Легко видеть, что оператор W при $p>1$ обладает свойством полной непрерывности.

Вектор-функционал φ удовлетворяет одному из следующих условий:

φ). $\varphi:D^n_p\to R^n$ отображает ограниченные множества в ограниченные.

φ_C). $\varphi:D^n_p\to R^n$ допускает распространение до непрерывного оператора $\varphi_C:C^n\to R^n$, отображающего ограниченные множества в ограниченные.

Типичным примером уравнения $\mathscr{L}x=\mathscr{F}x$ может служить уравнение

$(B\dot{x})(t)+A(t)x(t)=f(t, x(t), \int_a^b d_sR(t, s)x(s))$ с линейным обратимым оператором $B: L_p^n \to L_p^n$.

Отметим, что в случае обыкновенного дифференциального уравнения $\dot{x}(t)+A(t)x(t)=f(t, x(t))$ оператор Немыцкого $(\mathcal{F}x)(t)=f(t, x(t))$ при естественных предположениях относительно функции f определен на пространстве C^n и непрерывно отображает это пространство в пространство L_p^n. По установившейся традиции краевые задачи для обыкновенных дифференциальных уравнений рассматриваются с краевыми условиями, определенными на всем C^n (см., например, [4—6] и библиографический обзор [7]). Подчеркнем, что в задаче (1) операторы $\mathcal{F}$, l и φ могут и не быть определены на C^n; примером может служить задача $\dot{x}(t)=\left\{|x(t)|+\int_a^t |\dot{x}(s)|ds\right\}^{1/2}+q(t)$, $x(a)=\int_a^b v(s)\dot{x}(s)ds+1$; $q\in L_1^1$, $v\in L_\infty^1$ (условия $\mathcal{F}$) и φ) здесь выполнены).

§ 2. ОДНА ТЕОРЕМА О РАЗРЕШИМОСТИ ОБЩЕЙ КРАЕВОЙ ЗАДАЧИ

Хорошо известна роль, которую играют в установлении признаков разрешимости нелинейных уравнений априорные оценки решений. Употребляя фразу «... для всех решений x задачи (N) имеет место общая априорная оценка $\|x\|\leqslant d$», мы имеем в виду следующее: существует такое $d\in(0, \infty)$, что задача (N) не имеет решений x, удовлетворяющих неравенству $\|x\|>d$. Таким образом, предположение о существовании априорной оценки решений не содержит предположения о существовании самих решений.

Теорема 1. *Пусть а) выполнены условия $\mathcal{F}$) и φ) или б) выполнены условия $\mathcal{F}_C$), φ_C) и Q). Пусть, далее, для всех решений x^λ всех задач*

$$\mathcal{L}x=\lambda\mathcal{F}x, \quad lx=\lambda\varphi x, \quad \lambda\in[0, 1], \tag{1_λ}$$

имеет место общая априорная оценка $\|x^\lambda\|_{D_p}\leqslant d<\infty$. Тогда задача (1) имеет по крайней мере одно решение $x\in D_p^n$.

Доказательство. В условиях теоремы однородная задача $\mathcal{L}x=0$, $lx=0$ имеет только тривиальное решение. Отсюда следует [1], во-первых, существование фундаментальной $n\times n$-матрицы X уравнения $\mathcal{L}x=0$; во-вторых, существование оператора Грина $G: L_p^n\to D_p^n$ задачи $\mathcal{L}x=f$, $lx=0$, т. е. такого оператора G, что решение x этой задачи представимо в виде $x=Gf$. Можно считать, что матрица lX, каждый столбец которой представляет собой результат применения вектор-функционала l к соответствующему столбцу матрицы X, является единичной матрицей: $lX=E$. Таким образом, задача (1_λ) эквивалентна уравнению

$$x=A(\lambda, x)\equiv\lambda\{X\cdot\varphi x+G\mathcal{F}x\}, \tag{2}$$

и в случае а) остается сослаться на теорему Лере — Шаудера (см., например, [2, с. 417]).

Обратимся теперь ко второму варианту. Случай $p>1$ сводится к только что рассмотренному, так как условие $\mathcal{F}_C$) при $p>1$ гарантирует полную непрерывность оператора $\mathcal{F}: D_p^n\to L_p^n$. Пусть теперь $p=1$. Вместо уравнения (2) рассмотрим в пространстве C^n уравнение

$$x=A_C(\lambda, x)\equiv\lambda\{X\cdot\varphi_C x+G\mathcal{F}_C x\}. \tag{3}$$

Для доказательства полной непрерывности оператора $G\mathcal{F}_C: C^n\to C^n$

воспользуемся специальным представлением оператора Грина. Запишем задачу $\mathscr{L}x=f$, $lx=0$ в виде

$$Q\dot{x}+P(\cdot)x(a)=f, \quad lx=0, \tag{4}$$

где $P(t)=(\mathscr{L}E)(t)$. Как известно [1], оператор Грина G является интегральным оператором: $(Gf)(t)=\int\limits_a^b G(t, s)f(s)ds$. Отсюда для решения x задачи (4) получаем следующее представление:

$$x(t)=\int\limits_a^t (Q^{-1}f)(s)ds+\left[E-\int\limits_a^t (Q^{-1}P)(s)ds\right]\int\limits_a^b G(a, s)f(s)ds.$$

Следовательно, $G\mathscr{F}_C x=VQ^{-1}\mathscr{F}_C x+[E-VQ^{-1}P]\int\limits_a^b G(a, s)(\mathscr{F}_C x)(s)ds$,

и так как второй оператор в правой части является конечномерным, остается убедиться в полной непрерывности оператора $VQ^{-1}\mathscr{F}_C$. Равностепенная непрерывность функций из множества $VQ^{-1}\mathscr{F}_C\{x\in C^n : \|x\|_C\leqslant \leqslant r\}$ следует из неравенства $|(\mathscr{F}_C x)(t)|\leqslant u_r(t)$, $u_r\in L_1^1$ регулярности оператора Q^{-1} и свойства абсолютной непрерывности интеграла Лебега. Итак, в уравнении (3) оператор $A_C : [0, 1]\times C^n\to C^n$ вполне непрерывен. Остается воспользоваться теоремой Лере — Шаудера и заметить, что всякое решение уравнения (3) принадлежит пространству D_1^n и является решением уравнения (2).

Замечание. В случае, когда оператор $Q : L_p^n\to L_p^n$ обратим, а оператор $\mathscr{F}_C : C^n\to L_p^n$ ограничен на каждом шаре, оценка $\|x^\lambda\|_{D_p}\leqslant d< <\infty$ имеет место, если установлено, что $\|x^\lambda\|_C\leqslant c<\infty$.

Это следует из неравенства $\|\dot{x}\|_{L_p}\leqslant\|Q^{-1}\|\cdot\|\mathscr{F}_C x\|_{L_p}+\|Q^{-1}\|\times \times\|P(\cdot)x(a)\|_{L_p}$.

§ 3. АСИМПТОТИЧЕСКИ ЛИНЕЙНАЯ КРАЕВАЯ ЗАДАЧА

Получение априорных оценок, как правило, составляет основную трудность в исследовании вопроса о разрешимости краевой задачи, причем способ их получения зависит от вида краевых условий. Исключением из этого правила можно считать асимптотически линейные краевые задачи — задачи (1) в случае, когда нелинейности $\mathscr{F}$ и φ подчинены условию

$$\lim_{\|x\|_{D_p}\to\infty}\frac{\|\mathscr{F}x\|_{L_p}}{\|x\|_{D_p}}=0, \quad \lim_{\|x\|_{D_p}\to\infty}\frac{|\varphi x|}{\|x\|_{D_p}}=0. \tag{5}$$

Теорема 2. *Пусть выполнены условия а) или б) теоремы 1. Пусть, далее, линейная задача $\mathscr{L}x=0$, $lx=0$ имеет только тривиальное решение, а нелинейные операторы $\mathscr{F}$ и φ удовлетворяют условию (5). Тогда задача (1) имеет по крайней мере одно решение $x\in D_p^n$.*

Доказательство. Как и в условиях предыдущей теоремы, задача (1_λ) эквивалентна уравнению с вполне непрерывным оператором: уравнению (2) в случае а) и уравнению (3) в случае б). Остается получить априорную оценку. В том и в другом случае легко видеть, что для любого решения x^λ задачи (1_λ) выполняется неравенство $\|x^\lambda\|_{D_p}\leqslant \leqslant\|X\|\cdot|\varphi x^\lambda|+\|G\|\cdot\|\mathscr{F}x^\lambda\|_{L_p}$, где $\|X\|$ — норма оператора умножения на фундаментальную матрицу X, как оператора из R^n в D_p^n. Из этого неравенства вытекает наличие общей априорной оценки $\|x^\lambda\|_{D_p}\leqslant d<\infty$. Остается заметить, что в случае б) при $p=1$ имеем $\|x^\lambda\|_C\leqslant\|x^\lambda\|_{D_1}\leqslant d$.

Отметим, что для обыкновенных дифференциальных уравнений тео-

рема 2 содержит ряд известных результатов о разрешимости краевых задач с ограниченными нелинейностями (см., например, [8], с. 25, 31; [9]).

§ 4. АПРИОРНЫЕ НЕРАВЕНСТВА И АПРИОРНЫЕ ОЦЕНКИ

В случае, когда условия (5) не выполняются, одна из возможностей исследования разрешимости задачи (1) связана с использованием априорных неравенств вида

$$|\dot{x}(t)| \leqslant m(t, |x(a)|), \quad t \in [a, b], \tag{6}$$

устанавливаемых для возможных решений уравнения $\mathscr{L}x = \mathscr{F}x$. В названии этого неравенства слово «априорное» несет такую же смысловую нагрузку, как в названии «априорная оценка», т. е. требование выполнения неравенства (6) не содержит предположения о существовании решений уравнения $\mathscr{L}x = \mathscr{F}x$, а означает, что это уравнение не должно иметь решений, не удовлетворяющих такому неравенству. Ниже рассмотрим примеры использования априорных неравенств (6) как источника априорных оценок решений краевых задач (1).

Рассмотрим задачу

$$\mathscr{L}x = \mathscr{F}x, \quad x(a) = \varphi x \tag{7}$$

в предположении, что выполнены условия а) или б) теоремы 1.

Теорема 3. *Пусть априорное неравенство (6) выполняется почти всюду на $[a, b]$ для всех решений x^λ всех уравнений $\mathscr{L}x = \lambda\mathscr{F}x$, $\lambda \in [0, 1]$, причем функция $m : [a, b] \times [0, \infty) \to [0, \infty)$ не убывает по второму аргументу и $m(\cdot, \tau) \in L^1_p$ для любого τ. Пусть далее $\psi : R^1 \times L^1_p \to R^1$ — такой неубывающий по второму аргументу функционал, что $|\varphi x| \leqslant \psi(|x(a)|, |\dot{x}|)$ $\forall x \in D^n_p$, и множество положительных решений скалярного неравенства $\xi \leqslant \psi(\xi, m(\cdot, \xi))$ ограничено. Тогда задача (7) имеет по крайней мере одно решение $x \in D^n_p$.*

Теорема 4. *Пусть вектор-функционал φ ограничен: $|\varphi x| \leqslant r$ $\forall x \in D^n_p$. Пусть, далее, априорное неравенство (6) выполняется почти всюду на $[a, b]$ для всех решений x^λ всех уравнений $\mathscr{L}x = \lambda\mathscr{F}x$, $\lambda \in [0, 1]$, причем функция $m : [a, b] \times [0, r] \to [0, \infty)$ удовлетворяет условию $\mu = \int_a^b \{\sup_{s \in [0, r]} m(t, s)\}^p dt < \infty$. Тогда задача (7) имеет по крайней мере одно решение $x \in D^n_p$.*

Для доказательства этих утверждений в силу теоремы 1 достаточно установить наличие общей априорной оценки всех решений задач $\mathscr{L}x = \lambda\mathscr{F}x$, $x(a) = \lambda\varphi x$. В условиях теоремы 3 для $|x^\lambda(a)|$ имеем $|x^\lambda(a)| \leqslant \psi(|x^\lambda(a)|, m(\cdot, |x^\lambda(a)|))$. Отсюда следует, что $|x^\lambda(a)| \leqslant \delta < \infty$. Таким образом, $\|x^\lambda\|_{D_p} \leqslant d = \delta + (b-a)^{\frac{p-1}{p}} \|m(\cdot, \delta)\|_{L_p} < \infty$. В условиях теоремы 4 имеет место оценка $\|x^\lambda\|_{D_p} \leqslant d = r + (b-a)^{\frac{p-1}{p}} \mu^{\frac{1}{p}} < \infty$.

В приводимом ниже примере условия разрешимости краевой задачи получаются с помощью теоремы 4.

Пример 1. Рассмотрим скалярную краевую задачу для уравнения Риккати

$$\dot{x} = \rho(t) + q(t)x^2, \quad t \in [0, 1]; \quad x(0) = \alpha\left\{1 + \frac{1}{1 + \int_0^1 x^2(s)\,ds}\right\}, \tag{8}$$

где функции ρ и q суммируемы на отрезке $[0, 1]$, $\alpha = \text{const}$.

Обозначим $\Theta[x(0)] = |x(0)| + \int_0^1 |\rho(s)|\,ds$. При условии $\Theta[x(0)] \times \times \int_0^1 |q(s)|\,ds < 1$ для всех решений уравнения $\dot{x} = \lambda\{\rho(t) + q(t)x^2\}$, $\lambda \in [0, 1]$, определенных на отрезке $[0, 1]$, имеет место неравенство

$$|x(t)| \leqslant \frac{\Theta[x(0)]}{1 - \Theta[x(0)] \int_0^1 |q(s)|\,ds}, \quad t \in [0, 1].$$

Следовательно,

$$|\dot{x}(t)| \leqslant m(t, |x(0)|) \equiv |\rho(t)| + |q(t)| \left\{ \frac{\Theta[x(0)]}{1 - \Theta[x(0)] \int_0^1 |q(s)|\,ds} \right\}^2.$$

Функция m в данном случае определена по второму аргументу на промежутке $[0, c)$, где $c = \left\{ \int_0^1 |q(s)|\,ds \right\}^{-1} - \int_0^1 |\rho(s)|\,ds$. Так как из краевого условия следует, что $|x(0)| \leqslant 2|\alpha|$, то условия теоремы 4 выполнены, если $2|\alpha| < c$, или $\Theta[2\alpha] \int_0^1 |q(s)|\,ds < 1$. Выполнение этого неравенства является условием разрешимости задачи (8). Отметим, что стандартное применение принципа Шаудера к этой задаче приводит к такому условию разрешимости: $\Theta[2\alpha] \int_0^1 |q(s)|\,ds \leqslant \frac{1}{4}$.

В предыдущих рассуждениях неравенства вида (6) использовались для получения априорных оценок в случае, когда краевые условия разрешены относительно $x(a)$. Напомним в связи с этим, что всякий линейный ограниченный вектор-функционал $l : D_p^n \to R^n$ имеет представление

$$lx = \Psi x(a) + \int_a^b \Phi(s)\dot{x}(s)\,ds,$$

где Ψ — постоянная $n \times n$-матрица, а столбцы матрицы Φ принадлежат пространству $L_{p'}^n$. Таким образом, при условии $\det \Psi \neq 0$ краевые условия $lx = \varphi x$ допускают эквивалентную запись $x(a) = \varphi_1 x \equiv \Psi^{-1}\varphi x - - \int_a^b \Psi^{-1}\Phi(s)\dot{x}(s)\,ds$. Условие $\det \Psi \neq 0$ может оказаться слишком жестким, в частности, для периодических краевых условий $x(a) - x(b) = 0$ матрица Ψ оказывается нулевой. Рассмотрим случай, когда существует возможность получать априорную информацию о начальном значении решения задачи, не разрешая краевые условия относительно $x(a)$. Пусть краевая задача $\mathscr{L}x = 0$, $lx = 0$ имеет только тривиальное решение. В этом случае если $x(t)$ — решение задачи (1), то $x(a) = X(a)\varphi x + + \int_a^b G(a, s)(\mathscr{F}x)(s)\,ds$ (см. (2)). Это представление вместе с неравен-

ством (6) дает возможность получить априорную оценку решений задачи (см. доказательство теоремы 3). Очевидно, здесь может потребоваться информация о матрицах $X(a)$ и $G(a, s)$. Так как фундаментальная матрица $X(t)$ и матрица Грина $G(t, s)$ известны не всегда, то представляют интерес уравнения, которые определяют нужные нам сечения $X(a)$ и $G(a, s)$. Такие уравнения могут оказаться удобным источником необходимой информации. Мы получим их с помощью задачи, сопряженной с линейной частью задачи (1).

Рассмотрим линейную краевую задачу

$$\mathscr{L}x \equiv Q\dot{x} + A(\cdot)x(a) = f, \quad lx \equiv \Psi x(a) + \int_a^b \Phi(s)\dot{x}(s)\,ds = \alpha. \tag{9}$$

По предположению она однозначно разрешима при любых $f \in L_p^n$ и $\alpha \in R^n$. Сопряженная задача (см. [10]) имеет вид

$$Q^*y + \beta\Phi(\cdot) = g, \quad \beta\Psi + \int_a^b y(s)A(s)\,ds = \gamma$$

и тоже однозначно разрешима. Таким образом, матричная задача

$$Q^*Y + B\Phi(\cdot) = 0, \quad B\Psi + \int_a^b Y(s)A(s)\,ds = E \tag{10}$$

имеет единственное решение — пару $\{Y, B\}$, где Y — $n\times n$-матрица со столбцами из $L_{p'}^n$, B — постоянная $n\times n$-матрица.

Запишем теперь задачу (9) в виде

$$Q\dot{x} = f - A(\cdot)x(a), \quad \int_a^b \Phi(s)\dot{x}(s)\,ds = \alpha - \Psi x(a).$$

Из разрешимости задачи (9) следует выполнение условия ортогональности

$$\int_a^b y(s)\{f(s) - A(s)x(a)\}\,ds + \beta\{\alpha - \Psi x(a)\} = 0, \tag{11}$$

где $\{y, \beta\}$ — произвольное решение задачи $Q^*y + \beta\Phi(\cdot) = 0$, являющейся однородной сопряженной задачей для задачи $Q\dot{x} = q$, $\int_a^b \Phi(s)\dot{x}(s)\,ds = \delta$, $q \in L_p^n$, $\delta \in R^n$. Таким образом, из равенства (11) для матричного решения задачи (10) получаем $\int_a^b Y(s)\{f(s) - A(s)x(a)\}\,ds + B\{\alpha - \Psi x(a)\} = 0$, или $\left\{\int_a^b Y(s)A(s)\,ds + B\Psi\right\}x(a) = \int_a^b Y(s)f(s)\,ds + B\alpha$, откуда $x(a) = \int_a^b Y(s)f(s)\,ds + B\alpha$. Для задачи (1) это означает следующее. Если задача (1) имеет решение $x(t)$, то $x(a) = B\varphi x + \int_a^b Y(s)(\mathscr{F}x)(s)\,ds$, где $\{Y, B\}$ — решение матричной задачи (10). Отметим, что явный вид оператора Q^* для уравнений с отклоняющимся аргументом, интегро-

дифференциальных уравнений и уравнений нейтрального типа выписан в работе [10].

Приведем простой пример, иллюстрирующий применение сопряженной задачи.

Пример 2. Рассмотрим периодическую задачу

$$\dot{x}+g(t)x(0)=\rho(t)+q(t)x^2, \quad t\in[0, 1]; \quad x(0)=x(1), \tag{12}$$

где функции g, ρ и q суммируемы на $[0, 1]$ и $\int\limits_0^1 g(t)dt\neq 0$. Линейная краевая задача здесь имеет вид $\dot{x}+g(t)x(0)=f(t)$, $\int\limits_0^1 \dot{x}(s)ds=\alpha$. Таким образом, $\Phi\equiv 1$, $\Psi\equiv 0$. Запишем сопряженную задачу (10): $y(t)+\beta=0$, $\int\limits_0^1 y(s)g(s)ds=1$. Единственное решение этой задачи: $y=\left\{\int\limits_0^1 g(s)ds\right\}^{-1}$, $\beta=-\left\{\int\limits_0^1 g(s)ds\right\}^{-1}$, поэтому если $x(t)$ — решение задачи (12), то $x(0)=\left\{\int\limits_0^1 g(s)ds\right\}^{-1}\int\limits_0^1 [\rho(s)+q(s)x^2(s)]ds$.

Отметим, что в этом примере такое выражение для $x(0)$ можно получить и непосредственно, интегрируя от 0 до 1 обе части уравнения и учитывая, что $\int\limits_0^1 \dot{x}(s)ds=0$.

Приведем еще пример, в котором применение априорных неравенств вида (6) дает более тонкий результат, чем стандартный прием с использованием функции Грина линейной задачи и применением принципа Шаудера.

Пример 3. Для задачи $\dot{x}+x(0)=-t+q(t)x^2$, $t\in[0, 1]$; $x(0)=x(1)$ использование априорного неравенства приводит к условию разрешимости $\int\limits_0^1 |q(s)|ds\leqslant\frac{10}{36}$, а непосредственное применение принципа Шаудера дает условие $\int\limits_0^1 |q(s)|ds\leqslant\frac{1}{4}$.

В заключение отметим, что априорные неравенства (6) приводят к условиям разрешимости краевой задачи $\mathscr{L}x=\mathscr{F}x$, $x(a)=\varphi x$ также в случае, когда корректно разрешима задача Коши $\mathscr{L}x=\mathscr{F}x$, $x(a)=\alpha$ (т. е. для каждого α из некоторой области $U\subset R^n$ задача имеет единственное решение $x_\alpha(t)=f(t, \alpha)$, которое непрерывно зависит от α). В таком случае вопрос о разрешимости краевой задачи сводится [11] к вопросу о разрешимости уравнения $\alpha=\Lambda(\alpha)\equiv\varphi(f(\cdot, \alpha))$ в конечномерном пространстве. Неравенства вида (6) позволяют находить инвариантные множества оператора Λ. Условия корректной разрешимости задачи Коши для функционально-дифференциальных уравнений получены в [11, 12]. Вопросы непрерывной зависимости решений краевых задач (1) от параметров рассмотрены в [13].

§ 5. ИСПОЛЬЗОВАНИЕ ФУНДАМЕНТАЛЬНОЙ МАТРИЦЫ ЛИНЕЙНОГО УРАВНЕНИЯ

Выше мы пользовались однозначной разрешимостью линейной части задачи (1): $\mathscr{L}x=f$, $lx=\alpha$. Здесь получим утверждение о разрешимости краевой задачи

$$\mathscr{L}x=\mathscr{F}x, \quad \varphi x=0, \tag{13}$$

которое позволит не выделять из краевых условий линейный вектор-функционал, обеспечивающий однозначную разрешимость соответствующей линейной задачи. Это утверждение существенно использует информацию о фундаментальной матрице уравнения $\mathscr{L}x=0$. Отметим, что для обыкновенных дифференциальных уравнений с непрерывными коэффициентами и краевых условий, определенных на пространстве C^n, аналогичное утверждение другим путем получено в работе [14].

Итак, рассмотрим задачу (13) в предположении, что уравнение $\mathscr{L}x=f$ разрешимо при любом $f\in L^n_p$. Напомним [1], что в этом случае уравнение $\mathscr{L}x=0$ имеет квадратную фундаментальную матрицу $X(t)$ размерности $n\times n$. Аналогом теоремы 1 для такой задачи является следующее утверждение.

Теорема 5. *Пусть выполнены условия $\mathscr{F}$) и φ) ($\mathscr{F}_C$), φ_C), Q) и оператор $\mathscr{F}_C : C^n\to L^n_p$ ограничен на каждом шаре) и, кроме того,*

1) существует такое открытое ограниченное множество $\Sigma\subset D^n_p$ ($\Sigma\subset C^n$), что для любого $\lambda\in[0, 1]$ любое решение x^λ задачи

$$\mathscr{L}x=\lambda\mathscr{F}x,\quad \varphi x=0,\quad \lambda\in[0, 1], \tag{13$_\lambda$}$$

не принадлежит границе множества Σ;

2) вращение $\gamma(\psi, \sigma)$ конечномерного векторного поля $\psi : \alpha\in R^n\to\varphi(X\cdot\alpha)\in R^n$ на границе области $\sigma=\{\alpha\in R^n : X\cdot\alpha\in\Sigma\}$ отлично от нуля. Тогда задача (13) имеет в Σ по крайней мере одно решение.

Доказательство. Рассмотрим сначала первый вариант: выполнены условия $\mathscr{F}$), φ) и Σ — подмножество пространства D^n_p. Обозначим через $l : D^n_p\to R^n$ линейный ограниченный вектор-функционал, удовлетворяющий условию $lX=E$ (существование такого вектор-функционала следует, например, из [15], с. 209). Задача (13$_\lambda$) эквивалентна уравнению $x=A(\lambda, x)\equiv X\cdot lx+X\cdot\varphi x+\lambda G\mathscr{F}x$. Здесь через X обозначен оператор умножения на фундаментальную матрицу $X(t)$, действующий из R^n в D^n_p; G — оператор Грина задачи $\mathscr{L}x=f$, $lx=0$. Вполне непрерывные векторные поля $I-A(1, \cdot)\equiv I-Xl-X\varphi-G\mathscr{F}$ и $I-A(0, \cdot)\equiv I-Xl-X\varphi$ гомотопны (соединяются невырожденной в силу условия 1) компактной деформацией). Следовательно, $\gamma(I-A(1, \cdot), \Sigma)=\gamma(I-A(0, \cdot), \Sigma)=\gamma(I-Xl-X\varphi, \Sigma)$. В силу теоремы 27.1 книги [16] имеем $\gamma(I-Xl-X\varphi, \Sigma)=\gamma(I-Xl-X\varphi, \ker\mathscr{L}\cap\Sigma; \ker\mathscr{L})$. Здесь $\ker\mathscr{L}=\{x\in D^n_p : \mathscr{L}x=0\}$. Соотношения $x=X\cdot\alpha$ и $\alpha=lx$ устанавливают линейный гомеоморфизм между областями $\{\ker\mathscr{L}\cap\Sigma\}\subset D^n_p$ и $\sigma\subset R^n$, поэтому в силу теоремы 26.4 [16] получаем

$$\gamma(I-Xl-X\varphi, \ker\mathscr{L}\cap\Sigma; \ker\mathscr{L})=\gamma(I-l[Xl]X-l[X\varphi]X, \sigma; R^n)=$$
$$=\gamma(-\varphi X, \sigma; R^n)\neq 0.$$

Таким образом, $\gamma(I-A(1, \cdot), \Sigma)\neq 0$. Отсюда в силу теоремы 20.5 [16] задача (13) имеет в Σ по крайней мере одно решение.

Обратимся теперь ко второму варианту утверждения: выполнены условия $\mathscr{F}_C$), φ_C), Q), оператор $\mathscr{F}_C : C^n\to L^n_p$ ограничен на каждом шаре и Σ — подмножество пространства C^n. В этом случае ход рассуждений повторяется со следующими изменениями. Вместо вектор-функционала $l : D^n_p\to R^n$ возьмем линейный ограниченный вектор-функционал $l_C : C^n\to R^n$ такой, что $l_CX=E$, и рассмотрим в пространстве C^n вполне непрерывные гомотопные поля $I-A_C(1, \cdot)\equiv I-Xl_C-X\varphi_C-G\mathscr{F}_C$ и $I-A_C(0, \cdot)\equiv I-Xl_C-X\varphi_C$.

Напомним, что полная непрерывность оператора $G\mathscr{F}_C : C^n\to C^n$ для случая $p=1$ установлена при доказательстве теоремы 1. В случае $p>1$ полная непрерывность оператора $G\mathscr{F}_C : C^n\to C^n$ устанавливается следующим образом. В [17] показано, что оператор Грина представим в виде суммы конечномерного оператора и оператора $\Gamma=VP$ ($P : L^n_p\to$

$\to L_p^n$ — линейный ограниченный оператор). Таким образом, достаточно убедиться в полной непрерывности оператора $\Gamma\mathcal{F}_C : C^n \to C^n$. Она следует из того, что оператор V отображает каждое ограниченное множество пространства L_p^n в относительно компактное подмножество пространства C^n. Теорема доказана.

Нетрудно видеть, что выполнение условия 2) не зависит от выбора фундаментальной матрицы $X(t)$.

Сформулируем следствие, вытекающее из теоремы 5 для скалярного случая ($n=1$). Зафиксируем некоторое нетривиальное решение уравнения $\mathcal{L}x=0$ и обозначим его через $v(t)$.

Следствие. *Пусть выполнены условия $\mathcal{F}$) и φ) ($\mathcal{F}_C$), φ_C), Q) и оператор $\mathcal{F}_C : C^1 \to L_p^1$ ограничен на каждом шаре). Пусть далее для всех решений x^λ всех задач (13_λ) имеет место общая априорная оценка $\|x^\lambda\|_{D_p} \leqslant d < \infty$ ($\|x^\lambda\|_C \leqslant d < \infty$) и для некоторого $c > \dfrac{d}{\|v\|_{D_p}}$ $\left(c > \dfrac{d}{\|v\|_C}\right)$ выполнено условие $\psi(-c)\psi(c) < 0$, где $\psi(\tau) = \varphi(\tau v(\cdot))$. Тогда скалярная задача (13) имеет по крайней мере одно решение.*

Для доказательства достаточно положить $\Sigma = \{x \in D_p^1 : \|x\|_{D_p} < c\|v\|_{D_p}\}$ ($\Sigma = \{x \in C^1 : \|x\|_C < c\|v\|_C\}$).

Пример 4. Рассмотрим уравнение

$$\dot{x} = \rho(t) + q(t)x^3, \quad t \in [0, 1], \tag{14}$$

с краевыми условиями

$$\left\{\int_0^1 \dot{x}(s)\,ds\right\}^3 + \int_0^1 \dot{x}(s)\,ds = x^5(0)\left\{\int_0^1 \dot{x}(s)\,ds\right\}^2 + x^5(0) + x^3(0) + 1, \tag{15}$$

не разрешенными относительно $x(0)$. Здесь функции ρ и q суммируемы на $[0, 1]$ и $q(t) \leqslant 0$ почти всюду. Для всех решений всех уравнений

$$\dot{x} = \lambda\{\rho(t) + q(t)x^3\}, \quad t \in [0, 1], \quad \lambda \in [0, 1], \tag{16}$$

справедливо неравенство

$$\int_0^1 |\dot{x}(s)|\,ds \leqslant (A + B|x(0)|)^3, \tag{17}$$

где A и B — некоторые неотрицательные числа (способы получения таких неравенств рассматриваются в следующем параграфе). Обозначим $\alpha = x(0)$, $\beta = \int_0^1 \dot{x}(s)\,ds$. Таким образом, каждому решению x уравнения (16) соответствует точка плоскости с координатами α, β. В силу (17) множество таких точек содержится в множестве $U = \{(\alpha, \beta) \in R^2 : |\beta| \leqslant (A + B|\alpha|)^3\}$. Запишем теперь условие (15) в виде

$$\beta = \alpha^5 + \frac{\alpha^3 + 1}{\beta^2 + 1}. \tag{18}$$

Отсюда следует, что точки кривой, определяемой уравнением (18), попадают в множество U разве лишь в некоторой ограниченной окрестности начала координат. Так как любое решение задачи (16), (15) должно удовлетворять одновременно неравенству (17) и равенству (18), то ясно, что существует общая априорная оценка для всех решений задачи (16), (15). Таким образом, остается проверить только последнее условие следствия из теоремы 5. Положим $v(t) \equiv 1$, тогда функция ψ

имеет вид $\psi(\tau)=-\tau^5-\tau^3-1$. Существование подходящего числа c следует из нечетности степени многочлена $\psi(\tau)$, поэтому задача (14), (15) имеет решение $x\in D_1^1$. Заметим, что если ρ, $q\in L_p^1$, то очевидно $x\in D_p^1$.

§ 6. НЕКОТОРЫЕ СПОСОБЫ ПОЛУЧЕНИЯ АПРИОРНЫХ НЕРАВЕНСТВ

Рассмотрим сначала способ получения априорных неравенств вида (6) для решений функционально-дифференциального уравнения

$$\dot{x}=\mathcal{F}x \tag{19}$$

в предположении, что оператор $\mathcal{F}: D_p^n\to L_p^n$ удовлетворяет двустороннему неравенству

$$\forall x\in D_p^n\ |(\mathcal{F}x)(t)|\leqslant(B\Omega Mx)(t),\quad t\in[a,\ b] \tag{20}$$

Здесь $B: L_p^1\to L_p^1$ — линейный положительный вольтерров оператор (см., например, [18; 19, с. 194]); $\Omega: L_r^1\to L_p^1$ — оператор Немыцкого: $(\Omega z)(t)=\omega(t, z(t))$, порождаемый функцией $\omega: [a, b]\times[0, \infty)\to[0, \infty)$, непрерывной и неубывающей по второму аргументу; оператор $M: D_p^n\to L_r^1$ определяется равенством $(Mx)(t)=q(t)|x(a)|+u(t)\int\limits_a^t v(s)\times|\dot{x}(s)|ds$, где $v\in L_{p'}^1$, u, $q\in L_r^1$ неотрицательны, причем почти всюду на $[a, b]$ выполняется неравенство $q(t)\leqslant ku(t)$, $k=\text{const}\geqslant 0$.

Отметим, что если в уравнении $\mathcal{L}x=\mathcal{F}x$ оператор $\mathcal{F}$ удовлетворяет условию (20), а оператор $Q=\mathcal{L}V$ обратим, причем $Q^{-1}: L_p^n\to L_p^n$ — регулярный вольтерров оператор (это всегда так для обыкновенных дифференциальных уравнений, дифференциальных уравнений с запаздывающим аргументом и широкого класса интегро-дифференциальных уравнений Вольтерра), то уравнение $\mathcal{L}x=\mathcal{F}x$ можно записать в виде $\dot{x}=\mathcal{F}_1x\equiv Q^{-1}\mathcal{F}x-Q^{-1}A(\cdot)x(a)$ с оператором $\mathcal{F}_1$, удовлетворяющим условию (20).

Операторам B, Ω и M поставим в соответствие обыкновенное дифференциальное уравнение $\dot{y}=F(t, y)\equiv\varkappa(t)\omega(t, u(t)y)$, где $\varkappa(t)=\frac{d}{dt}\int\limits_a^b v(s)(B\chi_t)(s)ds$, χ_t — характеристическая функция отрезка $[a, t]$. Решая это уравнение или оценивая его решения, можно получать априорные неравенства для решений уравнения (19). А именно имеет место

Теорема 6. *Пусть $\beta\geqslant 0$; $y(t, \beta)$, $t\in[a, b]$,— верхнее решение задачи Коши*

$$\dot{y}=F(t, y),\quad y(a)=\beta. \tag{21}$$

Тогда если x — решение уравнения (19) и $|x(a)|\leqslant\beta/k$, то

$$|\dot{x}(t)|\leqslant(B\Omega z)(t),\quad t\in[a, b], \tag{22}$$

где $z(t)=u(t)y(t, k|x(a)|)$.

Доказательство. Обозначим $z(t)=(Mx)(t)$. Легко проверить, что справедливо интегро-функциональное неравенство $z(t)\leqslant u(t)\times\int\limits_a^t v(s)(B\Omega z)(s)ds+q(t)|x(a)|$. Далее для $\xi(t)=\frac{z(t)}{u(t)}$ имеем $\xi(t)\leqslant\int\limits_a^t v(s)[B\Omega(u\cdot\xi)](s)ds+k|x(a)|$. Отсюда, пользуясь леммой 3

[11], получаем интегральное неравенство $\xi(t)\leqslant\int\limits_a^t \varkappa(s)\omega(s, u(s)\xi(s))\times$ $\times ds+k|x(a)|$.

Обозначим выражение в правой части этого неравенства через $w(t)$. Очевидно, $w\in D_1^1$, $\dot{w}=F(t, \xi)\leqslant F(t, w)$ и $w(a)=k|x(a)|$. В силу теоремы о дифференциальном неравенстве (см., например, [20; 21, с. 48]) выполняется неравенство $w(t)\leqslant y(t, \beta)$, если $\beta\geqslant k|x(a)|$. Таким образом, $\xi(t)=\dfrac{z(t)}{u(t)}\leqslant y(t, k|x(a)|)$ и теорема доказана.

Легко видеть, что если $\omega(t, z)=\rho(t)+\mu z$, то $y(t, \beta)=e(t)\beta+$ $+\int\limits_a^t \dfrac{e(t)}{e(s)}\varkappa(s)\rho(s)ds$, где $e(t)=\exp\left\{\mu\int\limits_a^t \varkappa(s)u(s)ds\right\}$. Если $\omega(t, z)=\rho(t)+\mu z^\gamma$, $\gamma\neq 1$, то, обозначив $d=\int\limits_a^b \varkappa(s)\rho(s)ds$ и предположив, что $(d+\beta)^{1-\gamma}+(1-\gamma)\mu\int\limits_a^b \varkappa(s)u^\gamma(s)ds>0$, получим $y(t, \beta)\leqslant$ $\leqslant\left\{(d+\beta)^{1-\gamma}+(1-\gamma)\mu\int\limits_a^t \varkappa(s)u^\gamma(s)ds\right\}^{1/(1-\gamma)}$.

Сформулируем при помощи теоремы 6 и теоремы 3 признак разрешимости задачи

$$\dot{x}=\mathcal{F}x, \quad x(a)=\varphi x \tag{23}$$

в предположении, что выполнены условия $\mathcal{F}$) и φ) или условия $\mathcal{F}_C$) и φ_C).

Теорема 7. *Пусть оператор $\mathcal{F}$ удовлетворяет условию (20), а $\psi: R^1\times L_p^1\to R^1$ — такой неубывающий по второму аргументу функционал, что $|\varphi x|\leqslant\psi(|x(a)|, |\dot{x}|)$ $\forall x\in D_p^n$ Пусть, далее, задача (21) при любом $\beta\geqslant 0$ имеет верхнее решение $y(t, \beta)$, $t\in[a, b]$, и множество положительных решений скалярного неравенства $\xi\leqslant\psi(\xi, B\Omega\mu y(\cdot, k\xi))$ ограничено. Тогда задача (23) имеет по крайней мере одно решение $x\in D_p^n$.*

Следствие. *Пусть оператор $\mathcal{F}: C^n\to L_p^n$ непрерывен и удовлетворяет условию (20), где $\omega(t, z)=\rho(t)+\mu z^\gamma$, $\rho\in L_p^1$; вектор-функционал $\varphi: D_p^n\to R^n$ непрерывен и удовлетворяет неравенству $\forall x\in D_p^n$ $|\varphi x|\leqslant c|x(a)|^{p_1}+d\left\{\int\limits_a^b |\dot{x}(s)|^{p_2}ds\right\}^{p_3}$, где c, d, p_1, p_2, p_3 — неотрицательные числа. Пусть, далее, выполнены неравенства $\gamma<1$, $p>1$, $p_1<1$, $p_2\leqslant p$, $p_2\cdot p_3\cdot\gamma<1$. Тогда задача (23) имеет по крайней мере одно решение $x\in D_p^n$.*

Другой способ получения априорных неравенств основан на односторонних неравенствах, которые являются модификацией неравенств, применяемых при исследовании краевых задач для обыкновенных дифференциальных уравнений (см. [21, 22]).

Обозначим через α_i i-ю компоненту вектора $\alpha=\operatorname{col}\{\alpha_1, \ldots, \alpha_n\}$. Для определенности нормы $|\cdot|$ и $\|\cdot\|_C$ определим равенствами

$$|\alpha|=\{\sum_{i=1}^n \alpha_i^2\}^{1/2}, \quad \|x\|_C=\{\sum_{i=1}^n (\max_{t\in[a, b]}|x_i(t)|)^2\}^{1/2}.$$

Приведем схему получения априорного неравенства $|\dot{x}(t)|\leqslant m(t, |x(a)|)$ для возможных решений уравнения $\dot{x}=\mathcal{F}x$ в предположении,

что для любого $x \in D_p^n$ почти всюду на $[a, b]$ выполняются неравенства

$$x_i(t)\,(\mathcal{F}_i x)\,(t) \leqslant \sum_{j=1}^{n} \gamma_{ij}(t)\,\|x_j\|_C^2 + \omega_i(t, \|x\|_C), \quad i=1, \ldots, n. \tag{24}$$

Здесь $\gamma_{ij} \in L_1^1$ — неотрицательные функции, $\omega_i : [a, b] \times [0, \infty) \to [0, \infty)$, $\int_a^b \omega_i(t, z)\,dt < \infty \ \forall z \geqslant 0$, $i=1, \ldots, n$.

Для каждого решения x уравнения $\dot{x} = \mathcal{F}x$ имеем $x_i^2(\xi) \leqslant x_i^2(a) + \sum_{j=1}^{n} 2\int_a^{\xi} \gamma_{ij}(t)\,dt\,\|x_j\|_C^2 + 2\int_a^{\xi} \omega_i(t, \|x\|_C)\,dt$, $\xi \in [a, b]$, $i=1, \ldots, n$. Отсюда

$$x_i^2(\xi) \leqslant x_i^2(a) + \sum_{j=1}^{n} 2\int_a^b \gamma_{ij}(t)\,dt\,\|x_j\|_C^2 + 2\int_a^b \omega_i(t, \|x\|_C)\,dt, \quad i=1, \ldots, n. \tag{25}$$

Обозначим $\nu[x] = \operatorname{col}\{\|x_1\|_C^2, \ldots, \|x_n\|_C^2\}$; $\Gamma = (\Gamma_{ij})_1^n$, $\Gamma_{ij} = 2\int_a^b \gamma_{ij}(t)\,dt$; $\Omega(z) = \operatorname{col}\{\Omega_1(z), \ldots, \Omega_n(z)\}$, $\Omega_i(z) = 2\int_a^b \omega_i(t, z)\,dt$.

Из неравенств (25) следует, что для всех решений x уравнения $\dot{x} = \mathcal{F}x$ выполняется априорное неравенство

$$\nu[x] \leqslant \nu[x(a)] + \Gamma\nu[x] + \Omega(\|x\|_C). \tag{26}$$

Если все собственные числа матрицы Γ по модулю меньше единицы, то $\nu[x] \leqslant (E-\Gamma)^{-1}\{\nu[x(a)] + \Omega(\|x\|_C)\}$.

Обозначим элементы матрицы $(E-\Gamma)^{-1}$ через B_{ij}, тогда $\|x_i\|_C^2 \leqslant \sum_{j=1}^{n} B_{ij}\{|x_j(a)|^2 + \Omega_j(\|x\|_C)\}$, $i=1, \ldots, n$. Отсюда $\|x\|_C^2 \leqslant \sum_{i=1}^{n}\sum_{j=1}^{n} B_{ij}\{|x_j(a)|^2 + \Omega_j(\|x\|_C)\}$.

Пусть $\bar{z}(\tau)$ — верхняя граница множества положительных решений скалярного неравенства $z^2 \leqslant \tau^2\{\sum_{i=1}^{n} \max_j B_{ij}\} + \sum_{i=1}^{n}\sum_{j=1}^{n} B_{ij}\Omega_j(z)$. Тогда $\|x\|_C \leqslant \bar{z}(|x(a)|)$ и $|\dot{x}(t)| \leqslant m(t, |x(a)|) = \sup\{|(\mathcal{F}y)(t)| : y \in D_p^n;\ \|y\|_C \leqslant \bar{z}(|x(a)|)\}$.

В заключение отметим, что априорное неравенство (26) тоже может служить источником априорной оценки решений краевой задачи. В качестве примера приведем утверждение о разрешимости задачи (23), в условиях которого априорная оценка получается с помощью неравенства (26).

Теорема 8. *Пусть выполнены условия $\mathcal{F}$) и φ) или условия $\mathcal{F}_C$) и φ_C); оператор $\mathcal{F}$ удовлетворяет условию*

$$\text{для любого } r \geqslant 0 \ \sup\{\|\mathcal{F}x\|_{L_p} : x \in D_p^n,\ \|x\|_C \leqslant r\} < \infty; \tag{27}$$

существует такое $M \geqslant 0$, что для всех $x \in D_p^n$ таких, что $\|x\|_C > M$, почти всюду на $[a, b]$ выполняются неравенства (24) и неравенства $[\varphi_i x]^2 \leqslant \sum_{j=1}^{n} \delta_{ij}\|x_j\|_C^2 + \rho_i(\|x\|_C)$, $i=1, \ldots, n$, где $\delta_{ij} \geqslant 0$, $\rho_i : [0, \infty) \to [0, \infty)$; все собственные числа матрицы $\Delta = (\Delta_{ij})_1^n$, $\Delta_{ij} = \varepsilon_{ij} + 2\int_a^b \gamma_{ij}(t)\,dt$ по модулю меньше единицы; $\lim_{z\to+\infty} \frac{1}{z^2}\int_a^b \omega_i(t, z)\,dt = 0$, $\lim_{z\to+\infty} \frac{1}{z^2}\rho_i(z) = 0$,

$i=1, \ldots, n$. *Тогда задача (23) имеет по крайней мере одно решение* $x \in D_p^n$.

Доказательство. Для любого решения x задачи $\dot{x}=\lambda\mathcal{F}x$, $x(a)=\lambda\varphi x$, $\lambda\in[0, 1]$, удовлетворяющего условию $\|x\|_C>M$, выполняется неравенство $\nu[x]\leqslant\nu[\varphi x]+\Gamma\nu[x]+\Omega(\|x\|_C)$ (см. (26)), откуда $\nu[x]\leqslant(E-\Delta)^{-1}\{\mathcal{P}(\|x\|_C)+\Omega(\|x\|_C)\}$, где $\mathcal{P}=\operatorname{col}\{\rho_1, \ldots, \rho_n\}$. Отсюда вытекает существование такого $M_1>0$, что $\|x\|_C\leqslant M_1$. Вместе с условием (27) это дает априорную оценку $\|x\|_{D_p}\leqslant d<\infty$. Остается воспользоваться теоремой 1.

§ 7. ОБ УРАВНЕНИЯХ НЕЙТРАЛЬНОГО ТИПА

В приведенных теоремах о разрешимости краевой задачи (1) можно выделить два основных условия относительно уравнения $\mathcal{L}x=\mathcal{F}x$: наличие у оператора $\mathcal{F}$ свойства $\mathcal{F}$) или $\mathcal{F}_C$) и наличие соответствующего априорного неравенства для всех решений этого уравнения. Здесь мы обсудим некоторые вопросы, связанные с применением предыдущих результатов к исследованию уравнения

$$\dot{x}=\mathcal{N}x, \tag{28}$$

в котором оператор $\mathcal{N}: D_p^n\to L_p^n$, вообще говоря, не обладает свойством полной непрерывности и не допускает распространения до непрерывного оператора, действующего из C^n в L_p^n. Так как получение априорных неравенств не связано с наличием у оператора $\mathcal{N}$ свойства $\mathcal{F}$) или $\mathcal{F}_C$), то одна из возможностей применения в такой ситуации предыдущих результатов связана с установлением факта существования такого уравнения

$$\dot{x}=\mathcal{F}x, \tag{29}$$

что 1) каждое его решение является решением уравнения (28); 2) оператор $\mathcal{F}$ удовлетворяет условию $\mathcal{F}$) или $\mathcal{F}_C$). Если такой факт установлен, то, располагая априорным неравенством для всех решений уравнения (28), мы будем иметь его и для всех решений уравнения (29), что позволит получить условия разрешимости краевой задачи для этого уравнения, а значит, и для исходного уравнения (28). Подчеркнем, что построение оператора $\mathcal{F}$ не является необходимым: важен только факт приводимости уравнения (28) к виду (29).

Типичным представителем уравнения (28) является так называемое уравнение нейтрального типа

$$\dot{x}=f(t, Tx, S\dot{x}), \quad t\in[a, b]. \tag{30}$$

Здесь функция $f: [a, b]\times R^n\times R^n\to R^n$ удовлетворяет условиям Каратеодори и неравенству

$$|f(t, z_1, z_2)|\leqslant\omega(t, |z_1|)+\nu|z_2|, \tag{31}$$

где $\nu=\text{const}\geqslant 0$, а непрерывная и неубывающая по второму аргументу функция $\omega: [a, b]\times[0, \infty)\to[0, \infty)$ порождает оператор Немыцкого Ω: $(\Omega z)(t)=\omega(t, z(t))$, действующий из L_r^1 в L_p^1. Оператор $T: D_p^n\to L_r^n$ предполагается вполне непрерывным. Оператор $S: L_p^n\to L_p^n$ определяется равенством

$$(Sz)(t)=\begin{cases} z[g(t)] & \text{при } g(t)\in[a, b], \\ 0 & \text{при } g(t)\notin[a, b]; \end{cases} \tag{32}$$

функция $g: [a, b]\to R^1$ измерима, $g(t)\leqslant t$ почти всюду на $[a, b]$, $\operatorname{mes} g^{-1}(e)=0$ для любого множества $e\subset[a, b]$ нулевой лебеговой меры и $\sup\limits_{e\subset[a, b]}\dfrac{\operatorname{mes} g^{-1}(e)}{\operatorname{mes} e}<\infty$, где верхняя грань берется по всем таким

подмножествам e отрезка $[a, b]$, что $\operatorname{mes} e>0$ (последнее условие выполнено, если, например, отображение g взаимно-однозначно и производная $\frac{d}{dt} g^{-1}(t)$ ограничена в существенном на $[a, b]\cap g([a, b])$, см. [23]). Как показано в [23], оператор $S: L_p^n \to L_p^n$ не может быть вполне непрерывным, если он отличен от нулевого оператора.

Приводимость уравнения (30) к уравнению (29) имеет место, например, в следующей ситуации (см. [11]). Пусть существует такой непрерывный оператор $H: L_r^n \to L_p^n$, что $y=Hz$ является решением уравнения $y=f(\cdot, z, Sy)$ для любого $z\in L_r^n$. В этом случае каждое решение уравнения $\dot{x}=HTx$ является решением уравнения (30). Таким образом, здесь $\mathcal{F}=HT$. Отметим, что свойством полной непрерывности обладает, в частности, линейный оператор $T: D_p^n \to L_r^n$, $r<\infty$, определяемый равенством $(Tx)(t)=\int_a^b d_s R(t, s) x(s)$ (см. [13, 24, 25]). Эффективные достаточные условия существования оператора H приводятся в работе [11].

Покажем теперь, каким образом для решений уравнения (30) можно получить априорное неравенство (6). Пусть спектральный радиус скалярного оператора $\bar{S}: L_p^1 \to L_p^1$, действующего по правилу (32), меньше $1/\nu$, а оператор T удовлетворяет условию $|Tx|\leqslant Mx$. В силу (31) имеем $|\dot{x}|\leqslant\omega(\cdot, |Tx|)+\nu|S\dot{x}|\leqslant\omega(\cdot, |Tx|)+\nu\bar{S}|\dot{x}|$, или $|\dot{x}|\leqslant(I-\nu\bar{S})^{-1}\omega(\cdot, |Tx|)\leqslant(I-\nu\bar{S})^{-1}\Omega Mx$. Теперь для получения априорного неравенства (6) можно воспользоваться теоремой 6, полагая $B=(I-\nu\bar{S})^{-1}$. Оценки спектрального радиуса оператора $\bar{S}: L_p^1 \to L_p^1$ можно найти в работе [26]. Здесь отметим только, что спектральный радиус оператора $\bar{S}$ равен нулю, если существует такое положительное число τ, что $t-g(t)\geqslant\tau$, $t\in[a, b]$ (см., например, [11]).

В заключение вернемся к мажорантной задаче Коши (21), с помощью которой в условиях теоремы 6 получается априорное неравенство (6). Напомним, что правая часть мажорантного уравнения $\dot{y}=F(t, y)$ определяется равенством $F(t, y)=\varkappa(t)\omega(t, u(t)y)$, где $\varkappa(t)=\frac{d}{dt}\int_a^b v(s)\times\times(B\chi_t)(s)ds$, а χ_t — характеристическая функция отрезка $[a, t]$. Специфика рассматриваемого здесь случая состоит в том, что явный вид оператора $B=(I-\nu\bar{S})^{-1}$ известен в исключительных случаях, и потому точное нахождение функции $\varkappa(t)$, вообще говоря, невозможно. Таким образом, возникает необходимость в оценках для $\varkappa$. Непосредственному использованию для этой цели оценок подынтегрального выражения препятствует операция дифференцирования, стоящая перед интегралом. Рассмотрим случай, в котором возможно получить оценку для $\varkappa$. Заметим, что $\varkappa(t)=(B^*v)(t)$. Действительно,

$$\varkappa(t)=\frac{d}{dt}\int_a^b (B^*v)(s)\chi_t(s)ds=\frac{d}{dt}\int_a^t (B^*v)(s)ds=(B^*v)(t).$$

Далее, $B^*=(I-\nu\bar{S}^*)^{-1}=\sum_{k=0}^{\infty}\nu^k[\bar{S}^*]^k$. Известно (см., например, [10]), что $(\bar{S}^*v)(t)=\frac{d}{dt}\int_a^b v(s)\sigma_g(t, s)ds$, где $\sigma_g(t, s)$ — характеристическая функция множества $\{(t, s)\in[a, b]\times[a, b] : a\leqslant g(s)\leqslant t\}$. Очевидно,

$$\int_a^b \sigma_g(t, s)ds=\mu_g(t)\equiv\operatorname{mes}\{s\in[a, b] : a\leqslant g(s)\leqslant t\leqslant b\}.$$

Предположим, что почти всюду на $[a, b]$ выполняется неравенство $\frac{d}{dt}\mu_g(t) \leqslant m < 1/\nu$, а функция $v(t)$ ограничена в существенном на $[a, b] : v(t) \leqslant d$. Так как $\bar{S}^* : L_p^1 \to L_p^1$ — положительный оператор, то $\{0 \leqslant v_1 \leqslant v_2\} \Rightarrow \{\bar{S}^* v_1 \leqslant \bar{S}^* v_2\}$, поэтому имеем $[\bar{S}^*]^k v \leqslant d \cdot m^k$, $k=1, 2, \ldots$ Таким образом, для $\varkappa(t)$ получаем следующую оценку: $\varkappa(t) \leqslant v(t) + d\frac{m\nu}{1-m\nu}$.

§ 8. О РАЗРЕШИМОСТИ ОДНОЙ КРАЕВОЙ ЗАДАЧИ ДЛЯ УРАВНЕНИЯ ТОМАСА—ФЕРМИ

Рассмотрим краевую задачу

$$q(t)x'' = f(x), \quad t \in [0, \tau], \tag{33}$$

$$x(0) = a, \quad x'(\tau) = \varphi[x(\tau)] + \psi(x), \tag{34}$$

частным случаем которой является краевая задача для уравнения Томаса — Ферми

$$\sqrt{t}\, x'' = x^{3/2}, \quad t \in [0, \tau], \tag{35}$$

$$x(0) = a, \quad x'(\tau) = \frac{x(\tau) + d}{\tau}, \quad a, d \geqslant 0, \tag{36}$$

возникающая в статистической теории атома [27]. Условия разрешимости задачи (33), (34) получим с помощью теоремы 1 и специального априорного неравенства, приводящего к априорной оценке решений. Отметим, что для общего уравнения второго порядка краевая задача с условиями (36) исследовалась другими методами в [28] и докторской диссертации Ю. А. Клокова (Рига, 1967 г.).

Обозначим через W^2 пространство функций $x : [0, \tau] \to R^1$, имеющих абсолютно непрерывную производную: $\|x\|_{W^2} = |x(0)| + |x'(0)| + \|x''\|_{L_1}$.

Предположим, что неотрицательная функция $q : [0, \tau] \to R^1$ абсолютно непрерывна, не убывает и $\int_0^\tau \frac{dt}{q(t)} < \infty$; непрерывная функция $f : R^1 \to R^1$ неотрицательна при $x \geqslant 0$ и $f(x) \equiv 0$ при $x < 0$; $a > 0$; функция $\varphi : R^1 \to R^1$ непрерывна; функционал $\psi : W^2 \to R^1$ непрерывен и ограничен: $|\psi(x)| \leqslant \gamma \quad \forall x \in W^2$.

Теорема 9. *Пусть выполнены условия: для любого $x \in W^2$ и любых $\lambda \in (0, 1]$, $\theta \in (0, \tau)$ уравнение*

$$\xi = \lambda(\tau - \theta)[\varphi(\xi) + \psi(x)] \tag{37}$$

не имеет отрицательных решений ξ; для любого $T \geqslant 0$ выполняется неравенство

$$\int_a^T f(s)\,ds \geqslant \eta_1(T) - \eta_2(a), \tag{38}$$

где $\eta_i : [0, \infty) \to [0, \infty)$, $i=1, 2$, таковы, что все положительные решения ξ скалярного неравенства

$$\eta_1(\xi) \leqslant \frac{1}{2} q(\tau)\{|\varphi(\xi)| + \gamma\}^2 + \eta_2(a) \tag{39}$$

ограничены одним числом $\xi \leqslant m$. Тогда задача (33), (34) имеет по крайней мере одно неотрицательное решение $x \in W^2$.

Доказательство. Соотношения $z(t) = x'(t)$ и $x(t) = a +$

$+(Vz)(t)$, где $(Vz)(t)=\int\limits_0^t z(s)ds$, устанавливают взаимно-однозначное соответствие между множествами решений задачи (33), (34) и задачи

$$\dot{z}=\frac{f(a+Vz)}{q};\quad z(\tau)=\varphi\left[a+\int\limits_0^\tau z(s)ds\right]+\psi(a+Vz). \tag{40}$$

Поэтому достаточно установить разрешимость этой задачи. В силу теоремы 1 достаточно показать, что для всех решений z^λ всех задач

$$\dot{z}=\lambda\frac{f(a+Vz)}{q};\quad z(\tau)=\lambda\left\{\varphi\left[a+\int\limits_0^\tau z(s)ds\right]+\psi(a+Vz)\right\},\quad \lambda\in[0,\ 1], \tag{40$_\lambda$}$$

имеет место общая априорная оценка $\|z^\lambda\|_{D_1}\leqslant c<\infty$.

Для получения априорной оценки вернемся опять к уравнению второго порядка и, получив для его решений специальное априорное неравенство, установим общую априорную оценку для всех решений x^λ задачи

$$q(t)x''(t)=\lambda f(x(t)),\quad t\in[0,\ \tau], \tag{41}$$

$$x(0)=a,\quad x'(\tau)=\lambda\{\varphi[x(\tau)]+\psi(x)\}, \tag{42}$$

где $\lambda\in[0,\ 1]$. Покажем сначала, что любое решение уравнения (41), удовлетворяющее условиям (42), не может принимать отрицательных значений. Допустим, что для некоторого решения x и некоторой точки $\theta\in(0,\ \tau)$ выполняются условия $x(\theta)=0$, $x'(\theta)=\alpha<0$ (считаем, что θ — ближайшая к началу координат точка пересечения графика $x(t)$ с осью t). Рассмотрим задачу Коши

$$q(t)y''=\lambda f(y),\quad t\in[\theta,\ \tau],\quad y(\theta)=0,\quad y'(\theta)=\alpha.$$

Так как $f(y)\equiv 0$ при $y<0$, то решение этой задачи $y(t)=\alpha(t-\theta)$ (на $[\theta,\ \tau]$ оно совпадает с выбранным нами решением x). Таким образом, $x(\tau)=\alpha(\tau-\theta)=x'(\tau)(\tau-\theta)<0$, или $x(\tau)=\lambda(\tau-\theta)\{\varphi[x(\tau)]+\psi(x)\}$, что противоречит условию (37). Итак, для любого решения задачи (41), (42) имеем $x(t)\geqslant 0$, $t\in[0,\ \tau]$.

Для получения априорного неравенства умножим обе части уравнения (41) на $x'(t)$ и проинтегрируем по t в пределах от 0 до τ. Для левой части получаем

$$\int\limits_0^\tau q(t)x''(t)x'(t)dt=\frac{1}{2}\left\{q(\tau)x'^2(\tau)-q(0)x'^2(0)-\int\limits_0^\tau x'^2(t)q'(t)dt\right\}.$$

Отсюда

$$\int\limits_0^\tau q(t)x''(t)x'(t)dt\leqslant\frac{1}{2}q(\tau)x'^2(\tau). \tag{43}$$

Так как $\int\limits_0^\tau f(x(t))x'(t)dt=\int\limits_a^{x(\tau)} f(s)ds$, то для всех решений задачи (41), (42) выполняется априорное неравенство $\lambda\int\limits_a^{x(\tau)} f(s)ds\leqslant\frac{1}{2}q(\tau)x'^2(\tau)$. Это неравенство с учетом краевых условий (42) приводит к неравенству $\int\limits_a^{x(\tau)} f(s)ds\leqslant\frac{1}{2}q(\tau)\{|\varphi[x(\tau)]|+\gamma\}^2$, которое выполняется для всех ре-

шений задачи (41), (42), где $\lambda\in(0, 1]$. Воспользовавшись условием (38), приходим к неравенству $\eta_1[x(\tau)]\leqslant\frac{1}{2}q(\tau)\{|\varphi[x(\tau)]|+\gamma\}^2+\eta_2(a)$, которое в силу условия (39) означает, что при всех $\lambda\in(0, 1]$ имеет место общая оценка $0\leqslant x^\lambda(\tau)\leqslant m$. При $\lambda=0$ задача (41), (42) имеет вид $x''=0$, $x(0)=a$, $x'(\tau)=0$, т. е. $x^0(\tau)=a$. Таким образом, при всех $\lambda\in[0, 1]$ имеем $0\leqslant x^\lambda(\tau)\leqslant a+m$. Далее, $|\dot{x}^\lambda(\tau)|\leqslant m_1=\sup\{|\varphi(s)|:s\in\in[0, a+m]\}+\gamma$, $0\leqslant x^\lambda(t)\leqslant a+\tau m_1$, $t\in[0, \tau]$, $\lambda\in[0, 1]$. Отсюда сразу следует существование такого $M>0$, что неравенство $\|x^\lambda\|_{W^2}\leqslant M$ выполняется для всех решений всех задач (41), (42). Это означает, что имеет место общая априорная оценка для всех решений всех задач (40_λ). Таким образом, задача (40) разрешима, а вместе с ней и исходная задача (33), (34) имеет по крайней мере одно решение. Теорема доказана.

Легко убедиться в выполнении условий (37)—(39) для задачи Томаса — Ферми (35), (36). Действительно, уравнение (37) принимает вид $\xi=\lambda\frac{(\tau-\theta)}{\tau}(\xi+d)$, и выполнение условия (37) очевидно. Далее, $\int\limits_a^T s^{3/2}ds=\frac{2}{5}T^{5/2}-\frac{2}{5}a^{5/2}$. Наконец, неравенство (39) имеет вид $\frac{2}{5}\xi^{5/2}\leqslant\frac{1}{2\tau\sqrt{\tau}}(\xi+d)^2+\frac{2}{5}a^{5/2}$.

Литература

1. Азбелев Н. В., Рахматуллина Л. Ф.— Дифференц. уравнения, 1978, т. 14, № 5, с. 771—797.
2. Треногин В. А. Функциональный анализ.— М.: Наука, 1980.—496 с.
3. Канторович Л. В., Акилов Г. П. Функциональный анализ.— М.: Наука, 1977.—744 с.
4. Bryan R. N.— J. Different. Equat., 1969, vol. 5, N 1, p. 38—48.
5. Brown R. C.— Can. J. Mat., 1976, vol. 28, N 3, p. 486—512.
6. Mawhin J.— Abh. Akad. Wiss. DDR, Abt. Mat. Natur. Wiss. Techn., 1977, N 4, s. 51—70.
7. Ешуков Л. Н., Веков А. А., Степанов А. Н. Проблемы и библиография теории краевых задач для обыкновенных дифференциальных уравнений.— Дифференциальные уравнения / Труды Рязан. радиотехн. ин-та, 1972, вып. 42, с. 164—192.
8. Васильев Н. И., Клоков Ю. А. Основы теории краевых задач обыкновенных дифференциальных уравнений.— Рига: Зинатне, 1978.—189 с.
9. Покорный Ю. В., Лялькина Г. Б. Краевая задача для обыкновенного линейного дифференциального уравнения с нелинейными краевыми условиями.— Краевые задачи / Межвуз. сб. научных трудов. Изд-во Перм. политехн. ин-та, 1979, с. 136—140.
10. Максимов В. П., Рахматуллина Л. Ф.— Дифференц. уравнения, 1977, т. 13, № 11, с. 1966—1973.
11. Азбелев Н. В., Максимов В. П.— Дифференц. уравнения, 1979, т. 15, № 10, с. 1731—1747.
12. Максимов В. П. О непрерывной зависимости от параметров решений нелинейных краевых задач для функционально-дифференциальных уравнений.— Краевые задачи / Межвуз. сб. научных трудов. Изд-во Перм. политехн. ин-та, 1980, с. 91—96.
13. Максимов В. П.— Дифференц. уравнения, 1981, т. 17, № 11, с. 1984—1994.
14. Gaines R. E., Mawhin J.— J. Different. Equat., 1977, vol. 26, N 2, p. 200—222.
15. Люстерник Л. А., Соболев В. И. Элементы функционального анализа.— М.: Наука, 1965.—520 с.
16. Красносельский М. А., Забрейко П. П. Геометрические методы нелинейного анализа.— М.: Наука, 1975.—512 с.
17. Рахматуллина Л. Ф.— Дифференц. уравнения, 1979, т. 15, № 3, с. 425—435.
18. Тихонов А. Н.— Бюлл. Моск. гос. ун-та, секция А, 1938, т. 1, вып. 8, с. 1—25.
19. Гаевский Х., Грёгер К., Захариас К. Нелинейные операторные уравнения и операторные дифференциальные уравнения.— М.: Мир, 1978.—336 с.
20. Азбелев Н. В., Цалюк З. Б.— Труды IV Всесоюзного математического съезда.— Л.: Наука, 1964, т. 2, с. 384—391.

21. Кигурадзе И. Т. Некоторые сингулярные краевые задачи для обыкновенных дифференциальных уравнений.— Тбилиси: Изд-во Тбил. гос. ун-та, 1975.—352 с.
22. Mawhin J.— Regional conference series in mathematics, Rhode Island, Providence, 1979, N 40, p. 1—112.
23. Драхлин М. Е., Плышевская Т. К.— Дифференц. уравнения, 1978, т. 14, № 8, с. 1347—1361.
24. Максимов В. П.— Дифференц. уравнения, 1974, т. 12, № 10, с. 2288—2291.
25. Максимов В. П. О полной непрерывности оператора внутренней суперпозиции.— Краевые задачи / Межвуз. сб. научных трудов. Изд-во Перм. политехн. ин-та, 1979, с. 113—115.
26. Азбелев Н. В., Березанский Л. М., Рахматуллина Л. Ф.— Дифференц. уравнения, 1977, т. 13, № 11, с. 1915—1925.
27. Гамбош П. Статистическая теория атома и ее применения.— М.: ИЛ, 1951.
28. Анищенко Р. И.— Докл. АН СССР, 1962, т. 145, № 3, с. 483—486.

Пермский политехнический институт

Поступила в редакцию 16 апреля 1981 г.

УДК 517.925.7

А. З. МОХОНЬКО

ОБ ОДНОМ КЛАССЕ ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНЫХ И ФУНКЦИОНАЛЬНЫХ УРАВНЕНИЙ

Используем стандартные обозначения теории мероморфных функций [1]. Говорим, что $f\in M_\infty$, если $f(z)$ — мероморфная в $\mathbf{C}$ функция. В [2] получены оценки роста целых решений дифференциального уравнения (д.у.)

$$f'(mz+b)=a_\varkappa(z)[f(z)]^\varkappa+\ldots+a_0(z);\quad m,\ b=\text{const},\tag{1}$$

$a_i(z)$ — целые функции. Изучались также мероморфные решения уравнения

$$Q(z,\ f(mz+b))=R(z,\ f(z));\quad m,\ b=\text{const},\tag{2}$$

$Q(z,\ w)$, $R(z,\ w)$ — рациональные функции по w и мероморфные по z в $\mathbf{C}$; $t=\deg_w Q$, $s=\deg_w R$; $\varkappa=s/t$. Пусть $T(r,\ a)=\Sigma T(r,\ a_i)$ — сумма характеристик всех коэффициентов $a_i(z)$ уравнения (1) (или уравнения (2)). В [2] (см. там же с. 1713, замечание) доказаны

Теорема *А*. *Пусть f — целое решение (1) такое, что $T(r,\ a)=o(T(r,\ f))$, $r\to\infty$. Пусть $|m|=\sigma>1$. Если $\varkappa=1$, то f имеет нулевой порядок, если $\varkappa>1$, то $\ln T(r,\ f)\sim\ln\varkappa\ln r/\ln\sigma\sim\ln\ln M(r,\ f)$.*

Теорема *Б*. *Пусть $f\in M_\infty$ — решение (2). Пусть $|m|=\sigma>1$. Если $\varkappa<1$, то $T(r,\ f)=O(T(r,\ a))$. Пусть $\varkappa\geqslant1$. Предположим, что $T(r,\ a)=o(T(r,\ f))$, $r\to\infty$. Если $\varkappa=1$, то f имеет нулевой порядок. Если $\varkappa>1$, то $\ln T(r,\ f)\sim\ln\varkappa\ln r/\ln\sigma$. Если в (2) $|m|<1$, то при помощи замены $mz+b=w$ этот случай сводится к случаю $|m|>1$.*

В [3, с. 162, 171] (см. также [2]) обсуждаются условия, при которых уравнения вида (1), (2) имеют решения. Рассмотрим д.у. ($a_i(z)$ — целые функции)

$$f'(g(z))=a_\varkappa[f(p(z))]^\varkappa+\ldots+a_1f(p(z))+a_0,\tag{3}$$

$$g(z)=c_qz^q+\ldots+c_1z+c_0,\quad p(z)=b_pz^p+\ldots+b_0;$$

$$c_i,\ b_j=\text{const};\quad |c_q|=\mu,\quad |b_p|=\nu;\quad n=q/p,\quad \sigma=\mu/\nu.\tag{4}$$

Теорема 1. *Пусть f — целое решение (3) такое, что $T(r,\ a_i)=o(T(r,\ f))$, $0\leqslant i\leqslant\varkappa$. Если $n=q/p>1$, $\varkappa\geqslant n$, то $\ln T(r,\ f)\sim\ln\ln M(r,\ f)\sim\ln\varkappa\ln\ln r/\ln n$. Пусть $n=1$, $\sigma=\mu/\nu>1$; если $\varkappa=1$, то f имеет нулевой порядок, если $\varkappa>1$, то $\ln T(r,\ f)\sim\ln\ln M(r,\ f)\sim\ln\varkappa\ln r/\ln\sigma$.*

Замечание 1. Теорема *А* является следствием теоремы 1 при $q=p=1$. Если $q=p>1$, то в теоремах 1—3 требуется, чтобы $\mu/\nu>1$, а если $p=q=1$, требуется, чтобы $\mu>1$. Эти ограничения соответствуют