Алгебра и анализ
Том 12 (2000), вып. 2

ДИНАМИЧЕСКАЯ ОБРАТНАЯ ЗАДАЧА ДЛЯ СИСТЕМЫ МАКСВЕЛЛА: ВОССТАНОВЛЕНИЕ СКОРОСТИ В РЕГУЛЯРНОЙ ЗОНЕ (ВС-МЕТОД)

© М. И. Белишев, А. К. Гласман

В статье разрабатывается подход к обратным задачам, основанный на их связях с теорией граничного управления (ВС-метод). Задача состоит в восстановлении переменной скорости электромагнитных волн $c = (\varepsilon\mu)^{-1/2}$ внутри ограниченной области $\Omega \subset \mathbf{R}^3$ по динамическим измерениям на ее границе (по оператору реакции $R^T : \mathbf{E}_\theta|_{\partial\Omega\times[0,T]} \to \mathbf{H}_\theta|_{\partial\Omega\times[0,T]}$; $(\cdot)_\theta$ — касательная составляющая). Пусть T таково, что приграничный слой $\Omega^T \subset \Omega$ оптической толщины T покрывается регулярной системой полугеодезических координат с базой на $\partial\Omega$; мы показываем, что данные $\{R^{2T}, c|_{\partial\Omega}, \frac{\partial c}{\partial\nu}\big|_{\partial\Omega}\}$ определяют c в Ω^T единственным образом.

§0. Введение

0.1. О работе. В статье авторов [3] был намечен план решения трехмерной динамической обратной задачи для системы Максвелла; этот план был реализован в работе [4], имеющей характер предварительной публикации. Настоящая статья является расширенным и скорректированным вариантом препринта [4].

0.2. Система Максвелла. Пусть $\Omega \subset \mathbf{R}^3$ есть ограниченная область с гладкой границей Γ; ε, μ — суть гладкие положительные функции (проницаемости) в $\overline{\Omega}$; функция $c := (\varepsilon\mu)^{-1/2}$ — скорость. Рассмотрим систему

$$\varepsilon \mathbf{e}_t = \operatorname{rot} \mathbf{h}, \ \ \mu \mathbf{h}_t = -\operatorname{rot} \mathbf{e} \quad \text{в } \Omega \times (0,T); \tag{0.1}$$

$$\mathbf{e}|_{t=0} = 0, \ \ \mathbf{h}|_{t=0} = 0 \quad \text{в } \Omega; \tag{0.2}$$

$$\mathbf{e}_\theta|_{\Gamma\times[0,T]} = \mathbf{f}, \tag{0.3}$$

Работа поддержана грантами РФФИ 98-01-00314 и 96-15-96121.

где $(\cdot)_\theta$ — касательная составляющая вектора на границе. Отметим равенства $\operatorname{div} \varepsilon \mathrm{e}^{\mathrm{f}}(\cdot, t) = \operatorname{div} \mu \mathrm{h}^{\mathrm{f}}(\cdot, t) = 0$ в Ω, следующие из (0.1), (0.2). С системой ассоциирован оператор реакции $R^T : \mathrm{e}_\theta|_{\Gamma\times[0,T]} \to \mathrm{h}_\theta|_{\Gamma\times[0,T]}$, описывающий соответствие „вход-выход". Оператор реакции играет роль данных обратной задачи.

0.3. Регулярная зона. Скорость c определяет в $\overline{\Omega}$ оптическую метрику

$$ds^2 = \frac{|dx|^2}{c^2};$$

пусть dist_c есть соответствующее расстояние; подобласть

$$\Omega^T := \{x \in \Omega \mid \mathrm{dist}_c(x, \Gamma) < T\}$$

есть приграничный слой оптической толщины T.

Определим T_ω как наибольшее из тех $T > 0$, для которых отвечающие оптической метрике полугеодезические координаты с базой Γ (п.г.к.) регулярны в Ω^T. Мы называем Ω^{T_ω} регулярной зоной.

0.4. Главный результат. Волны в системе (0.1)-(0.3) распространяются со скоростью c; к финальному моменту они заполняют подобласть Ω^T. В системе с удвоенным финальным моментом оператор R^{2T} определяется значениями проницаемостей ε, μ в Ω^T; он не зависит от их поведения в $\Omega \setminus \Omega^T$. Это свойство мотивирует следующую постановку обратной задачи: *по заданному R^{2T} восстановить скорость c в Ω^T*. Дополнительно мы считаем известными значения скорости и ее производной по нормали на границе. Приведем главный результат работы.

Теорема 0.1. *При любом положительном $T < T_\omega$ данные R^{2T}, $c|_\Gamma$, $\frac{\partial c}{\partial \nu}\big|_\Gamma$ определяют скорость c в Ω^T единственным образом.*

0.5. Комментарии. В главных чертах наш подход повторяет традиционную схему BC-метода [2]: основной прием — визуализация изображений волн; инструмент визуализации — амплитудная формула, основанная на соотношениях геометрической оптики. Из изображений извлекается метрический тензор оптической метрики (в п.г.к.); по нему восстанавливается скорость в Ω^T. Остановимся на особенностях, отличающих BC-схему для системы Максвелла от случая системы, описываемой волновым уравнением [2].

(i) Более содержательным становится понятие „изображение". Переход „волна-изображение" не сводится к пересадке волны из области Ω^T на цилиндр $\Gamma \times [0, T]$ (переходу к п.г.к.): пересадке предшествует преобразование

„волна-поперечное поле“, которое строится по разрывам, образующимся при проектировании волны на расширяющиеся подпространства соленоидальных векторных полей. Доказательство изометричности этого преобразования опирается на уравнение Риккати для отображения, связанного с эллиптической задачей и переводящего данные Неймана в данные Дирихле. Упомянутое уравнение — центральный объект одного из методов импедансной томографии (так называемый Layer Stripping Method); его появление и важная роль в вопросах проектирования — новый и, на наш взгляд, довольно неожиданный факт.

(ii) Соответствие „вход-состояние“ для системы Максвелла оказывается неограниченным в L_2-нормах, естественных для BC-метода. Это приводит к многочисленным осложнениям технического характера.

(iii) Более сложной оказывается ситуация с принципиальным для подхода свойством управляемости. Обнаружен интересный эффект: если топология заполненной волнами подобласти Ω^T в подходящем смысле нетривиальна, система (0.1)–(0.3) может оказаться неуправляемой. Впрочем, такое возможно лишь при временах $T > T_\omega$.

Из результатов, относящихся к данной тематике, отметим теоремы единственности для системы Максвелла в частотной области [17].

§1. Геометрия

1.1. Оптическая метрика. Эйконал. Через $|\mathrm{a}|$, $\mathrm{a} \cdot \mathrm{b}$ и $\mathrm{a} \times \mathrm{b}$ мы обозначаем стандартные норму, скалярное и векторное произведения в $\mathbf{R}^3$.

Пусть $\Omega \subset \mathbf{R}^3$ есть ограниченная область с гладкой[1] границей Γ, состоящей из одной связной компоненты; ε и μ суть гладкие функции (проницаемости), положительные в $\overline{\Omega}$; функцию $c := (\varepsilon\mu)^{-1/2}$ мы называем *скоростью*.

Скорость определяет *оптическую метрику*

$$(ds)^2 = \frac{|dx|^2}{c^2}, \tag{1.1}$$

которая превращает $\overline{\Omega}$ в риманово многообразие с краем; пусть dist_c есть соответствующее растояние. Функция

$$\tau(x) := \mathrm{dist}_c(x, \Gamma), \quad x \in \overline{\Omega}$$

называется *эйконалом*.

[1] Всюду в работе термин „гладкий“ применительно к функциям, поверхностям, полям и т.д. означает „C^∞-гладкий“.

Поверхности уровня эйконала

$$\Gamma^\xi := \{x \in \overline{\Omega} \mid \tau(x) = \xi\}, \quad \xi \geq 0$$

($\Gamma^0 = \Gamma$) суть поверхности, эквидистантные краю. Они ограничивают расширяющееся семейство подобластей

$$\Omega^\xi := \{x \in \Omega \mid \tau(x) < \xi\}, \quad \xi > 0.$$

Определим величину

$$T_* := \inf\{T > 0 \mid \Omega^T = \Omega\} = \max_{\Omega} \tau(\cdot).$$

1.2. Регулярная зона. Полугеодезические координаты. Пусть l_γ есть геодезическая оптической метрики, выходящая из точки $\gamma \in \Gamma$ в направлении нормали; $l_\gamma[0,\tau]$ есть ее сегмент длины $\tau \geq 0$, $x(\gamma,\tau)$ — второй конец сегмента. Обозначим $\Theta^T := \Gamma \times [0,T)$; определим T_ω как верхнюю грань положительных T, при которых отображение $\exp_\Gamma \ : \ (\gamma,\tau) \to x(\gamma,\tau)$ является диффеоморфизмом Θ^T на $\Omega^T \cup \Gamma$. Подобласть $\Omega^{T_\omega} \cup \Gamma$ назовем *регулярной зоной*.

Каждой точке x регулярной зоны отвечает единственная ближайшая к ней точка границы $\gamma(x) \in \Gamma$: $\operatorname{dist}_c(x,\gamma(x)) = \tau(x)$.

Пару $(\gamma(x),\tau(x)) =: i(x)$ мы называем *полугеодезическими координатами* (п.г.к.) точки x. Регулярная зона — наибольшая из подобластей Ω^T, в которых п.г.к. регулярны; в ней отображение $i : \Omega^T \cup \Gamma \to \Theta^T$ совпадает с обратным к $\exp_\Gamma$. Всюду в работе, если не оговорено противное, мы полагаем $T < T_\omega$.

Соглашение 1.1 (об обозначениях).

(i) *Через $x(\gamma,\tau)$ обозначается точка регулярной зоны, имеющая п.г.к. γ,τ;*

(ii) *если φ есть скалярная или векторнозначная функция на $\Omega^T \cup \Gamma$, то тем же символом φ мы обозначаем функцию $\varphi \circ i^{-1}$, определенную на Θ^T (так что $\varphi(\gamma,\tau) := \varphi(x(\gamma,\tau))$); если ψ задана на Θ^T, то тем же символом ψ обозначается функция $\psi \circ i$ на $\Omega^T \cup \Gamma$ (так что $\psi(x) := \psi(\gamma(x),\tau(x))$);*

(iii) *запись $\varphi(x) = \psi(\gamma,\tau)$ подразумевает два равенства: $\varphi(x(\gamma,\tau)) = \psi(\gamma,\tau)$ на Θ^T и $\varphi(x) = \psi(\gamma(x),\tau(x))$ в $\Omega^T \cup \Gamma$.*

Придерживаясь устоявшейся в ВС-методе терминологии, мы называем $\Theta^T = i(\Omega^T \cup \Gamma)$ *выкройкой* подобласти Ω^T.

Фиксируем $x \in \Omega^T \cup \Gamma$ и выберем локальные координаты $\widetilde{\gamma}^1, \widetilde{\gamma}^2$ в окрестности $\sigma \subset \Gamma$ точки $\gamma(x)$. Функции $\gamma^1, \gamma^2, \tau \ : \ \gamma^\alpha(\cdot) := \widetilde{\gamma}^\alpha(\gamma(\cdot))$, $\alpha = 1,2$; $\tau = \tau(\cdot)$ образуют *систему полугеодезических координат* на содержащем x множестве (*трубке*)

$$\mathcal{B}_\sigma^T := \{x' \in \Omega^T \cup \Gamma \mid \gamma(x') \in \sigma, 0 \leq \tau(x') < T\}. \tag{1.2}$$

В системе п.г.к. евклидовы элементы длины и объема имеют известный вид:

$$|dx|^2 = g_{\alpha\beta} d\gamma^\alpha d\gamma^\beta + c^2 d\tau^2; \quad dx = cJd\gamma^1 d\gamma^2 d\tau = cd\Gamma^\tau d\tau = c\frac{J}{J_0} d\Gamma d\tau, \tag{1.3}$$

где $J(\gamma, \tau) := (\det\{g_{\alpha\beta}(\gamma, \tau)\})^{1/2}$, $J_0(\gamma, \tau) := J(\gamma, 0)$, $d\Gamma^\tau$ и $d\Gamma$ — евклидовы элементы поверхности на Γ^τ и Γ. Элемент оптической длины в п.г.к. имеет вид

$$ds^2 = h_{\alpha\beta} d\gamma^\alpha d\gamma^\beta + d\tau^2; \tag{1.4}$$

сравнивая (1.3) с (1.4) и учитывая (1.1), получаем

$$h_{\alpha\beta} = \frac{1}{c^2}\, g_{\alpha\beta}. \tag{1.5}$$

1.3. Восстановление скорости по тензору h. Здесь мы подготовим один из фрагментов процедуры, решающей обратную задачу. Отображение $i \ : \ \Omega^T \cup \Gamma \to \Theta^T$ индуцирует на выкройке две метрики (два тензора) g и h такие, что i^{-1} есть изометрия (Θ^T, g) на $\Omega^T \cup \Gamma$ с евклидовой метрикой и изометрия (Θ^T, h) на $\Omega^T \cup \Gamma$ с оптической метрикой. По (1.1) метрики g и h конформно-эквивалентны: $h = \frac{1}{c^2} g$. Предположим, что тензор h известен на Θ^T, и покажем, как по нему можно восстановить скорость в Ω^T.

Теорема 1.1. *Тензор h на Θ^T вместе со значениями c и $\frac{\partial c}{\partial \tau}$ на Γ единственным образом определяет скорость c в Ω^T.*

Доказательство. (i) Пусть K_h и K_g — суть скалярные кривизны многообразий (Θ^T, h) и (Θ^T, g); так как второе является евклидовым, имеем $K_g = 0$. В силу этого вопрос о представлении метрики h в форме $\frac{1}{c^2} g$ есть частный случай задачи Ямабе: найти множитель c^2 такой, чтобы конформная деформация $c^2 h = g$ обладала предписанной постоянной (в нашем случае нулевой) скалярной кривизной [12].

(ii) В общем случае главным инструментом решения задачи Ямабе является уравнение

$$\frac{4(n-1)}{n-2}\Delta_h u - K_h u + K_g u^{(n+2)/(n-2)} = 0, \tag{1.6}$$

где $n = \dim \Theta^T \geq 3$; Δ_h - лапласиан в h-метрике; u определяется равенством $c^2 = u^{4/(n-2)}$. В нашем случае $n = 3,\ K_g = 0,\ u = c^{1/2}$; уравнение (1.6) принимает вид

$$\left(\Delta_h - \frac{1}{8}K_h\right)c^{1/2} = 0 \quad \text{на } \Theta^T. \tag{1.7}$$

Поскольку функции $c^{1/2}$ и $\frac{\partial c^{1/2}}{\partial \tau} = \frac{1}{2}c^{-1/2}\frac{\partial c}{\partial \tau}$ известны на Γ, то, как данные Коши для эллиптического уравнения (1.7), они определяют решение $c^{1/2}$ единственным образом. Вслед за этим определяется и евклидова метрика $g = c^2 h$.

(iii) Тензор g определяет соответствие $i^{-1}\ :\ \Theta^T \to \Omega^T \cup \Gamma$. В самом деле, пусть x^1, x^2, x^3 — суть декартовы координаты на Ω^T; в силу их гармоничности имеем

$$\Delta_g x^k = 0 \quad \text{на } \Theta^T. \tag{1.8}$$

Поскольку x^k и $\frac{\partial x^k}{\partial \tau} = c\frac{\partial x^k}{\partial \nu}$ известны на Γ (здесь ν есть внутренняя евклидова нормаль), то уравнение (1.8) определяет функции $x^k = x^k(\gamma, \tau)$ на Θ^T единственным образом. Соответствие i^{-1} есть отображение $(\gamma, \tau) \to x(\gamma, \tau) = \{x^1(\gamma, \tau), x^2(\gamma, \tau), x^3(\gamma, \tau)\}$.

(iv) Скорость восстанавливается следующим образом:

$$c(x) = \left[\sum_{k=1}^{3}\left(\frac{\partial x^k(\gamma, \tau)}{\partial \tau}\right)^2\right]^{1/2}, \quad x \in \Omega^T$$

(см. соглашение 1.1). Теорема доказана.

1.4. Представление полей. В регулярной зоне эйконал является гладким; он определяет поле евклидовых нормалей к поверхностям Γ^ξ:

$$\nu(x) := \frac{\nabla \tau(x)}{|\nabla \tau(x)|}, \quad x \in \Omega^T \cup \Gamma.$$

Заметим, что $\nu|_\Gamma$ есть внутренняя нормаль к границе.

Любое векторное поле $\mathbf{y}$ в Ω может быть представлено в виде

$$\mathbf{y} = \mathbf{y}_\theta + \mathbf{y}_\nu \quad \text{в } \Omega^T \cup \Gamma, \tag{1.9}$$

где

$$\mathbf{y}_\nu := (\boldsymbol{\nu} \cdot \mathbf{y})\boldsymbol{\nu}, \qquad \mathbf{y}_\theta := \mathbf{y} - \mathbf{y}_\nu$$

— суть *продольная* и *поперечная* компоненты $\mathbf{y}$.

Пусть $\mathbf{r} = \mathbf{r}(x)$ есть радиус-вектор точки $x = x(\gamma, \tau)$; γ^1, γ^2, τ — суть п.г.к. в трубке $\mathcal{B}_\sigma^T$ (см. (1.2)), содержащей x; обозначим

$$\mathbf{r}_\alpha := \frac{\partial \mathbf{r}}{\partial \gamma^\alpha}, \quad \mathbf{r}_0 := \frac{\partial \mathbf{r}}{\partial \tau};$$

векторы $\mathbf{r}_1, \mathbf{r}_2$ касательны, а вектор $\mathbf{r}_0$ нормален к поверхности Γ^τ. Поле $\mathbf{y}$ в трубке можно представить в виде

$$\mathbf{y} = y^\alpha \mathbf{r}_\alpha + y^0 \mathbf{r}_0 = \mathbf{y}_\theta + y^0 \mathbf{r}_0. \tag{1.10}$$

Скажем, что поле $\mathbf{v}$ *поперечно*, если $\mathbf{v} = \mathbf{v}_\theta = v^\alpha \mathbf{r}_\alpha$ (т.е. $\boldsymbol{\nu} \cdot \mathbf{v} = 0$).

Напомним известные соотношения для евклидова метрического тензора

$$g_{\alpha\beta} = \mathbf{r}_\alpha \cdot \mathbf{r}_\beta; \quad g_{00} = \mathbf{r}_0 \cdot \mathbf{r}_0 = c^2. \tag{1.11}$$

1.5. Параллельный перенос. Ниже будет использован параллельный перенос в метрике (1.1); коротко напомним, как он проводится с использованием п.г.к.

Пусть $\mathcal{B}_\sigma^T$ есть трубка, покрываемая системой п.г.к. γ^1, γ^2, τ; согласно (1.4), матрица тензора h в п.г.к. имеет вид

$$\{h_{ij}\} = \left(\begin{array}{cc|c} \multicolumn{2}{c|}{\multirow{2}{*}{$h_{\alpha\beta}$}} & 0 \\ & & 0 \\ \hline 0 & 0 & 1 \end{array} \right);$$

пусть

$$\Gamma^\alpha_{\beta 0} = \frac{1}{2} h^{\alpha\rho} \frac{\partial h_{\beta\rho}}{\partial \tau}$$

— суть (ненулевые) символы Кристоффеля оптической метрики; $\{h^{\alpha\beta}\}$ — матрица, обратная к $\{h_{\alpha\beta}\}$. Пусть $v^\alpha \mathbf{r}_\alpha(x)$ — вектор в точке $x \in \mathcal{B}^T_\sigma$, касательный к поверхности $\Gamma^{\tau(x)}$. Рассмотрим систему

$$\frac{dv^\alpha}{dt} + \Gamma^\alpha_{\beta 0} v^\beta = 0, \quad 0 < t < \tau(x);$$
$$v^\alpha|_{t=\tau(x)} = v^\alpha;$$

и найдем ее решения $v^\alpha(t)$. Вектор

$$[v^\alpha \mathbf{r}_\alpha]^\wedge := v^\alpha(0)\mathbf{r}_\alpha(\gamma(x))$$

есть результат параллельного переноса исходного вектора $v^\alpha \mathbf{r}_\alpha(x)$ из точки $x \in \Gamma^{\tau(x)}$ в точку $\gamma(x) \in \Gamma$ вдоль геодезической $l_{\gamma(x)}[0, \tau(x)]$; он, очевидно, касателен к Γ.

Оптическая и евклидова метрики конформно-эквивалентны; скалярное произведение в оптической метрике инвариантно относительно параллельного переноса. Из сказанного следует, что для двух векторов $\mathbf{u}(x) \overset{\text{def}}{=} u^\alpha \mathbf{r}_\alpha(x)$, $\mathbf{v}(x) = v^\alpha \mathbf{r}_\alpha(x)$ выполнено равенство:

$$\frac{1}{c^2(x)}\mathbf{u}(x) \cdot \mathbf{v}(x) = \frac{1}{c^2(\gamma(x))}[\mathbf{u}(x)]^\wedge \cdot [\mathbf{v}(x)]^\wedge. \tag{1.12}$$

§2. Изображения

2.1. Отображение π. Пусть $\mathbf{v}$ есть поперечное поле в $\Omega^T \cup \Gamma$; сопоставим ему касательное поле на выкройке (функцию от (γ, τ), значения которой суть векторы, касательные к Γ) по правилу:

$$(\pi \mathbf{v})(\gamma, \tau) := [\mathbf{v}(x(\gamma, \tau))]^\wedge, \quad (\gamma, \tau) \in \Theta^T.$$

Следующие свойства отображения π легко усматриваются из определения:

(i) пусть φ есть скалярная функция в $\Omega^T \cup \Gamma$; тем же символом обозначаем операцию умножения полей на φ; справедливо равенство

$$\pi\varphi = \varphi\pi, \tag{2.1}$$

понимаемое с учетом соглашения 1.1;

(ii) обозначим $c_0(\gamma,\tau) := c(\gamma,0)$; как легко видеть из (1.12), отображение $\mathbf{v} \to \frac{c}{c_0}\pi\mathbf{v}$ есть поточечная изометрия в смысле евклидовой нормы:

$$\left|\left(\frac{c}{c_0}\pi\mathbf{v}\right)(\gamma,\tau)\right| = |\mathbf{v}(x(\gamma,\tau))|, \quad (\gamma,\tau) \in \Theta^T; \tag{2.2}$$

(iii) пусть $\frac{D}{d\tau}$ есть ковариантная производная (в оптической метрике); на гладких полях выполнено соотношение

$$\frac{\partial}{\partial\tau}\pi = \pi\frac{D}{d\tau}. \tag{2.3}$$

2.2. Оператор Π^T. Рассмотрим (вещественное) гильбертово пространство поперечных полей в подобласти Ω^T

$$\mathcal{L}_\theta^T := \{\mathbf{v} \in \mathbf{L}_{2,\varepsilon}(\Omega^T) \mid \mathbf{v}\cdot\boldsymbol{\nu} = 0 \quad \text{в } \Omega^T\}$$

(с мерой εdx) и пространство касательных полей на ее выкройке

$$\mathcal{F}^T := \{\mathbf{f} \in \mathbf{L}_2(\Theta^T) \mid \mathbf{f}\cdot\boldsymbol{\nu}_0 = 0 \quad \text{на } \Theta^T\}$$

(с мерой $d\Gamma d\tau$), где $\nu_0(\gamma,\tau) := \nu(\gamma,0)$. Напомним обозначения $J_0(\gamma,\tau) := J(\gamma,0)$, $c_0(\gamma,\tau) := c(\gamma,0)$ и определим на выкройке функцию

$$\varkappa := \frac{c}{c_0}\left(\frac{J}{J_0}\right)^{1/2}\left(\frac{\varepsilon}{\mu}\right)^{1/4}.$$

Введем оператор $\Pi^T : \mathcal{L}_\theta^T \to \mathcal{F}^T$,

$$\Pi^T\mathbf{v} := \varkappa\pi\mathbf{v}.$$

Лемма 2.1.

(i) *оператор* Π^T *унитарен;*

(ii) *для ограниченных скалярных функций* χ *выполнено соотношение* $\Pi^T\chi = \chi\Pi^T$*;*

(iii) *оператор* Π^T *сохраняет гладкость:* $\Pi^T[\mathcal{L}_\theta^T \cap \mathbf{C}^\infty(\overline{\Omega}^T)] = \mathcal{F}^T \cap \mathbf{C}^\infty(\overline{\Theta}^T)$.

Доказательство. Все функции, входящие в правую часть определения $\varkappa$ — суть гладкие и положительные на Θ^T. Для произвольных $\mathbf{u}, \mathbf{v} \in \mathcal{L}_\theta^T$ имеем

$$
\begin{aligned}
(\mathbf{u},\mathbf{v})_{\mathcal{L}_\theta^T} &= \int\limits_{\Omega^T} dx\,\varepsilon\,\mathbf{u}\cdot\mathbf{v} \\
&\text{см. (1.3)} \\
&= \int\limits_{\Theta^T} d\Gamma d\tau \left(c\frac{J}{J_0}\varepsilon\right)(\gamma,\tau)\ \mathbf{u}(x(\gamma,\tau))\cdot\mathbf{v}(x(\gamma,\tau)) \\
&\text{см. (2.2)} \\
&= \int\limits_{\Theta^T} d\Gamma d\tau\, c\frac{J}{J_0}\varepsilon\ \frac{c}{c_0}\pi\mathbf{u}\cdot\frac{c}{c_0}\pi\mathbf{v} = (\Pi^T\mathbf{u},\Pi^T\mathbf{v})_{\mathcal{F}^T},
\end{aligned}
$$

т.е. Π^T есть изометрия. Легко видеть, что $\operatorname{Ran}\Pi^T = \mathcal{F}^T$.

Свойство (ii) следует из определений и (2.1); свойство (iii) есть простое следствие диффеоморфности отображения i. Лемма доказана.

2.3. Проектирование в пространстве соленоидальных полей. Рассмотрим пространство ε-соленоидальных полей

$$J := \{\mathbf{y} \in \mathbf{L}_{2,\varepsilon}(\Omega) \mid \operatorname{div}\varepsilon\mathbf{y} = 0 \quad \text{в } \Omega\},$$

снабженное $\mathbf{L}_{2,\varepsilon}$-метрикой (операция div понимается в смысле распределений); множество $J\cap\mathbf{C}^\infty(\overline{\Omega})$ плотно в J (см. [8, 13]). Фиксируем $T < T_\omega$ и рассмотрим семейство подпространств:

$$J^\xi := \{\mathbf{y} \in J \mid \operatorname{supp}\mathbf{y} \subset \overline{\Omega}^\xi\}, \quad 0 \le \xi \le T.$$

Отметим известное свойство: если поле $\mathbf{y} = \mathbf{y}_\theta + \mathbf{y}_\nu \in J^\xi$ является гладким вплоть до Γ^ξ, то

$$\boldsymbol{\nu}\cdot\mathbf{y} = 0 \quad \text{на } \Gamma^\xi. \tag{2.4}$$

В дальнейшем J^T играет роль основного пространства; оно содержит семейство подпространств $\{J^\xi\}$, $0 \le \xi < T$. Пусть P^ξ есть (ортогональный) проектор в J^T на J^ξ; $P^\xi_\perp := \mathbb{I} - P^\xi$. Следующий результат описывает, как действуют эти проекторы.

Предложение 2.1. *Для гладкого* $\mathbf{y} \in J^T$ *справедливы представления:*

$$(P^\xi \mathbf{y})(x) = \begin{cases} \mathbf{y}(x) - \nabla p^\xi(x), & x \in \Omega^\xi; \\ 0, & x \in \Omega^T \setminus \Omega^\xi; \end{cases}$$
$$(P^\xi_\perp \mathbf{y})(x) = \begin{cases} \nabla p^\xi(x), & x \in \Omega^\xi; \\ \mathbf{y}(x), & x \in \Omega^T \setminus \Omega^\xi, \end{cases}$$

где p^ξ *есть решение задачи*

$$\operatorname{div}\varepsilon\nabla p = 0 \quad \text{в } \Omega^\xi; \tag{2.5}$$
$$p = 0 \quad \text{на } \Gamma; \tag{2.6}$$
$$\nu \cdot \nabla p = \nu \cdot \mathbf{y} \quad \text{на } \Gamma^\xi. \tag{2.7}$$

Проверить это утверждение несложно; доказательство имеется, например, в [5]. Важный факт состоит в том, что проектирование приводит к появлению разрыва на Γ^ξ: в точках $x(\gamma,\xi) \in \Gamma^\xi$ имеем

$$\begin{aligned} &(P^\xi_\perp \mathbf{y})(x(\gamma,\xi+0)) - (P^\xi_\perp \mathbf{y})(x(\gamma,\xi-0)) = (P^\xi \mathbf{y})(x(\gamma,\xi-0)) \\ &\quad = \mathbf{y}(x(\gamma,\xi)) - (\nabla p^\xi)(x(\gamma,\xi)) \\ &\quad \text{см. (1.9), (2.7)} \\ &\quad = \mathbf{y}_\theta(x(\gamma,\xi)) - (\nabla p^\xi)_\theta(x(\gamma,\xi)), \end{aligned} \tag{2.8}$$

т.е. разрыв оказывается *касательным* полем на Γ^ξ.

Мы вернемся к проектированию в J^T позже, в п. 2.6, после предварительных рассмотрений, относящихся к задаче (2.5)–(2.7).

2.4. Оператор Кальдерона. Фиксируем $\xi\ :\ 0 < \xi \le T$ и введем оператор Λ^ξ, действующий в пространстве скалярных функций $L_{2,\varepsilon}(\Gamma^\xi)$ (с мерой $\varepsilon\, d\Gamma^\xi$) по правилу:

$$\Lambda^\xi g = p|_{\Gamma^\xi},$$

где p есть решение задачи:

$$\begin{aligned} \operatorname{div} \varepsilon\nabla p = 0 &\quad \text{в } \Omega^\xi; \\ p = 0 &\quad \text{на } \Gamma; \\ \frac{\partial p}{\partial \nu} = g &\quad \text{на } \Gamma^\xi. \end{aligned}$$

Это известный оператор Кальдерона (в иностранной литературе употребляется термин „Neumann-to-Dirichlet map“); отметим некоторые из его свойств:

(i) имеет место оценка для нормы: $\|\Lambda^\xi\| \le C\xi$, $0 < \xi \le T$ (см. [5]); в соответствии с ней доопределяем

$$\Lambda^0 := \mathbb{0}; \tag{2.9}$$

(ii) при $\xi > 0$ оператор Λ^ξ положителен:

$$(\Lambda^\xi g, g) > 0, \quad g \ne 0, \tag{2.10}$$

и, следовательно, самосопряжен и инъективен;

(iii) оператор Λ^ξ сохраняет гладкость: $\Lambda^\xi C^\infty(\Gamma^\xi) = C^\infty(\Gamma^\xi)$, $\xi > 0$;

(iv) выполнена оценка

$$\|\Lambda^\xi g\|_{H^1(\Gamma^\xi)} \le C\xi \|g\|_{H^1(\Gamma^\xi)}, \quad 0 \le \xi \le T \tag{2.11}$$

($H^s(\dots)$ — соболевские классы).

2.5. Оператор Λ. Уравнение Риккати. Имеем представление

$$\overline{\Omega}^T = \bigcup_{0 \le \xi \le T} \Gamma^\xi;$$

в пространстве скалярных функций $L_{2,\varepsilon}(\Omega^T)$ определим оператор Λ, действующий *послойно* (в соответствии с представлением) по правилу:

$$(\Lambda\varphi)|_{\Gamma^\xi} := \Lambda^\xi[\varphi|_{\Gamma^\xi}], \quad 0 \le \xi \le T.$$

Отметим некоторые из его свойств:

(i) оператор Λ ограничен и инъективен; он нелокален, т.е. не сохраняет носитель функции в Ω^T. В то же время, включение $\operatorname{supp}\varphi \subset \Omega^{\xi''} \setminus \Omega^{\xi'}$ влечет $\operatorname{supp}\Lambda\varphi \subset \Omega^{\xi''} \setminus \Omega^{\xi'}$ $(0 \le \xi' < \xi'' \le T)$;

(ii) используя гладкий характер зависимости Λ^ξ от ξ и свойство (iii) п. 2.4, можно установить сохранение гладкости: $\Lambda C^\infty(\overline{\Omega}^T) \subset C^\infty(\overline{\Omega}^T)$;

(iii) в соответствии с (2.9) для гладких φ имеем

$$(\Lambda\varphi)|_\Gamma = 0; \tag{2.12}$$

(iv) выполнено соотношение

$$\Lambda^* = \frac{1}{c}\Lambda c, \tag{2.13}$$

легко следующее из самосопряженности Λ^ξ.

Сейчас, в дополнение к Λ, будет введен ряд операторов; в их описании используются полугеодезические координаты и соглашение 1.1. Напомним, что $\mathcal{L}_\theta^T$ есть пространство поперечных векторных полей; полезно напомнить запись градиента и дивергенции в п.г.к.:

$$\begin{aligned}(\nabla\varphi)(x) &= \left[\left(g^{\alpha\beta}\frac{\partial\varphi}{\partial\gamma^\beta}\right)\mathbf{r}_\alpha + \left(g^{00}\frac{\partial\varphi}{\partial\tau}\right)\mathbf{r}_0\right](\gamma,\tau);\\ (\operatorname{div}\mathbf{y})(x) &= \left[\frac{1}{cJ}\frac{\partial}{\partial\gamma^\alpha}(cJy^\alpha) + \frac{1}{cJ}\frac{\partial}{\partial\tau}(cJy^0)\right](\gamma,\tau),\end{aligned} \tag{2.14}$$

где $\{g^{\alpha\beta}\}$ — матрица, обратная к $\{g_{\alpha\beta}\}$, $g^{00} = \frac{1}{c^2}$; $\mathbf{y} = y^\alpha\mathbf{r}_\alpha + y^0\mathbf{r}_0$. Определим:

поперечный градиент $\nabla_\theta \;:\; L_{2,\varepsilon}(\Omega^T) \to \mathcal{L}_\theta^T$, действующий на гладкие в $\overline{\Omega}^T$ функции по правилу:

$$(\nabla_\theta\varphi)(x) = \left[\left(g^{\alpha\beta}\frac{\partial\varphi}{\partial\gamma^\beta}\right)\mathbf{r}_\alpha\right](\gamma,\tau);$$

поперечную дивергенцию $\operatorname{div}_\theta \;:\; \mathcal{L}_\theta^T \to L_{2,\varepsilon}(\Omega^T)$, действующую на гладкие поля $\mathbf{v} = v^\alpha\mathbf{r}_\alpha$ по правилу:

$$(\operatorname{div}_\theta\mathbf{v})(x) = \left[\frac{1}{cJ}\frac{\partial}{\partial\gamma^\alpha}(cJv^\alpha)\right](\gamma,\tau);$$

оператор $B\ :\ L_{2,\varepsilon}(\Omega^T)\to L_{2,\varepsilon}(\Omega^T)$, $\mathrm{Dom}\ B=C^\infty(\overline{\Omega}^T)$, $B:=-\frac{1}{\varepsilon}\mathrm{div}_\theta\varepsilon\nabla_\theta$ или

$$(B\varphi)(x)=-\left[\frac{1}{\varepsilon cJ}\frac{\partial}{\partial\gamma^\alpha}\left(cJ\varepsilon g^{\alpha\beta}\frac{\partial\varphi}{\partial\gamma^\beta}\right)\right](\gamma,\tau).$$

Отметим их послойный характер: равенства $\varphi|_{\Gamma^\xi}=0$, $\mathbf{v}|_{\Gamma^\xi}=\mathbf{0}$ влекут $(\nabla_\theta\varphi)|_{\Gamma^\xi}=\mathbf{0}$, $(\mathrm{div}_\theta\mathbf{v})|_{\Gamma^\xi}=0$, $(B\varphi)|_{\Gamma^\xi}=0$. Продолжим перечисление свойств операторов:

(v) справедливы соотношения

$$(\nabla_\theta\varphi,\mathbf{v})_{\mathcal{L}_\theta^T}=-\left(\varphi,\frac{1}{\varepsilon}\mathrm{div}_\theta\varepsilon\mathbf{v}\right)_{L_{2,\varepsilon}(\Omega^T)};\quad (B\varphi,\psi)_{L_{2,\varepsilon}(\Omega^T)}=(\varphi,B\psi)_{L_{2,\varepsilon}(\Omega^T)},\tag{2.15}$$

которые легко выводятся послойным интегрированием по частям;

(vi) в силу (2.11) для $\varphi\in C^\infty(\overline{\Omega}^T)$ имеем

$$[\nabla_\theta\Lambda\varphi]|_{\Gamma^\xi}\to 0,\quad \xi\to 0.$$

Определим оператор

$$D:=\frac{\partial}{\partial\nu}=\frac{1}{c}\frac{\partial}{\partial\tau},$$

действующий на гладкие функции по правилу:

$$(D\varphi)(x):=\left(\frac{1}{c}\frac{\partial\varphi}{\partial\tau}\right)(\gamma,\tau).$$

Следующий результат легко устанавливается интегрированием по частям: для гладких φ,ψ, удовлетворяющих условиям $(\varphi\psi)|_\Gamma=0$, $(\varphi\psi)|_{\Gamma^T}=0$, выполняется соотношение

$$(D\varphi,\psi)_{L_{2,\varepsilon}(\Omega^T)}=(\varphi,D^*\psi)_{L_{2,\varepsilon}(\Omega^T)},\tag{2.16}$$

в котором

$$D^*:=-\frac{1}{cJ\varepsilon}\frac{\partial}{\partial\tau}J\varepsilon$$

есть оператор, сопряженный к D по Лагранжу.

Введенные выше операторы связаны замечательным соотношением (уравнением Риккати), играющим важную роль в нашей работе.

Теорема 2.1. *В* $L_{2,\varepsilon}(\Omega^T)$ *выполнено операторное равенство*

$$D\Lambda + \Lambda^* D^* + \Lambda^* B \Lambda = \mathbb{I}, \tag{2.17}$$

справедливое на функциях, гладких в $\overline{\Omega}^T$.

Принадлежащее Л. Н. Пестову доказательство отнесено в приложение А.

2.6. Оператор M^T. Введенное в п. 2.3 семейство проекторов $\{P^\xi\}$ определяет оператор $M^T : J^T \to \mathcal{L}^T_\theta$, $\mathrm{Dom}\, M^T = J^T \cap \mathbf{C}^\infty(\overline{\Omega}^T)$, действующий по правилу:

$$(M^T \mathbf{y})|_{\Gamma^\xi} := (P^\xi \mathbf{y})|_{\Gamma^{\xi - 0}}, \quad 0 < \xi \le T$$

Таким образом, $M^T\mathbf{y}$ составляется из разрывов, возникающих при проектировании $\mathbf{y}$ на подпространства J^ξ. В силу (2.8) имеем:

$$(M^T \mathbf{y})|_{\Gamma^\xi} = \mathbf{y}_\theta|_{\Gamma^\xi} - (\nabla p^\xi)_\theta\big|_{\Gamma^\xi} = \mathbf{y}_\theta|_{\Gamma^\xi} - (\nabla_\theta p^\xi)|_{\Gamma^\xi}.$$

В терминах принятых определений операторов и с учетом равенств $p^\xi|_{\Gamma^\xi} = \Lambda^\xi[\boldsymbol{\nu} \cdot \mathbf{y}|_{\Gamma^\xi}]$; $\boldsymbol{\nu} \cdot \mathbf{y} = y^0 |\mathbf{r}_0| = y^0 c$ (см. (1.11)) получаем представление

$$M^T \mathbf{y} = \mathbf{y}_\theta - \nabla_\theta \Lambda[c y^0]. \tag{2.18}$$

Из него по свойству (ii) п. 2.5 видно, что M^T корректно определен; более того, он сохраняет гладкость: $\mathrm{Ran}\, M^T \subset \mathcal{L}^T_\theta \cap \mathbf{C}^\infty(\overline{\Omega}^T)$. Присутствие Λ делает оператор M^T нелокальным в Ω^T; в то же время его действие имеет послойный характер: равенство $\mathbf{y}|_{\Gamma^\xi} = 0$ влечет $(M^T\mathbf{y})|_{\Gamma^\xi} = 0$.

Напомним известное разложение Вейля:

$$\mathbf{L}_{2,\varepsilon}(\Omega^T) = G^T \oplus J^T,$$

в котором $G^T := \{\nabla q \mid q \in H^1(\Omega^T),\ q|_\Gamma = 0\}$ (см., например, [8, 13]); пусть P^T_J есть проектор в $\mathbf{L}_{2,\varepsilon}(\Omega^T)$ на J^T.

Лемма 2.2. *Сопряженный оператор $(M^T)^*$ определен на гладких поперечных полях $\mathbf{v} \in \mathcal{L}_\theta^T$ и допускает представление*

$$(M^T)^*\mathbf{v} = P_J^T\left\{\mathbf{v} + \left[\frac{1}{c^2}\Lambda\left(c\frac{1}{\varepsilon}\mathrm{div}_\theta\varepsilon\mathbf{v}\right)\right]\mathbf{r}_0\right\}. \qquad (2.19)$$

Доказательство. Для гладких $\mathbf{y} = \mathbf{y}_\theta + y^0\mathbf{r}_0 \in J^T$ и $\mathbf{v} \in \mathcal{L}_\theta^T$ имеем

$$\begin{aligned}
&(M^T\mathbf{y},\mathbf{v})_{\mathcal{L}_\theta^T} \\
&\quad \text{см. (2.18)} \\
&= (\mathbf{y}_\theta - \nabla_\theta\Lambda[cy^0],\mathbf{v})_{\mathcal{L}_\theta^T} \\
&\quad \text{см. (2.13), (2.15)} \\
&= (\mathbf{y}_\theta,\mathbf{v})_{\mathcal{L}_\theta^T} + \left(y^0, \Lambda\left[c\frac{1}{\varepsilon}\mathrm{div}_\theta\varepsilon\mathbf{v}\right]\right)_{L_{2,\varepsilon}(\Omega^T)} \\
&\quad \text{в силу } \mathbf{r}_0\cdot\mathbf{v} = \mathbf{y}_\theta\cdot\mathbf{r}_0 = 0 \text{ и } |\mathbf{r}_0|^2 = c^2 \\
&= \left(\mathbf{y}_\theta + y^0\mathbf{r}_0, \mathbf{v} + \frac{1}{c^2}\Lambda\left[c\frac{1}{\varepsilon}\mathrm{div}_\theta\varepsilon\mathbf{v}\right]\mathbf{r}_0\right)_{\mathbf{L}_{2,\varepsilon}(\Omega^T)} \\
&= \left(\mathbf{y}, P_J^T\left\{\mathbf{v} + \left[\frac{1}{c^2}\Lambda\left(c\frac{1}{\varepsilon}\mathrm{div}_\theta\varepsilon\mathbf{v}\right)\right]\mathbf{r}_0\right\}\right)_{J^T}.
\end{aligned}$$

Лемма доказана.

2.7. Унитарность M^T. Это важное свойство подробно обсуждается в работе [5]; здесь мы ограничимся наброском доказательства.

Теорема 2.2. *Оператор M^T изометричен и расширяется по непрерывности до унитарного оператора из J^T на $\mathcal{L}_\theta^T$.*

Доказательство. Выберем гладкие $\mathbf{y},\mathbf{w} \in J^T$; $\mathbf{y} = \mathbf{y}_\theta + y^0\mathbf{r}_0$, $\mathbf{w} = \mathbf{w}_\theta + w^0\mathbf{r}_0$.

(i) В силу равенств $\mathbf{y}\cdot\boldsymbol{\nu} = y^\nu = cy^0$ имеем соотношения

$$\begin{aligned}
&(\Lambda[cy^0])|_{\Gamma^T} = \Lambda^T\left[cy^0|_{\Gamma^T}\right] \\
&\quad \text{см. (2.4)} \\
&= 0; \\
&(\Lambda[cy^0])|_{\Gamma} = \Lambda^0\left[cy^0|_{\Gamma}\right] \\
&\quad \text{см. (2.12)} \\
&= 0.
\end{aligned} \qquad (2.20)$$

Согласно (2.14) и с учетом определений операторов, имеем

$$\operatorname{div} \varepsilon \mathbf{y} = \operatorname{div}_\theta \varepsilon \mathbf{y}_\theta - \varepsilon D^*[cy^0], \tag{2.21}$$

а условие ε-соленоидальности приобретает вид

$$D^*[cy^0] = \frac{1}{\varepsilon} \operatorname{div}_\theta \varepsilon \mathbf{y}_\theta. \tag{2.22}$$

(ii) Для выбранных $\mathbf{y}, \mathbf{w} \in \operatorname{Dom} M^T$ имеем равенства

$$\begin{aligned}
&(M^T\mathbf{y}, M^T\mathbf{w})_{\mathcal{L}^T_\theta} \\
&\qquad \text{см. (2.18)} \\
&= (\mathbf{y}_\theta, \mathbf{w}_\theta)_{\mathbf{L}_{2,\varepsilon}(\Omega^T)} \\
&\quad + \left(\frac{1}{\varepsilon}\operatorname{div}_\theta \varepsilon \mathbf{y}_\theta, \Lambda[cw^0]\right)_{L_{2,\varepsilon}(\Omega^T)} + \left(\Lambda[cy^0], \frac{1}{\varepsilon}\operatorname{div}_\theta \varepsilon \mathbf{w}_\theta\right)_{L_{2,\varepsilon}(\Omega^T)} \\
&\quad - \left(\frac{1}{\varepsilon}\operatorname{div}_\theta \varepsilon \nabla_\theta \Lambda[cy^0], \Lambda[cw^0]\right)_{L_{2,\varepsilon}(\Omega^T)} \\
&\qquad \text{см. (2.22), (2.13)} \\
&= (\mathbf{y}_\theta, \mathbf{w}_\theta)_{\mathbf{L}_{2,\varepsilon}(\Omega^T)} + (D^*[cy^0], \Lambda[cw^0])_{L_{2,\varepsilon}(\Omega^T)} \\
&\quad + (\Lambda[cy^0], D^*[cw^0])_{L_{2,\varepsilon}(\Omega^T)} + (\Lambda^* B \Lambda[cy^0], cw^0)_{L_{2,\varepsilon}(\Omega^T)} \\
&\qquad \text{применяя (2.16) с учетом (2.20)} \\
&= (\mathbf{y}_\theta, \mathbf{w}_\theta)_{\mathbf{L}_{2,\varepsilon}(\Omega^T)} + (\{\Lambda^* D^* + D\Lambda + \Lambda^* B \Lambda\}[cy^0], cw^0)_{L_{2,\varepsilon}(\Omega^T)} \\
&\qquad \text{см. (2.17)} \\
&= (\mathbf{y}_\theta, \mathbf{w}_\theta)_{\mathbf{L}_{2,\varepsilon}(\Omega^T)} + (cy^0, cw^0)_{L_{2,\varepsilon}(\Omega^T)} \\
&= (\mathbf{y}, \mathbf{w})_{\mathcal{J}^T}.
\end{aligned}$$

Следовательно, M^T есть изометрия.

(iii) Теорема, очевидно, будет доказана, если будет установлена плотность $\operatorname{Ran} M^T$ в $\mathcal{L}^T_\theta$. Множество $\dot{\mathcal{L}}^T_\theta := \mathcal{L}^T_\theta \cap \mathbf{C}^\infty_0(\Omega^T)$ плотно в $\mathcal{L}^T_\theta$; покажем, что оно содержится в $\operatorname{Ran} M^T$. С этой целью установим разрешимость уравнения $M^T\mathbf{y} = \mathbf{v}$ или

$$\mathbf{y}_\theta - \nabla_\theta \Lambda[cy^0] = \mathbf{v}$$

с правой частью $\mathbf{v} \in \dot{\mathcal{L}}_\theta^T$. Это уравнение векторное; сведем вопрос о его разрешимости к скалярной задаче. Применяя к обеим частям операцию $\Lambda^* \frac{1}{\varepsilon} \mathrm{div}_\theta \varepsilon$ и вспоминая определение оператора B, имеем

$$\begin{aligned}
&\Lambda^* \frac{1}{\varepsilon} \mathrm{div}_\theta \varepsilon \mathbf{y}_\theta + \Lambda^* B \Lambda [cy^0] \\
&\qquad \text{см. (2.22)} \\
&\qquad = \{\Lambda^* D^* + \Lambda^* B \Lambda\}[cy^0] \\
&\qquad \text{см. (2.17)} \\
&\qquad = (\mathbf{I} - D\Lambda)[cy^0] = \Lambda^* \frac{1}{\varepsilon} \mathrm{div}_\theta \varepsilon \mathbf{v}.
\end{aligned}$$

Обозначим в последнем равенстве $\Lambda[cy^0] =: \varphi$, $-\Lambda^* \frac{1}{\varepsilon} \mathrm{div}_\theta \varepsilon \mathbf{v} =: \psi \in C_0^\infty(\Omega^T)$; вспоминая определение D и учитывая (2.20), получаем задачу для φ:

$$\left(\frac{1}{c} \frac{\partial}{\partial \tau} - \Lambda^{-1}\right) \varphi = \psi \quad \text{в } \Omega^T; \tag{2.23}$$

$$\varphi|_{\tau = T} = 0. \tag{2.24}$$

В работе [5] с использованием теории абстрактных параболических уравнений установлено, что эта задача имеет единственное гладкое в Ω^T решение. Заметим, что параболичность задачи (2.23), (2.24) есть следствие положительной определенности оператора Λ^{-1} в подходящем весовом пространстве, которая в свою очередь следует из положительности оператора Кальдерона (см. (2.10)).

По решению φ построим поле $\mathbf{y} = \mathbf{y}_\theta + y^0 \mathbf{r}_0$, положив $\mathbf{y}_\theta = \mathbf{v} + \nabla_\theta \varphi$, $y^0 = \frac{1}{c} \Lambda^{-1} \varphi$. Легко устанавливается его гладкость внутри Ω^T; некоторой дополнительной работы требует проверка гладкости $\mathbf{y}$ вплоть до границы Γ [5]. Проверим, что поле $\mathbf{y}$ ε-соленоидально. Справедливы равенства:

$$\begin{aligned}
&\Lambda^* \left[\frac{1}{\varepsilon} \mathrm{div}\, \varepsilon \mathbf{y}\right] \\
&\qquad \text{см. (2.21)} \\
&\qquad = \Lambda^* \left\{ - D^* \left[c \frac{1}{c} \Lambda^{-1} \varphi\right] + \frac{1}{\varepsilon} \mathrm{div}_\theta \varepsilon [\mathbf{v} + \nabla_\theta \varphi] \right\} \\
&\qquad = \{-\Lambda^* D^* - \Lambda^* B \Lambda\} \Lambda^{-1} \varphi + \Lambda^* \frac{1}{\varepsilon} \mathrm{div}_\theta \varepsilon \mathbf{v} \\
&\qquad \text{см. (2.17)} \\
&\qquad = \{D\Lambda - 1\} \Lambda^{-1} \varphi - \psi = (D - \Lambda^{-1}) \varphi - \psi \\
&\qquad \text{см. (2.23)} \\
&\qquad = 0.
\end{aligned}$$

По инъективности Λ^*, видной из (2.13), заключаем: $\operatorname{div} \varepsilon \mathbf{y} = 0$, т.е. $\mathbf{y} \in J^T$. Проверим выполнение равенства $M^T \mathbf{y} = \mathbf{v}$:

$$M^T \mathbf{y} = (\mathbf{v} + \nabla_\theta \varphi) - \nabla_\theta \Lambda \left[c \frac{1}{c} \Lambda^{-1} \varphi \right] = \mathbf{v}.$$

Итак, установлено, что $\operatorname{Ran} M^T$ плотен в $\mathcal{L}_\theta^T$. Теорема доказана.

Добавим, что аргументы, приведенные в [4] для оправдания соотношения $\operatorname{clos} \operatorname{Ran} M^T = \mathcal{L}_\theta^T$, недостаточны; в работе [5] этот пробел был устранен.

Всюду ниже унитарное расширение M^T на J^T обозначается тем же символом M^T.

Уравнение (2.17) имеет прямой аналог в размерности 2. Последний, в случае $\Omega = \{x \in \mathbf{R}^2 \mid |x| < 1\}$ простыми преобразованиями (замена переменных, масштабирование) переводится в известное уравнение Риккати для отображения „Dirichlet-to-Neumann", лежащее в основе одного из подходов к импедансной томографии (так называемый Layer Stripping Method, см. [21]). Появление этого уравнения и его важная роль в круге вопросов, связанных с проектированием соленоидальных полей, — новый и, на наш взгляд, весьма неожиданный факт.

2.8. Изображения. Операторы Π^T и M^T унитарны; их композиция

$$I^T = \Pi^T M^T$$

есть унитарный оператор из J^T на $\mathcal{F}^T$. Мы называем I^T *оператором изображения*; образ $\widetilde{\mathbf{y}} = I^T \mathbf{y}$ называется *изображением* поля $\mathbf{y}$; изображение есть касательное поле на выкройке Θ^T. Оператору I^T предстоит сыграть важную роль в обратной задаче; здесь мы коротко остановимся на его интерпретации в свете спектральной теоремы.

Пусть

$$\mathcal{T} := \{\mathbf{g} \in \mathbf{L}_2(\Gamma) \mid \mathbf{g} \cdot \nu = 0\}$$

есть пространство касательных полей на Γ. Пространство $\mathcal{F}^T$ можно рассматривать как пространство $\mathcal{T}$-значных функций переменной $\tau \in [0, T]$:

$$\mathcal{F}^T := \mathbf{L}_2([0, T]; \mathcal{T}); \tag{2.25}$$

в нем имеется семейство проекторов-срезок

$$(X^\xi \mathbf{f})(\tau) := \begin{cases} \mathbf{f}(\tau), & 0 \le \tau \le \xi; \\ 0, & \xi < \tau \le T \end{cases}$$

$(0 \le \xi \le T)$; оператор $\widehat{\tau} := \int\limits_0^T \xi\, dX^\xi$ есть оператор умножения на независимую переменную:

$$(\widehat{\tau}\mathbf{f})(\tau) := \tau\mathbf{f}(\tau), \quad 0 \le \tau \le T.$$

Семейство проекторов $\{P^\xi\}$ в J^T определяет самосопряженный оператор

$$\widehat{\sigma} := \int\limits_0^T \xi\, dP^\xi.$$

Лемма 2.3. *Справедливы соотношения:*

$$I^T P^\xi = X^\xi I^T; \quad I^T \widehat{\sigma} = \widehat{\tau} I^T. \tag{2.26}$$

Доказательство. См. [5].

Таким образом, оператор I^T играет роль спектрального преобразования Фурье, диагонализующего оператор $\widehat{\sigma}$. Дополнительно отметим, что соответствие „поле-изображение“ сохраняет гладкость: $I^T[J^T \cap \mathbf{C}^\infty(\overline{\Omega}^T)] = \mathcal{F}^T \cap \mathbf{C}^\infty(\overline{\Theta}^T)$; при этом выполняется равенство

$$(I^T\mathbf{y})|_{\tau=0} = \varkappa_0 \mathbf{y}_\theta|_\Gamma, \tag{2.27}$$

с $\varkappa_0 := \varkappa|_\Gamma = \left(\frac{\varepsilon}{\mu}\right)^{1/4}\Big|_\Gamma$, вытекающее из соотношений

$$(M^T\mathbf{y})|_{\Gamma^\xi} = \{\mathbf{y}_\theta - \nabla_\theta \Lambda[cy^0]\}|_{\Gamma^\xi} \overset{\xi\to 0}{\to} \mathbf{y}_\theta|_\Gamma$$

(см. (vi), п. 2.5) и определения Π^T.

2.9. Оператор $I^T(-\frac{1}{\varepsilon}\mathrm{rot}\frac{1}{\mu}\mathrm{rot})(I^T)^*$. На полях класса $\mathbf{H}^2(\Omega)$ (здесь и далее $\mathbf{H}^s(\dots)$ — векторные соболевские классы) определим оператор

$$L := -\frac{1}{\varepsilon}\mathrm{rot}\frac{1}{\mu}\mathrm{rot}.$$

Приведем формулу Грина

$$\int_\Omega dx\varepsilon[L\mathbf{y}\cdot\mathbf{w}-\mathbf{y}\cdot L\mathbf{w}]=\int_\Gamma d\Gamma\left[\left(\nu\times\frac{1}{\mu}\operatorname{rot}\mathbf{y}\right)\cdot\mathbf{w}_\theta-\mathbf{y}_\theta\cdot\left(\nu\times\frac{1}{\mu}\operatorname{rot}\mathbf{w}\right)\right]. \tag{2.28}$$

В силу равенства $\operatorname{rot}\operatorname{rot}=-\Delta+\nabla\operatorname{div}$ на ε-соленоидальных полях справедливо представление

$$L=\frac{1}{\varepsilon\mu}\Delta+\dots \quad \text{на } J\cap\mathbf{H}^2(\Omega), \tag{2.29}$$

в котором опущены члены младших порядков.

Отметим еще один известный факт: множество

$$J^1_\nu:=\{\mathbf{y}\in J\cap\mathbf{H}^1(\Omega)\mid \mathbf{y}_\theta=0 \quad \text{на } \Gamma\}$$

плотно в J [8], а оператор $L_0:J\to J$, $\operatorname{Dom}L_0=\mathbf{H}^2(\Omega)\cap J^1_\nu$, $L_0\mathbf{y}:=L\mathbf{y}$ самосопряжен в J. Более того, L_0 неположителен и имеет дискретный спектр $\{\lambda_k\}_{k=1}^\infty$: $0\ge\lambda_1\ge\lambda_2\ge\dots,\ \lambda_k\to-\infty$; если группа $\pi_1(\Omega)$ тривиальна, то L_0 отрицательно определен: $0>\lambda_1\ge\lambda_2\ge\dots$

Рассмотрим оператор $L^T:J^T\to J^T$, $\operatorname{Dom}L^T=J^T\cap\mathbf{C}^\infty(\overline{\Omega}^T)$, $L^T\mathbf{y}:=-\frac{1}{\varepsilon}\operatorname{rot}\frac{1}{\mu}\operatorname{rot}\mathbf{y}$. Преобразование $I^T:J^T\to\mathcal{F}^T$ индуцирует в $\mathcal{F}^T$ оператор

$$\widetilde{L}^T:=(I^T)L^T(I^T)^*$$

с областью определения $\operatorname{Dom}\widetilde{L}^T=\mathcal{F}^T\cap\mathbf{C}^\infty(\overline{\Theta}^T)$. Для обратной задачи весьма важно представление $\widetilde{L}^T$, к описанию которого мы переходим.

Вернемся к представлению (2.25), рассматривая элементы $\mathcal{F}^T$ как $\mathcal{T}$-значные функции. Скажем, что оператор $A:\mathcal{F}^T\to\mathcal{F}^T$ является *послойным*, если он определяется семейством операторов $A(\tau):\mathcal{T}\to\mathcal{T}$, $0\le\tau\le T$, и действует по правилу:

$$(A\mathbf{f})(\tau)=A(\tau)\mathbf{f}(\tau),\quad \tau\in[0,T].$$

Далее, пусть $\sigma\subset\Gamma$ есть окрестность, покрываемая локальными координатами γ^1,γ^2; $\widetilde{\mathbf{r}}_1,\widetilde{\mathbf{r}}_2$ — суть два базисных поля в $\sigma\times[0,T]\subset\overline{\Theta}^T$, которые не зависят от τ и определяются равенствами

$$\widetilde{\mathbf{r}}_\alpha(\gamma,\tau)=\mathbf{r}_\alpha(\gamma,0);$$

поле $\mathbf{f}\in\mathcal{F}^T$ представимо на $\sigma\times[0,T]$ в виде $\mathbf{f}=f^\alpha\widetilde{\mathbf{r}}_\alpha$. Напомним, что $\{h_{\alpha\beta}(\gamma,\tau)\}$ есть часть матрицы тензора h в п.г.к. (см. (1.4), п. 1.5); $\{h^{\alpha\beta}\}:=\{h_{\alpha\beta}\}^{-1}$. Наконец, введем класс $\mathcal{T}_+:=\mathcal{T}\cap\mathbf{H}^1(\Gamma)$ (с $\mathbf{H}^1$-топологией).

Теорема 2.3. *Для гладкого поля* $\mathbf{f} = f^\alpha \widetilde{\mathbf{r}}_\alpha$ *на* $\sigma \times [0, T]$ *справедливо представление:*

$$\widetilde{L}^T \mathbf{f} = \left[\left(\frac{\partial^2}{\partial \tau^2} + h^{\mu\nu} \frac{\partial^2}{\partial \gamma^\mu \partial \gamma^\nu}\right) f^\alpha\right] \widetilde{\mathbf{r}}_\alpha + S\mathbf{f}, \tag{2.30}$$

в котором S *есть послойный оператор, такой, что каждый из операторов* $S(\tau) : \mathcal{T} \to \mathcal{T}$, $\mathrm{Dom}\, S(\tau) = \mathcal{T} \cap \mathbf{C}^\infty(\Gamma)$ *ограничен как оператор из* $\mathcal{T}_+$ *в* $\mathcal{T}$ *равномерно по* τ *на любом интервале, отделенном от нуля:* $\|S(\tau)\|_{\mathcal{T}_1 \to \mathcal{T}} \leq C(\delta)$ *при* $\tau \in [\delta, T]$, $\delta > 0$.

Доказательство отнесено в приложение B. Отметим, что установленный там результат допускает инвариантную формулировку в терминах псевдодифференциальных операторов.

Теорема 2.4. *Справедливо представление*

$$\widetilde{L}^T = \frac{\partial^2}{\partial \tau^2} + H, \tag{2.31}$$

в котором H *есть послойный оператор такой, что каждый* $H(\tau) : \mathcal{T} \to \mathcal{T}$, $0 < \tau \leq T$ *есть ПДО второго порядка с главным символом*

$$\mathrm{Symb}_{H(\tau)}(\gamma, \mathbf{k}) = |\mathbf{k}|^2_{(\gamma,\tau)} Id, \tag{2.32}$$

где $|\mathbf{k}|^2_{(\gamma,\tau)} := h^{\mu\nu}(\gamma, \tau) k_\mu k_\nu$; k_α *— переменные, двойственные к* γ^α; Id *— тождественный оператор в* $T^*_\gamma \Gamma$.

§3. Динамика

3.1. Система Максвелла с граничным управлением. Электрическая подсистема. Рассмотрения п. п. 3.1–3.4 относятся к произвольным T; условие $T < T_\omega$ здесь не используется. Фиксируем $T > 0$ и обозначим $Q^T := \Omega \times (0, T)$; рассмотрим систему Максвелла:

$$\varepsilon \mathbf{e}_t = \mathrm{rot}\, \mathbf{h}, \quad \mu \mathbf{h}_t = -\mathrm{rot}\, \mathbf{e} \quad \text{в } Q^T; \tag{3.1}$$

$$\mathbf{e}|_{t=0} = 0, \quad \mathbf{h}|_{t=0} = 0 \quad \text{в } \Omega; \tag{3.2}$$

$$\mathbf{e}_\theta|_{\Gamma \times [0,T]} = \mathbf{f} \tag{3.3}$$

с *граничным управлением* $\mathbf{f}$; пусть $\mathbf{e} = \mathbf{e}^{\mathbf{f}}(x,t)$, $\mathbf{h} = \mathbf{h}^{\mathbf{f}}(x,t)$ есть ее решение. Отметим равенства $\operatorname{div} \varepsilon \mathbf{e}^{\mathbf{f}}(\cdot,t) = \operatorname{div} \mu \mathbf{h}^{\mathbf{f}}(\cdot,t) = 0$ в Ω, следующие из (3.1), (3.2). Компоненты $\mathbf{e}^{\mathbf{f}}$ и $\mathbf{h}^{\mathbf{f}}$ будем называть волнами.

Исключая $\mathbf{h}$ из (3.1)–(3.3), получим систему для электрической компоненты:

$$\mathbf{e}_{tt} - L\mathbf{e} = 0 \quad \text{в } Q^T; \tag{3.4}$$

$$\mathbf{e}|_{t=0} = \mathbf{e}_t|_{t=0} = 0 \quad \text{в } \Omega; \tag{3.5}$$

$$\mathbf{e}_\theta|_{\Gamma\times[0,T]} = \mathbf{f}. \tag{3.6}$$

Система (3.4)–(3.6) — основной объект дальнейших рассмотрений; приведем ряд свойств ее решения $\mathbf{e}^{\mathbf{f}}$. Оговоримся, что под решением понимается адекватно определенное обобщенное решение (см. цитируемую ниже литературу).

Введем класс ε-соленоидальных полей $J_+ := J \cap \mathbf{H}^1(\Omega)$ (с $\mathbf{H}^1$-топологией) и оснащение

$$J_- \supset J \supset J_+,$$

в котором $J_- = (J_+)'$ есть пространство, двойственное к J_+, относительно J.

Введем *пространство управлений*

$$F^T := \{\mathbf{f} \in \mathbf{L}_2(\Gamma \times [0,T]) \mid \mathbf{f} \cdot \boldsymbol{\nu} = 0\} = \mathbf{L}_2((0,T);\mathcal{T}),$$

элементы которого суть касательные к Γ поля, зависящие от времени. Обозначим $\mathcal{T}_+ := \mathcal{T} \cap \mathbf{H}^1(\Gamma)$, $\mathcal{T}_- := (\mathcal{T}_+)'$ (двойственность относительно $\mathcal{T}$) и введем оснащение

$$F_-^T \supset F^T \supset F_+^T,$$

в котором $F_+^T := \mathbf{L}_2((0,T);\mathcal{T}_+)$, $F_-^T := (F_+^T)' = \mathbf{L}_2((0,T);\mathcal{T}_-)$. Отнесем $\mathbf{f}$ к классу гладких управлений $\mathcal{M}^T$, если $\mathbf{f} \in F^T \cap \mathbf{C}^\infty(\Gamma \times [0,T])$ и $\mathbf{f} = \mathbf{0}$ вблизи $\Gamma \times \{t=0\}$.

(i) При $\mathbf{f} \in F^T$ задача (3.4)–(3.6) имеет единственное решение $\mathbf{e}^{\mathbf{f}} \in \mathbf{L}_2(Q^T) \cap C([0,T];J_-)$, причем отображение $\mathbf{f} \to \mathbf{e}^{\mathbf{f}}$ непрерывно из F^T в $C([0,T];J_-)$ [10, 14].

(ii) При $\mathbf{f} \in F_+^T$ имеет место включение $\mathbf{e}^{\mathbf{f}} \in C([0,T];J)$, причем отображение $\mathbf{f} \to \mathbf{e}^{\mathbf{f}}$ непрерывно из F_+^T в $C([0,T];J)$ (следует из результатов [15]).

(iii) При $\mathbf{f} \in \mathcal{M}^T$ решение $\mathbf{e}^{\mathbf{f}}$ является классическим, $\mathbf{e}^{\mathbf{f}} \in \mathbf{C}^\infty(\overline{Q}^T)$.

(iv) В силу (2.29) уравнение (3.4) оказывается гиперболическим; это приводит к известному свойству конечности скорости распространения волн: $\mathrm{e}^{\mathrm{f}}(x,t) = 0$ при $t < \tau(x)$, что равносильно включениям

$$\operatorname{supp} \mathrm{e}^{\mathrm{f}}(\cdot,\xi) \subset \overline{\Omega}^{\xi}, \quad 0 < \xi \le T. \tag{3.7}$$

В п. 3.2–3.4 мы снабжаем задачу (3.4)–(3.6) стандартными атрибутами динамической системы: пространствами и операторами.

3.2. Оператор управления. Свойство (i), п. 3.1 обеспечивает непрерывность отображения $W^T : \mathrm{f} \to \mathrm{e}^{\mathrm{f}}(\cdot, T)$ из F^T в J_-.

Лемма 3.1. *При временах $T < T_*$ отображение W^T инъективно.*

Доказательство. Выберем $\mathrm{g} \in Ker\, W^T$ и покажем, что $\mathrm{g} = 0$. Пусть $\mathrm{e}^{\mathrm{g}} \in C([0,T]; J_-)$ есть соответствующее решение; рассмотрим продолжение

$$\mathrm{e}(\cdot,t) := \begin{cases} 0, & -\infty < t < 0; \\ \mathrm{e}^{\mathrm{g}}(\cdot,t), & 0 \ \le t < T; \\ -\mathrm{e}^{\mathrm{g}}(\cdot,2T-t), & T \ \le t < 2T; \\ 0 & 2T \ \le t < \infty. \end{cases}$$

По выбору g имеем $\mathrm{e}^{\mathrm{g}}(\cdot,T) = 0$; поэтому продолжение по нечетности не нарушает гладкости: нетрудно показать, что e удовлетворяет уравнению

$$\left(\frac{\partial^2}{\partial \tau^2} - L\right)\mathrm{e} = 0 \quad \text{в } \Omega \times (-\infty,\infty), \tag{3.8}$$

являясь решением класса $C((-\infty,\infty);\ J_-)$.

Выберем функцию $\varphi = \varphi(t)$ со свойствами: $\varphi \in C_0^\infty(-\infty,\infty)$; $\varphi \ge 0$; $\varphi(-t) = \varphi(t)$; $\operatorname{supp}\varphi \subset [-1,1]$; $\int\limits_{-1}^{1} \varphi(t)dt = 1$; обозначим $\varphi_\delta = \varphi_\delta(t) := \frac{1}{\delta}\varphi\left(\frac{t}{\delta}\right)$; при $\delta \to 0$ функции φ_δ сходятся к функции Дирака. Свертка по времени

$$\mathrm{e}_\delta := \mathrm{e} * \varphi_\delta$$

является решением уравнения (3.8) класса $C^\infty((-\infty,\infty);\ J_-)$. Из уравнения имеем $L^j \mathrm{e}_\delta(\cdot,t) = \frac{\partial^{2j}}{\partial t^{2j}}\mathrm{e}_\delta(\cdot,t) \in J_- \subset \mathrm{H}^{-1}(\Omega)$ при любых t и $j = 0,1,\ldots$; по эллиптичности L (см. (2.29)) заключаем: $\mathbf{e}_\delta(\cdot,t) \in \mathbf{H}^{2j-1}_{loc}(\Omega)$ с любым $j \geq 0$, т.е. $\mathbf{e}_\delta(\cdot,t)$ — поле, гладкое внутри Ω. Следовательно, $\mathbf{e}_\delta \in \mathbf{C}^\infty(\Omega \times (-\infty,\infty))$; кроме того, вместе с $\mathbf{e}$, решение $\mathbf{e}_\delta$ финитно по времени.

Применяя преобразование Фурье

$$\widetilde{\mathbf{e}}_\delta(\cdot,\omega) = \frac{1}{2\pi}\int\limits_{-\infty}^{\infty} e^{-i\omega t}\mathbf{e}_\delta(\cdot,t)dt$$

в силу (3.8) и (2.29), получаем

$$(\Delta + \cdots + \varepsilon\mu\omega^2)\widetilde{\mathbf{e}}_\delta(\cdot,\omega) = 0 \quad \text{в } \Omega. \tag{3.9}$$

Для исходного решения $\mathbf{e}^\mathbf{g}$ свойство (3.7) приводит к включению $\operatorname{supp} \mathbf{e}^\mathbf{g}(\cdot,t) \subset \Omega^T$, $0 < t < T$, что влечет $\mathbf{e} = \mathbf{e}_\delta = \mathbf{0}$ в $(\Omega \setminus \overline{\Omega}^T) \times (-\infty,\infty)$. Из последнего следует

$$\widetilde{\mathbf{e}}_\delta(\cdot,\omega) = 0 \quad \text{в } \Omega \setminus \overline{\Omega}^T. \tag{3.10}$$

Таким образом, $\widetilde{\mathbf{e}}_\delta$ оказывается решением эллиптической системы (3.9) с постоянной диагональной главной частью, аннулирующимся на открытом множестве (3.10). С помощью той же техники, что и в случае скалярного эллиптического уравнения (карлемановских оценок), можно показать, что $\widetilde{\mathbf{e}}_\delta(\cdot,\omega)$ аннулируется всюду в Ω при всех ω. Поэтому $\widetilde{\mathbf{e}}_\delta \equiv 0$; вслед за ним $\mathbf{e}_\delta \equiv \mathbf{0}$, далее, $\mathbf{e} \equiv 0$, $\mathbf{e}^\mathbf{g} \equiv 0$ и, наконец, $\mathbf{g} = 0$. Лемма доказана.

По свойствам (ii), (iv) п. 3.1 для любого $\mathbf{f} \in F^T_+$ имеет место включение $\mathbf{e}^\mathbf{f}(\cdot,T) \in J^T$, что позволяет определить отображение $W^T : F^T \to J^T$, $\operatorname{Dom} W^T = F^T_+$,

$$W^T\mathbf{f} := \mathbf{e}^\mathbf{f}(\cdot,T),$$

являющееся сужением W^T. Мы называем W^T *оператором управления*; он реализует соответствие „вход $\to$ состояние" в системе (3.4)-(3.6). Оператор W^T неограничен;[2] из непрерывности W^T легко следует, что W^T допускает замыкание; согласно лемме 3.1, имеем

$$Ker\, W^T = \{0\}, \quad T < T_*. \tag{3.11}$$

Пространство $J^T \supset \operatorname{Ran} W^T$ называется *внутренним пространством* системы (3.4)-(3.6); пространство F^T — *внешним*.

[2]Контрпример к гипотезе $\|W^T\| < \infty$ нам указал Д. Татару.

3.3. Двойственная система. Система

$$\mathbf{w}_{tt} - L\mathbf{w} = 0 \quad \text{в } Q^T; \tag{3.12}$$

$$\mathbf{w}|_{t=T} = 0, \mathbf{w}_t|_{t=T} = \mathbf{y} \quad \text{в } \Omega; \tag{3.13}$$

$$\mathbf{w}_\theta|_{\Gamma\times[0,T]} = 0 \tag{3.14}$$

называется *двойственной* к системе (3.4)–(3.6); ее решение $\mathbf{w} = \mathbf{w}^\mathbf{y}(x,t)$ обладает следующими свойствами:

(i) пусть $\mathbf{y} \in \bigcap_{k=0}^{\infty} \operatorname{Dom} L_0^k$ (оператор L_0 определен в п. 2.9), что равносильно гладкости $\mathbf{y}$ и выполнению естественных условий согласования на Γ во всех порядках; в этом случае задача имеет единственное классическое решение $\mathbf{w}^\mathbf{y} \in \mathbf{C}^\infty(\overline{Q}^T)$;

(ii) при $\mathbf{y} \in J$ определено решение $\mathbf{w}^\mathbf{y} \in C([0,T]; J_+)$, причем отображение $\mathbf{y} \to \mathbf{w}^\mathbf{y}$ непрерывно в соответствующих нормах [14];

(iii) гиперболичность уравнения (3.12) на ε-соленоидальных полях приводит к известному свойству конечности области влияния: решение $\mathbf{w}^\mathbf{y}$ на множестве $\{(x,t) \in Q^T \mid \tau(x) < t\}$ определяется значениями $\mathbf{y}|_{\Omega^T}$ (не зависит от поведения $\mathbf{y}$ в $\Omega \setminus \Omega^T$).

Предложение 3.1. *Если* $\mathbf{f}$ *и* $\mathbf{y}$ *таковы, что решения* $\mathbf{e}^\mathbf{f}$ *и* $\mathbf{w}^\mathbf{y}$ *гладки в* $\overline{Q}^T$, *то выполнено соотношение двойственности*

$$\left(\mathbf{e}^\mathbf{f}(\cdot,T),\mathbf{y}\right)_J = \left(\mathbf{f}, \boldsymbol{\nu} \times \frac{1}{\mu}\operatorname{rot}\mathbf{w}^\mathbf{y}\Big|_{\Gamma\times[0,T]}\right)_{F^T}. \tag{3.15}$$

Этот результат легко устанавливается интегрированием по частям с использованием формулы Грина (2.28) в равенстве

$$0 = \int_{Q^T} dx\,dt\,\varepsilon[\mathbf{e}^\mathbf{f}_{tt} - L\mathbf{e}^\mathbf{f}]\cdot\mathbf{w}^\mathbf{y}.$$

Отображение $\mathcal{O} : \mathbf{y} \to \boldsymbol{\nu} \times \frac{1}{\mu}\operatorname{rot}\mathbf{w}^\mathbf{y}\Big|_{\Gamma\times[0,T]}$ определено на гладких $\mathbf{y}$, удовлетворяющих условиям согласования (см. (i)); свойство (ii), п. 3.1 и соотношение (3.15) позволяют расширить его до непрерывного отображения из J в F^T_-. Обозначим $\mathcal{O}^T := \mathcal{O}|_{J^T}$; следующий результат выводится из того же соотношения двойственности.

Предложение 3.2. *Отображение $\mathcal{O}^T : J^T \to F_-^T$ является расширением по непрерывности оператора $(W^T)^* : J^T \to F^T$.*

Оператор $\mathcal{O}^T$ называется *оператором наблюдения.*

3.4. Оператор реакции. Соответствие „вход $\to$ выход" в системе (3.4)–(3.6) реализуется *оператором реакции* $R^T : F^T \to F^T$, $\operatorname{Dom} R^T = \mathcal{M}^T$,

$$(R^T\mathbf{f})(\gamma,t) := \boldsymbol{\nu} \times \frac{1}{\mu}\operatorname{rot}\int\limits_0^t \mathbf{e}^{\mathbf{f}}(\gamma,s)\,ds, \quad (\gamma,t) \in \Gamma \times [0,T];$$

в терминах исходной системы Максвелла оператор реакции определяется соответствием $\mathbf{e}_\theta^{\mathbf{f}}|_{\Gamma\times[0,T]} \to \mathbf{h}_\theta^{\mathbf{f}}|_{\Gamma\times[0,T]}$. Можно показать, что R^T допускает замыкание.

Рассмотрим систему (3.4)–(3.6) с удвоенным финальным моментом $2T$; пусть R^{2T} есть соответствующий оператор реакции. Ввиду конечности скорости распространения волн (см. (iv), п. 3.1) он зависит от проводимостей ε, μ *локально*: R^{2T} определяется значениями ε, μ в Ω^T и не зависит от их поведения в $\Omega \setminus \Omega^T$.

Ниже оператору R^{2T} предстоит играть роль данных обратной задачи.

3.5. Управляемость. Как обычно в BC-методе, мы установим, что рассматриваемая динамическая система является управляемой в подходящем смысле [2]. Это свойство окажется весьма существенным при решении обратной задачи.

Задача граничного управления для системы (3.4)–(3.6) ставится так: при данном $T > 0$ по заданному $\mathbf{y} \in J^T$ найти управление $\mathbf{f} \in F^T$, удовлетворяющее равенству $\mathbf{e}^{\mathbf{f}}(\cdot, T) = \mathbf{y}$. Она, очевидно, равносильна уравнению $W^T\mathbf{f} = \mathbf{y}$.

Предложение 3.3. *При $T < T_*$ задача граничного управления имеет не более одного решения.*

Это следствие (3.11) показывает, что в исходной системе Максвелла (3.1)–(3.3) при временах $T < T_*$ компонента $\mathbf{e}^{\mathbf{f}}$ однозначно определяет $\mathbf{f}$ и контролировать обе компоненты $\mathbf{e}^{\mathbf{f}}$ и $\mathbf{h}^{\mathbf{f}}$ одним управлением невозможно. Именно этим обстоятельством мотивируется выделение электрической подсистемы.

Вернемся к системе (3.4)–(3.6) множество

$$\mathcal{E}^T := \operatorname{Ran} W^T \subset J^T$$

называется *достижимым* к моменту T.

Теорема 3.1. *При временах $T < T_\omega$ справедливо соотношение*

$$\operatorname{clos} \mathcal{E}^T = J^T. \tag{3.16}$$

Доказательство. см. в приложении C; оно основано на фундаментальной теореме единственности Хольмгрена-Йона- Татару.

Из (3.16) следует, что любое ε-соленоидальное поле в подобласти Ω^T можно аппроксимировать волнами $\mathbf{e}^{\mathbf{f}}(\cdot, T)$ в $\mathbf{L}_{2,\varepsilon}$-норме. В теории управления об этом свойстве говорят, как о *приближенной управляемости* системы (3.4)-(3.6). Управляемость — аналог свойства полноты волновых операторов в теории рассеяния.

Во внешнем пространстве F^T рассмотрим семейство подпространств

$$F^{T,\xi} := \{\mathbf{f} \in F^T \mid \mathbf{f}(\cdot, t) = 0,\ 0 \le t < T - \xi\}, \quad 0 \le \xi \le T, \tag{3.17}$$

образованных запаздывающими управлениями ($F^{T,0} = \{0\}$, $F^{T,T} = F^T$); обозначим $F_+^{T,\xi} := F_+^T \cap F^{T,\xi} \subset \operatorname{Dom} W^T$. Запаздывание управления приводит к запаздыванию волны: по свойству (3.7) и стационарности системы (3.4)-(3.6) (независимости L от времени) для $\mathbf{f} \in F_+^{T,\xi}$ имеем включение: $\operatorname{supp} \mathbf{e}^{\mathbf{f}}(\cdot, T) \subset \overline{\Omega}^\xi$, т.е. $\mathbf{e}^{\mathbf{f}}(\cdot, T) \subset J^\xi$.

Введем расширяющееся семейство достижимых множеств

$$\mathcal{E}^\xi := W^T F_+^{T,\xi} \subset J^\xi; \tag{3.18}$$

пусть E^ξ есть проектор в $\operatorname{clos} \mathcal{E}^T$ на $\operatorname{clos} \mathcal{E}^\xi$; обозначим $E_\perp^\xi := \mathbb{I} - E^\xi$. Стационарность системы и теорема 3.1 приводят к равенствам

$$\operatorname{clos} \mathcal{E}^\xi = J^\xi, \tag{3.19}$$

из которых в свою очередь следует

$$E^\xi = P^\xi,\ E_\perp^\xi = P_\perp^\xi, \quad 0 \le \xi \le T < T_\omega. \tag{3.20}$$

Разумеется, как проекторы P^ξ, так и проекторы E^ξ определяются поведением проводимостей ε, μ, однако их совпадение — далеко не очевидный факт. Мы называем E^ξ *волновыми* проекторами.

3.6. Распространение разрывов. Рассмотрения п. 3.6, 3.7 касаются известного факта теории гиперболических систем: разрывные данные порождают разрывные волны. Описание разрывов волн составляет предмет геометрической оптики; соответствующие формулы играют ключевую роль в BC-методе.

Фиксируем $T < T_\omega$ и $\xi \in (0, T)$; обозначим

$$\theta^j(t) := \begin{cases} 0, & t < 0; \\ \frac{t^j}{j!}, & t \geq 0 \end{cases}$$

($j = 0, 1, \ldots$; $\theta^0(t)$ — функция Хевисайда); положим

$$\theta^j_s(t) := \theta^j(t - s), \quad s, t \in \mathbf{R}.$$

Выберем касательное поле $\mathrm{a} \in \mathcal{T} \cap \mathrm{C}^\infty(\Gamma)$ и рассмотрим систему

$$\mathrm{e}_{tt} - L\mathrm{e} = 0 \quad \text{в } \Omega^T \times (0, T); \tag{3.21}$$

$$\mathrm{e}|_{t=0} = \mathrm{e}_t|_{t=0} = 0 \quad \text{в } \Omega^T; \tag{3.22}$$

$$\mathrm{e}_\theta|_{\Gamma \times [0,T]} = \theta^0_{T-\xi}\mathrm{a} \tag{3.23}$$

с управлением специального вида: $\mathbf{f} = \mathbf{f}(\gamma, t) = \theta^0(t - (T - \xi))\mathrm{a}(\gamma)$. Это управление является запаздывающим: $\theta^0_{T-\xi}\mathrm{a} \in \dot{F}^{T,\xi}_+$ и разрывным при $t = T - \xi$. По конечности скорости распространения волн имеем $\operatorname{supp} \mathrm{e}^{\theta^0_{T-\xi}\mathrm{a}} \subset \{(x, t) \in \overline{Q}^T \mid t \geq \tau(x) + (T - \xi)\}$; ограничивающая носитель характеристическая поверхность

$$\mathcal{X}^{T,\xi} := \{(x, t) \in \overline{Q}^T \mid t = \tau(x) + (T - \xi)\}$$

оказывается поверхностью разрыва решения:

$$\mathrm{e}^{\theta^0_{T-\xi}\mathrm{a}}(x, \tau(x) + (T - \xi) + 0) = A(x)[\mathrm{a}(\gamma(x))]^\vee, \tag{3.24}$$

где $A = (\frac{\mu}{\mu_0})^{1/2}(\frac{cJ}{c_0 J_0})^{-1/2}$ — амплитудный множитель, $[\mathrm{a}(\gamma(x))]^\vee$ — результат параллельного переноса (в оптической метрике) вектора a из точки $\gamma(x) \in \Gamma$ в точку $x \in \Omega^T$ вдоль геодезической $l_{\gamma(x)}$ (вывод см. в [1, 20]).

Как мы сейчас увидим, описание разрывов и процедура вывода формул типа (3.24) существенно упрощаются при переходе к изображениям. В соответствии с представлением $\mathcal{F}^T = \mathrm{L}_2((0, T); \mathcal{T})$ мы рассматриваем изображение волны $\widetilde{\mathrm{e}} = I^T \mathrm{e}$ как $\mathcal{T}$-значную функцию переменной $\tau \in [0,T]$, зависящую от времени, как от параметра; по представлению $F^T = \mathrm{L}_2((0,T);\mathcal{T})$ управления суть $\mathcal{T}$-значные функции времени $t \in [0,T]$. Применяя оператор I^T в задаче (3.21)–(3.23), учитывая равенство

$$\widetilde{\mathrm{e}}|_{\tau=0} = \varkappa_0 \mathrm{e}_\theta|_\Gamma$$

(см. (2.27)) и представление (2.31), получаем систему

$$\widetilde{\mathrm{e}}_{tt} - \widetilde{\mathrm{e}}_{\tau\tau} - H(\tau)\widetilde{\mathrm{e}} = 0, \quad (\tau,t) \in (0,T)\times(0,T); \tag{3.25}$$

$$\widetilde{\mathrm{e}}|_{t=0} = \widetilde{\mathrm{e}}_t|_{t=0} = \mathbf{0} \quad \text{при } \tau \in (0,T); \tag{3.26}$$

$$\widetilde{\mathrm{e}}|_{\tau=0} = \theta^0_{T-\xi}\varkappa_0 \mathbf{a}. \tag{3.27}$$

Действуя по схеме лучевого метода (динамического варианта метода ВКБ [1, 9, 20]), ищем решение системы в виде „анзатц + невязка“:

$$\widetilde{\mathrm{e}}(\tau,t) = \sum_{j=0}^{N} \theta^j_{T-\xi}(t-\tau)\mathbf{A}_j(\tau) + d_{N+1}(\tau,t). \tag{3.28}$$

Подстановка (3.28) в (3.25) приводит к известным уравнениям переноса для $\mathcal{T}$-значных „амплитуд“:

$$2\frac{\partial \mathbf{A}_j}{\partial \tau} - \left[\frac{\partial^2}{\partial \tau^2} + H(\tau)\right]\mathbf{A}_{j-1} = 0, \quad j = 0,1,\ldots$$

($\mathbf{A}_{-1} := 0$); последовательно решая их с учетом условий $\mathbf{A}_0(0) = \varkappa_0 \mathbf{a}$ (см. (3.27)); $\mathbf{A}_j(0) = \mathbf{0}$, $j = 1,2,\ldots$, найдем

$$\mathbf{A}_0(\tau) = \varkappa_0 \mathbf{a};\ \ \mathbf{A}_1(\tau) = \frac{1}{2}\int_0^\tau [H(s)\varkappa_0 \mathbf{a}]ds;\ \ldots$$

Ограничиваясь случаем $N = 1$, получаем представление:

$$\widetilde{\mathrm{e}}^{\theta^0_{T-\xi}\mathbf{a}}(\tau,t) = \theta^0_{T-\xi}(t-\tau)\varkappa_0 \mathbf{a} + \theta^1_{T-\xi}(t-\tau)\frac{1}{2}\int_0^\tau [H(s)\varkappa_0 \mathbf{a}]ds + d_2(\tau,t), \tag{3.29}$$

причем справедлива оценка для невязки:

$$|d_2(\tau,t)| \le C\theta^2_{T-\xi}(t-\tau), \quad (\tau,t) \in [0,T] \times [0,T], \tag{3.30}$$

которая может быть установлена на том же пути, что и в случае волнового уравнения [7, 9]. Из (3.29) извлекаются формулы геометрической оптики:

$$\begin{gathered} \widetilde{\mathrm{e}}^{\theta^0_{T-\xi}\mathbf{a}}(\xi-0,T) = \varkappa_0\mathbf{a}; \\ 2\frac{d}{d\xi}\left[\left.\frac{\widetilde{\mathrm{e}}^{\theta^0_{T-\xi}\mathbf{a}}(\tau,T)-\varkappa_0\mathbf{a}}{\xi-\tau}\right|_{\tau=\xi-0}\right] = H(\xi)\varkappa_0\mathbf{a}; \end{gathered} \tag{3.31}$$

первое из них по существу является формой записи равенства (3.24).

Возвращаясь к исходному определению изображения, решение $\widetilde{\mathrm{e}}^{\theta^0_{T-\xi}\mathbf{a}}$ можно интерпретировать как бегущую по выкройке Θ^T волну; к моменту времени t она заметает часть выкройки: $\operatorname{supp}\widetilde{\mathrm{e}}^{\theta^0_{T-\xi}\mathbf{a}}(\cdot,t) \subset \Gamma\times[0,t-(T-\xi)]$; представление (3.29) описывает форму волны в окрестности ее переднего фронта $\Gamma\times\{\tau = t-(T-\xi)\}$.

3.7. Разрывы в двойственной системе. Пусть $\mathrm{y} \in J^T$ есть гладкое поле; выберем $\xi \in (0,T)$ $(T < T_\omega)$ и рассмотрим систему вида (3.12)–(3.14):

$$\begin{aligned} &\mathrm{w}_{tt} - L\mathrm{w} = 0 \quad \text{в } Q^T; \\ &\mathrm{w}|_{t=T} = 0, \quad \mathrm{w}_t|_{t=T} = P^\xi_\perp \mathrm{y} \quad \text{в } \Omega; \\ &\mathrm{w}_\theta|_{\Gamma\times[0,T]} = 0. \end{aligned}$$

Действие проектора приводит к появлению разрыва данных Коши на эквидистанте Γ^ξ; разрывные данные инициируют разрывную волну $\mathrm{w}^{P^\xi_\perp \mathrm{y}}$. Разрыв волны распространяется (в обратном времени) вдоль пространственно-временных лучей, составляющих характеристику $X^{T,\xi}$ и при $t = T-\xi$ взаимодействует с границей. В результате наблюдаемый на Γ след $\nu \times \frac{1}{\mu}\operatorname{rot}\mathrm{w}^{P^\xi_\perp\mathrm{y}}\Big|_{\Gamma\times[0,T]} = \mathcal{O}^T P^\xi_\perp \mathrm{y}$ оказывается разрывным при $t = T-\xi$; наша ближайшая цель — описать этот разрыв.

Напомним, что оператор $\mathcal{O}^T : J^T \to F^T_-$ определяется равенством $(W^T\mathrm{f},\mathrm{y})_{J^T} = (\mathrm{f},\mathcal{O}^T\mathrm{y})_{F^T}$ для $\mathrm{f} \in F^T_+$, $\mathrm{y} \in J^T$. Здесь нам удобно рассматривать $\mathcal{O}^T P^\xi_\perp \mathrm{y}$ как $\mathcal{T}_-$-значную функцию времени $t \in [0,T]$; произведение $((\mathcal{O}^T P^\xi_\perp \mathrm{y})(t),\mathrm{a})_{\mathcal{T}}$ определено для $\mathrm{a} \in \mathcal{T}_+$ и суммируемо с квадратом по t.

Предложение 3.4. *Имеет место включение*

$$\operatorname{supp} \mathcal{O}^T P_\perp^\xi \mathbf{y} \subset [0, T-\xi]. \tag{3.32}$$

В самом деле для запаздывающих управлений $\mathbf{f} \in F_+^{T,\xi}$ имеем

$$(\mathbf{f}, \mathcal{O}^T P_\perp^\xi \mathbf{y})_{F^T} = (W^T \mathbf{f}, P_\perp^\xi \mathbf{y})_{J^T} = 0,$$

(см. (3.18)) что равносильно (3.32).

Лемма 3.2. *Для* $\mathbf{y} \in J^T \cap \mathbf{C}^\infty(\overline{\Omega}^T)$ *и* $\mathbf{a} \in \mathcal{T} \cap \mathbf{C}^\infty(\Gamma)$ *справедливо соотношение:*

$$\lim_{\delta \to +0} \frac{1}{\delta} \int\limits_{T-\xi-\delta}^{T-\xi} dt\, ((\mathcal{O}^T P_\perp^\xi \mathbf{y})(t), \mathbf{a})_\mathcal{T} = (\varkappa_0 \widetilde{\mathbf{y}}(\xi), \mathbf{a})_\mathcal{T}, \tag{3.33}$$

в котором $\xi \in (0, T)$, $\widetilde{\mathbf{y}} = I^T \mathbf{y}$ *— изображение поля* $\mathbf{y}$.

Доказательство. Выберем малое $\delta > 0$; рассмотрим управление $\theta^0_{T-\xi-\delta}\mathbf{a} \in F_+^T$: $\operatorname{supp} \theta^0_{T-\xi-\delta}\mathbf{a} \subset [T-\xi-\delta, T]$. По расположению носителей (см. (3.32)) имеем

$$(\theta^0_{T-\xi-\delta}\mathbf{a}, \mathcal{O}^T P_\perp^\xi \mathbf{y})_{F^T} = \int\limits_{T-\xi-\delta}^{T-\xi} dt\, (\mathbf{a}, (\mathcal{O}^T P_\perp^\xi \mathbf{y})(t))_\mathcal{T}. \tag{3.34}$$

Пусть $X_\perp^\xi := \mathbf{I} - X^\xi$ есть проектор в $\mathcal{F}^T$, срезающий элементы на интервал $[T-\xi, T]$; согласно (2.26), имеем

$$I^T P_\perp^\xi = X_\perp^\xi I^T. \tag{3.35}$$

Для изображения $\widetilde{\mathbf{e}}^{\theta^0_{T-\xi-\delta}\mathbf{a}}$, согласно (3.29), (3.30), имеем представление

$$\widetilde{\mathbf{e}}^{\theta^0_{T-\xi-\delta}\mathbf{a}}(\tau, T) = \theta^0(\xi+\delta-\tau)\varkappa_0 \mathbf{a} + d_1(\tau, T) \tag{3.36}$$

с оценкой

$$|d_1(\tau, T)| \le C\theta^1(\xi+\delta-\tau). \tag{3.37}$$

Далее, справедливы равенства

$$
\begin{aligned}
&(\theta^0_{T-\xi-\delta}\mathrm{a}, \mathcal{O}^T P^\xi_\perp \mathrm{y})_{\mathcal{F}^T} = (W^T[\theta^0_{T-\xi-\delta}\mathrm{a}], P^\xi_\perp \mathrm{y})_{\mathcal{J}^T} \\
&\quad = (I^T W^T[\theta^0_{T-\xi-\delta}\mathrm{a}], I^T P^\xi_\perp \mathrm{y})_{\mathcal{F}^T} \\
&\quad \text{см. (3.35)} \\
&\quad = (\widetilde{\mathrm{e}}^{\theta^0_{T-\xi-\delta}\mathrm{a}}(\cdot, T), X^\xi_\perp \widetilde{\mathrm{y}})_{\mathcal{F}^T} \\
&\quad \text{см. (3.36)} \\
&\quad = \int\limits_\xi^{\xi+\delta} d\tau\, (\varkappa_0 \mathrm{a} + d_1(\tau, T), \widetilde{\mathrm{y}}(\tau))_T \\
&\quad \text{см. (3.37)} \\
&\quad = (\mathrm{a}, \varkappa_0 \widetilde{\mathrm{y}}(\xi))_T \delta + o(\delta).
\end{aligned}
\tag{3.38}
$$

Сопоставляя (3.34) с (3.38), получаем (3.33). Лемма доказана.

С учетом свойства (3.32) установленный результат можно интерпретировать, как описание разрыва функции $(\mathcal{O}^T P^\xi_\perp \mathrm{y})(t)$ при $t = T - \xi$. Соотношение (3.33) условимся записывать в виде

$$
(\mathcal{O}^T P^\xi_\perp \mathrm{y})(T - \xi - 0) = (\varkappa_0 I^T \mathrm{y})(\xi), \quad 0 < \xi < T, \tag{3.39}
$$

понимая предел в смысле, определенном леммой. По соображениям динамического характера, приведенным в начале п. 3.8, соотношение (3.39) представляет изображение поля в виде совокупности разрывов, прошедших через оптическую среду, заполняющую Ω^T и детектированных на границе. Мы называем (3.39) *амплитудной формулой*.

§4. Обратная задача

4.1. Постановка и главный результат. Пусть мы располагаем следующими данными о системе (3.4)–(3.6): известен ее оператор реакции R^{2T} и известны функции $c|_\Gamma$, $\frac{\partial c}{\partial \nu}|_\Gamma$; *обратная задача* состоит в восстановлении скорости c в подобласти Ω^T по этим данным. Такая постановка мотивирована локальным характером зависимости R^{2T} от параметров оптической среды в Ω^T (см. п. 3.4). Приведем наш основной результат.

Теорема 4.1. *При любом положительном $T < T_\omega$ данные обратной задачи определяют $c|_{\Omega^T}$ единственным образом.*

Доказательство отнесено в п. 4.5.

4.2. Связывающая форма. Билинейная форма $c^T : F^T \times F^T \to \mathbf{R}$, $\operatorname{Dom} c^T = F_+^T \times F_+^T$,

$$c^T[\mathbf{f},\mathbf{g}] := (W^T\mathbf{f}, W^T\mathbf{g})_{\mathcal{J}^T} = (\mathbf{e}^f(\cdot,T), \mathbf{e}^g(\cdot,T))_{\mathcal{J}^T} \tag{4.1}$$

называется *связывающей формой*. Она неотрицательна при всех $T > 0$, положительна при $T < T_*$ (см. (3.11)) и замыкаема вместе с оператором W^T.

Важный факт состоит в том, что значения связывающей формы можно вычислять по оператору реакции. Введем оператор нечетного продолжения $S^T : F^T \to F^{2T}$,

$$(S^T\mathbf{f})(\cdot,t) := \begin{cases} \mathbf{f}(\cdot,t), & 0 \le t < T; \\ -\mathbf{f}(\cdot,2T-t), & T \le t \le 2T; \end{cases}$$

обозначим $\mathcal{M}^{T,0} := \{\mathbf{f} \in \mathcal{M}^T \mid S^T\mathbf{f} \in \mathcal{M}^{2T}\}$ и отметим включение $S^T\mathcal{M}^{T,0} \subset \operatorname{Dom} R^{2T}$.

Лемма 4.1. *Для* $\mathbf{f} \in \mathcal{M}^{T,0}$, $\mathbf{g} \in \mathcal{M}^T$ *справедливо представление*

$$c^T[\mathbf{f},\mathbf{g}] = \left(\frac{1}{2}(S^T)^* R^{2T} S^T\mathbf{f}, \mathbf{g}\right)_{F^T}. \tag{4.2}$$

Доказательство. Выберем управления $\mathbf{f} \in S^T\mathcal{M}^{T,0}$, $\mathbf{g} \in \mathcal{M}^T$; для функции

$$w(s,t) := (\mathbf{e}^{\mathbf{f}}(\cdot,s), \mathbf{e}^{\mathbf{g}}(\cdot,t))_{\mathcal{J}}, \quad (s,t) \in [0,2T] \times [0,T]$$

имеем равенства

$$\left(\frac{\partial^2}{\partial t^2}-\frac{\partial^2}{\partial s^2}\right)w(s,t)=\int\limits_\Omega dx\,\varepsilon[\mathbf{e}^{\mathbf{f}}(\cdot,s)\cdot\mathbf{e}^{\mathbf{g}}_{tt}(\cdot,t)-\mathbf{e}^{\mathbf{f}}_{ss}(\cdot,s)\cdot\mathbf{e}^{\mathbf{g}}(\cdot,t)]$$

см. (3.4)

$$=\int\limits_\Omega dx\,\varepsilon[\mathbf{e}^{\mathbf{f}}(\cdot,s)\cdot L\mathbf{e}^{\mathbf{g}}(\cdot,t)-L\mathbf{e}^{\mathbf{f}}(\cdot,s)\cdot\mathbf{e}^{\mathbf{g}}(\cdot,t)]$$

см. (2.28)

$$=\int\limits_\Gamma d\Gamma\left\{\mathbf{e}^{\mathbf{f}}_\theta(\cdot,s)\cdot\left[\boldsymbol{\nu}\times\frac{1}{\mu}\operatorname{rot}\mathbf{e}^{\mathbf{g}}(\cdot,t)\right]-\left[\boldsymbol{\nu}\times\frac{1}{\mu}\operatorname{rot}\mathbf{e}^{\mathbf{f}}(\cdot,s)\right]\cdot\mathbf{e}^{\mathbf{g}}_\theta(\cdot,t)\right\}$$

$$=\int\limits_\Gamma d\Gamma[\mathbf{f}(\cdot,s)\cdot(R^T\mathbf{g})_t(\cdot,t)-(R^{2T}\mathbf{f})_s(\cdot,s)\cdot\mathbf{g}(\cdot,t)]=:F(s,t). \qquad (4.3)$$

В силу (3.5) имеем

$$w(s,0)=w_t(s,0)=0,\quad s\in[0,2T]. \qquad (4.4)$$

Задача (4.3), (4.4) для w решается с помощью формулы Д'Аламбера:

$$w(s,t)=\frac{1}{2}\int\limits_0^t d\eta\int\limits_{t-s+\eta}^{t+s-\eta}d\xi\,F(\xi,\eta),\quad 0\le t\le T,\ t\le s\le 2T-t;$$

подставляя $s=t=T$, получаем

$$w(T,T)=\frac{1}{2}\int\limits_0^T d\eta\int\limits_\Gamma d\Gamma\left[\int\limits_\eta^{2T-\eta}d\xi\,\mathbf{f}(\cdot,\xi)\right]\cdot(R^T\mathbf{g})_\eta(\cdot,\eta)$$
$$-\frac{1}{2}\int\limits_{\Gamma\times[0,T]}d\Gamma\,d\eta[(R^{2T}\mathbf{f})(\cdot,2T-\eta)-(R^{2T}\mathbf{f})(\cdot,\eta)]\cdot\mathbf{g}(\cdot,\eta).$$

Первый из интегралов аннулируется по нечетности f; второй легко преобразуется к виду

$$w(T,T)=\left(\frac{1}{2}(S^T)^*R^{2T}S^T\mathbf{f},\mathbf{g}\right)_{\mathcal{F}^T}. \qquad (4.5)$$

С другой стороны, имеем равенства

$$\begin{aligned} w(T,T) &= (\mathbf{e}^f(\cdot,T),\mathbf{e}^g(\cdot,T))_J \\ &= c^T[\mathbf{f},\mathbf{g}]. \end{aligned} \tag{4.6}$$

(см. (4.1)). Сопоставляя (4.5) и (4.6), получаем (4.2). Лемма доказана.[3]

Лемма 4.2. *Оператор R^{2T} определяет форму c^T.*

Доказательство. Выберем $\mathbf{f},\mathbf{g} \in F^T_+$. Воспользовавшись плотностью $\mathcal{M}^{T,0}$ и $\mathcal{M}^T$ в F^T_+, найдем последовательности $\mathbf{f}_j, \mathbf{g}_j$, аппроксимирующие $\mathbf{f}$ и $\mathbf{g}$ в метрике этого пространства. Далее, имеем

$$\begin{aligned} & c^T[\mathbf{f},\mathbf{g}] \\ & \quad \text{см. (ii), п. 3.1} \\ &= \lim c^T[\mathbf{f}_j,\mathbf{g}_j] \\ &= \quad \text{см. (4.2)} \\ &= \lim \left(\frac{1}{2}(S^T)^* R^{2T} S^T \mathbf{f}_j, \mathbf{g}_j\right)_{F^T}. \end{aligned}$$

Лемма доказана.

Добавим, что, как видно из (4.2), для восстановления c^T достаточно располагать значениями R^{2T} лишь на $S^T \mathcal{M}^{T,0}$.

4.3. Модель. Снабдим линеал $\operatorname{Dom} W^T = F^T_+ \subset F^T$ новым скалярным произведением

$$(\mathbf{f},\mathbf{g})_{J^T_\#} := c^T[\mathbf{f},\mathbf{g}], \tag{4.7}$$

невырожденным в силу (3.11); через $J^T_\#$ обозначим пополнение F^T_+ по соответствующей норме.

Введем оператор вложения $W^T_\# : F^T \to J^T_\#$, $\operatorname{Dom} W^T_\# = F^T_+$; определим оператор $U^T : J^T_\# \to J^T$,

$$U^T := W^T (W^T_\#)^{-1},$$

[3] Уравнения для w вида (4.3) с правой частью, определяемой данными обратной задачи, найдены А. С. Благовещенским.

отображающий множество $\mathcal{E}^T_\# := \operatorname{Ran} W^T_\#$ на достижимое множество $\mathcal{E}^T = \operatorname{Ran} W^T$. В силу (4.1), (4.7) оператор U^T оказывается изометрическим; его расширение по непрерывности отображает пространство $\operatorname{clos} \mathcal{E}^T_\# = J^T_\#$ на подпространство $\operatorname{clos} \mathcal{E}^T$ (за расширением сохраняем обозначение U^T).

В наших рассмотрениях пространство $J^T_\#$ играет роль изометрической копии (*модели*) пространства состояний J^T системы (3.4)–(3.6). Точнее, модель копирует достижимое подпространство $\operatorname{clos} \mathcal{E}^T$, которое, по управляемости (3.16), совпадает со всем J^T.

Связывающая модель и систему изометрия U^T индуцирует в $J^T_\#$ объекты, двойственные имеющимся в J^T: оператор

$$W^T_\# = (U^T)^{-1} W^T \tag{4.8}$$

играет роль оператора управления; оператор

$$O^T_\# := O^T U^T \tag{4.9}$$

есть аналог оператора наблюдения. Последний, по свойствам O^T (см. предложение 3.2), действует непрерывно из $J^T_\#$ в F^T_- и является расширением сопряженного $(W^T_\#)^* : J^T_\# \to F^T$.

Множества

$$\mathcal{E}^\xi_\# := W^T_\# F^{T,\xi}_+ = (U^T)^{-1} \mathcal{E}^\xi$$

— суть аналоги достижимых множеств (см. (3.18)). Пусть $E^\xi_\#$ есть проектор в $\operatorname{clos} \mathcal{E}^T_\#$ на $\operatorname{clos} \mathcal{E}^\xi_\#$, $E^\xi_{\#\perp} := \mathbb{I} - E^\xi_\#$; связь между $\mathcal{E}^\xi_\#$ и $\mathcal{E}^\xi$ приводит к соотношениям

$$U^T E^\xi_\# = E^\xi U^T; \quad U^T E^\xi_{\#\perp} = E^\xi_\perp U^T, \qquad 0 \le \xi \le T. \tag{4.10}$$

Модель определяется формой c^T, а значит, оператором R^{2T} (см. (4.2)). Поэтому, данных обратной задачи достаточно, чтобы построить модель и найти операторы $W^T_\#, O^T_\#, E^\xi_\#$.

4.4. Визуализация волн. Выведем соотношение, играющее ключевую роль в обратной задаче.

Лемма 4.3. *При* $T < T_\omega$ *для* $\mathrm{f} \in \mathcal{M}^T$ *справедливо представление*

$$\varkappa_0 \widetilde{\mathrm{e}}^{\mathrm{f}}(\xi, T) = (O^T_{\#} E^\xi_{\#\perp} W^T_{\#}\mathrm{f})(T - \xi - 0), \quad 0 < \xi < T. \tag{4.11}$$

Доказательство. Положив в (3.39) $\mathrm{y} = W^T\mathrm{f}$, имеем

$$(O^T P^\xi_\perp W^T\mathrm{f})(T - \xi - 0) = (\varkappa_0 I^T W^T\mathrm{f})(\xi) = \varkappa_0 \widetilde{\mathrm{e}}^f(\xi, T). \tag{4.12}$$

С другой стороны, в силу (3.20) и (4.8)–(4.10), имеем равенства

$$\begin{aligned} &O^T P^\xi_\perp W^T \\ &\quad = O^T E^\xi_\perp W^T \\ &\quad = O^T_{\#} E^\xi_{\#\perp} W^T_{\#}. \end{aligned} \tag{4.13}$$

Сопоставляя (4.13) с (4.12), получаем (4.11). Лемма доказана.

Итак, по данным обратной задачи (оператору R^{2T}) можно построить модель и находить, с точностью до множителя $\varkappa_0$, изображения волн по амплитудной формуле (4.11). В теории реконструкции образов о подобной возможности говорят, как о *визуализации*: сама волна e^f невидима внешнему наблюдателю, оперирующему на границе области, однако ее изображение $\widetilde{\mathrm{e}}^f$ может быть найдено по граничным измерениям.

Имеется еще один способ находить изображения волн по форме c^T, использующий так называемые волновые базисы. Этот способ конструктивен: в случае волнового уравнения на его основе разработаны численные алгоритмы [2, 6]. Приведем его краткое описание.

(i) В подпространстве $F^{T,\xi} \subset F^T$ выберем полную систему управлений $\{\mathrm{f}^\xi_j\}$: $\mathrm{f}_j \in F^{T,\xi}_+$; $\operatorname{clos} \operatorname{Lin}\{\mathrm{f}_j\} = F^{T,\xi}$ (Lin — линейная оболочка); $c^T[\mathrm{f}^\xi_i, \mathrm{f}^\xi_j] = \delta_{ij}$. По свойству (3.19) и в силу (4.1) соответствующая система волн $\{W^T\mathrm{f}^\xi_j\}$ образует ортонормированный базис в подпространстве J^ξ. Выберем $\mathrm{f} \in \mathcal{M}^T$; для волны $\mathrm{e}^{\mathrm{f}}(\cdot, T) = W^T\mathrm{f}$ имеем представление:

$$\begin{aligned} P^\xi_\perp W^T\mathrm{f} &= W^T\mathrm{f} - \sum_j (W^T\mathrm{f}, W^T\mathrm{f}^\xi_j)_J W^T\mathrm{f}^\xi_j \\ &\text{см. (4.1)} \\ &= W^T\mathrm{f} - \sum_j c^T[\mathrm{f}, \mathrm{f}^\xi_j]\, W^T\mathrm{f}^\xi_j. \end{aligned} \tag{4.14}$$

(ii) В F^T выберем ортонормированный базис $\{g_p\}$: $g_p \in F_+^T$. Имеем равенства

$$\begin{aligned}
(O^T P_\perp^\xi W^T \mathbf{f}, \mathbf{g}_p)_{F^T} &= (P_\perp^\xi W^T \mathbf{f}, W^T \mathbf{g}_p)_{J^T} \\
&\quad \text{см. (4.14)} \\
&= (W^T \mathbf{f}, W^T \mathbf{g}_p)_{J^T} - \sum_j c^T[\mathbf{f}, \mathbf{f}_j^\xi](W^T \mathbf{f}_j^\xi, W^T \mathbf{g}_p)_{J^T} \\
&\quad \text{см. (4.1)} \\
&= c^T[\mathbf{f}, \mathbf{g}_p] - \sum_j c^T[\mathbf{f}, \mathbf{f}_j^\xi]\, c^T[\mathbf{f}_j^\xi, \mathbf{g}_p];
\end{aligned}$$

они приводят к соотношению

$$\begin{aligned}
O^T P_\perp^\xi W^T \mathbf{f} &= \sum_p (O^T P_\perp^\xi W^T \mathbf{f}, \mathbf{g}_p)_{F^T} \mathbf{g}_p \\
&= \sum_p \left\{ c^T[\mathbf{f}, \mathbf{g}_p] - \sum_j c^T[\mathbf{f}, \mathbf{f}_j^\xi] c^T[\mathbf{f}_j^\xi, \mathbf{g}_p] \right\} \mathbf{g}_p.
\end{aligned} \tag{4.15}$$

(iii) Воспользуемся амплитудной формулой

$$\varkappa_0 \widetilde{\mathbf{e}^\mathbf{f}}(\xi, T) = (O^T P_\perp^\xi W^T \mathbf{f})(T - \xi - 0)$$

(см. (4.12)), вычисляя правую часть по представлению (4.15). Изображение волны восстановлено.

4.5. Восстановление скорости. Для доказательства теоремы 4.1 достаточно подытожить предыдущие рассмотрения. Сделаем это в виде общей схемы решения обратной задачи:

(i) оператор R^{2T} определяет форму c^T (см. (4.2)), что позволяет построить модель $J_\#^T$ и найти операторы $W_\#^T$, $O_\#^T$, и проекторы $E_{\#\perp}^\tau$ $0 < \tau < T$;

(ii) по выбранным $\mathbf{a} \in \mathcal{T} \cap C^\infty(\Gamma)$, $\xi \in (0, T)$ найдем

$$\varkappa_0 \widetilde{\mathbf{e}}^{\theta^0_{T-\xi}\mathbf{a}}(\tau, T) = (O_\#^T E_{\#\perp}^\tau W_\#^T[\theta^0_{T-\xi}\mathbf{a}])(T - \tau - 0)$$

(см. (4.11));

(iii) по первой из формул (3.31) имеем:

$$\varkappa_0^2 = |\mathbf{a}|^{-1} |\varkappa_0 \widetilde{\mathbf{e}}^{\theta^0_{T-\xi}\mathbf{a}}(\xi - 0, T)|;$$

тем самым, функция $\varkappa_0 = \varkappa_0(\gamma)$ найдена;

(iv) по второй формуле (3.31) найдем $H(\xi)\varkappa_0\mathbf{a}$; меняя $\mathbf{a}$ и ξ, восстановим семейство операторов $H(\xi)$, $0 < \xi < T$;

(v) согласно (2.32), операторы $H(\xi)$ определяют матрицу $\{h^{\alpha\beta}\}$ тензора h на выкройке Θ^T;

(vi) тензор h вместе с граничными значениями $c|_\Gamma$, $\frac{\partial c}{\partial \nu}\big|_\Gamma$ определяет скорость c в Ω^T (см. п. 1.3). Теорема 4.1 доказана.

Построение модели по данным обратной задачи, визуализация изображений волн по формулам геометрической оптики и последующее извлечение метрики из картины изображений составляют существо ВС-метода.

§5. Заключение.

5.1. Примечания.

(i) Попытка распространить подход на времена $T > T_\omega$ встречает следующие препятствия:

эквидистанты Γ^ξ теряют гладкость и возникают проблемы с выводом уравнения Риккати. Более того, само определение фигурирующих в нем операторов нуждается в уточнении;

при временах $T > T_\omega$ система (3.4)–(3.6) может потерять управляемость: равенство (3.16) может нарушаться. Дело в следующем: для доказательства (3.16) мы привлекаем теорему единственности Хольмгрена–Йона–Татару, из которой лишь следует, что возможные недостижимые состояния $\mathbf{y} \in J^T \ominus \operatorname{clos} \mathcal{E}^T$ определяются системой условий:

$$
\begin{aligned}
&\operatorname{rot} \mathbf{y} = 0, \quad \operatorname{div} \varepsilon \mathbf{y} = 0 \quad \text{в } \Omega^T;\\
&\nu \times \mathbf{y} = 0 \quad \text{на } \Gamma;\\
&\nu \cdot \mathbf{y} = 0 \quad \text{на } \Gamma^T.
\end{aligned}
$$

Эта система может иметь нетривиальное подпространство решений, размерность которого определяется топологическими характеристиками подобласти Ω^T [8, 19]. К примеру, если Ω^T гомеоморфна шару, из которого выброшен тор, то эта размерность равна единице.

Мы полагаем, что эти осложнения носят технический характер и надеемся на расширение ВС-схемы на общий случай $T < T_*$.

(ii) Не составляет труда адаптировать схему для спектральной обратной задачи; она состоит в восстановлении скорости по адекватно определенным спектральным данным оператора L_0 (см. п. 2.9).

(iii) Инвариантный характер ВС-метода позволяет решать задачи на многообразиях; здесь мы хотели бы анонсировать следующий результат. Пусть (Ω, g) — гладкое компактное ориентированное трехмерное риманово многообразие с краем Γ; рассмотрим систему Максвелла:

$$
\begin{aligned}
&\mathrm{e}_t = \operatorname{rot}\mathrm{h}, \ \ \mathrm{h}_t = -\operatorname{rot}\mathrm{e} \quad \text{в } \Omega \times (0,T);\\
&\mathrm{e}|_{t=0} = 0, \ \ \mathrm{h}|_{t=0} = 0 \quad \text{в } \Omega;\\
&\mathrm{e}_\theta|_{\Gamma\times[0,T]} = \mathrm{f};
\end{aligned}
$$

пусть $R^T : \mathrm{e}_\theta|_{\Gamma\times[0,T]} \to \mathrm{h}_\theta|_{\Gamma\times[0,T]}$ — оператор реакции.

Теорема 5.1 (М. Белишев; В. Исаков; Л. Пестов; В. Шарафутдинов). *При $T < T_\omega$ оператор R^{2T} определяет подмногообразие (Ω^T, g) с точностью до изометрии.*

(iv) Требование C^∞-гладкости ε, μ, Γ, g принято для простоты и не является необходимым: подход оправдывается и в случае C^N-гладкости с конечным (достаточно большим) N.

(v) Что касается численной реализации схемы, серьезным препятствием выглядит шаг „тензор h $\to$ скорость c", связанный с необходимостью решать задачу Коши для эллиптического уравнения (1.7). Часть схемы „оператор R^{2T} $\to$ тензор h", на наш взгляд, может послужить основой для разработки алгоритмов.

5.2. Благодарности. Эта работа потребовала многочисленных консультаций со специалистами и мы глубоко признательны нашим коллегам за добрую и безотказную помощь:

В. М. Бабич, К. Бардос и В. А. Шарафутдинов консультировали нас по общим вопросам и ассимптотическим методам для уравнения Максвелла;

вопросы, касающиеся ПДО, обсуждались с Н. Бьорком и Дж.Сильвестром;

О. Ю. Иманувилов указал способ доказательства леммы 3.1, основанный на карлемановских оценках;

И. Лашеска и Д. Татару консультировали нас по вопросам регулярности решений системы Максвелла;

Г. Я. Перельман указал, что восстановление тензора g по тензору h является частью проблемы Ямабе и снабдил нас соответствующими ссылками;

Л. Н. Пестов предложил новый элегантный вывод уравнения Риккати (см. приложение А);

мы пользовались любезными консультациями Дж. Сильвестра по Layer Stripping Method;

Д. Татару указал контрпример, освободивший нас от ложных надежд на ограниченность оператора W^T.

Авторы признательны А. И. Каролю за внимательное рецензирование и полезные обсуждения по работе.

Приложение

А. Доказательство теоремы 2.1

(i) Пусть $T < T_\omega$; выберем гладкую в $\overline{\Omega}^T$ функцию φ и рассмотрим семейство задач

$$\begin{aligned} \operatorname{div} \varepsilon \nabla p &= 0 \quad \text{в } \Omega^\xi; \\ p|_\Gamma &= 0; \\ \boldsymbol{\nu} \cdot \nabla p|_{\Gamma^\xi} &= \varphi|_{\Gamma^\xi}, \end{aligned}$$

параметризованное переменным $\xi \in [0, T]$; пусть $p = p(x, \xi)$ суть решения задач. Обозначим $A^T := \{(x, \xi) \mid x \in \Omega^T, \tau(x) < \xi < T\}$ и будем рассматривать $p(x, \xi)$ как функцию на $\overline{A}^T$. Как таковая, она является гладкой и определяется условиями:

$$\operatorname{div} \varepsilon \nabla p = 0 \qquad \text{в } A^T; \tag{A.1}$$

$$\left.\frac{\partial p}{\partial \nu}\right|_{(x, \tau(x))} = \varphi(x), \quad x \in \Omega^T; \tag{A.2}$$

$$p|_{\Gamma \times [0, T]} = 0. \tag{A.3}$$

Согласно определению оператора Λ имеем:

$$(\Lambda \varphi)(x) = p(x, \tau(x)), \quad x \in \Omega^T. \tag{A.4}$$

(ii) Определим оператор $S : C^\infty(\overline{A}^T) \to C^\infty(\overline{\Omega}^T)$, действующий по правилу:

$$(S a)(x) = a(x, \tau(x)), \quad x \in \Omega^T;$$

с его использованием соотношения (A.4) и (A.2) можно записать в виде:

$$\Lambda \varphi = S p \tag{A.5}$$

и

$$S\frac{\partial p}{\partial \nu} = \varphi. \tag{A.6}$$

Из определений операторов B, D и D^* (см. п. 2.5) имеем представления:

$$B = \frac{\partial^2}{\partial \nu^2} + \varrho\frac{\partial}{\partial \nu} - \frac{1}{\varepsilon}\operatorname{div}\varepsilon\nabla; \tag{A.7}$$

$$D^* = -D - \varrho, \tag{A.8}$$

где $\varrho = \frac{1}{cJ\varepsilon}\frac{\partial(\varepsilon J)}{\partial \tau} = \frac{1}{\varepsilon}\operatorname{div}\varepsilon\boldsymbol{\nu}$.

(iii) По правилу дифференцирования сложной функции имеем:

$$S\left(\frac{\partial}{\partial \nu} + \frac{1}{c}\frac{\partial}{\partial \xi}\right) = D\,S, \tag{A.9}$$

откуда, с учетом (A.9), получаем:

$$\begin{aligned} \frac{1}{c}S\frac{\partial p}{\partial \xi} &= D\,S\,p - S\frac{\partial p}{\partial \nu} \\ &\text{см. (A.5), (A.6)} \\ &= D\,\Lambda\,\varphi - \varphi. \end{aligned} \tag{A.10}$$

Из (A.9) также имеем:

$$S\left(\frac{\partial^2}{\partial \nu^2} + \frac{1}{c}\frac{\partial^2}{\partial \nu \partial \xi}\right) = D\,S\,\frac{\partial}{\partial \nu}. \tag{A.11}$$

Справедливы равенства:

$$\begin{aligned} &\frac{1}{c}S\frac{\partial}{\partial \nu}\left(\frac{\partial p}{\partial \xi}\right) \\ &\text{см. (A.11)} \\ &= D\,S\frac{\partial p}{\partial \nu} - S\frac{\partial^2 p}{\partial \nu^2} \\ &\text{см. (A.1), (A.6), (A.7)} \\ &= D\varphi - S\,Bp + \varrho S\frac{\partial p}{\partial \nu} \\ &\text{см. (A.5), (A.6)} \\ &= D\varphi - B\,\Lambda\varphi + \varrho\,\varphi \\ &\text{см. (A.8)} \\ &= -D^*\varphi - B\,\Lambda\varphi. \end{aligned} \tag{A.12}$$

Применяя Λ^* к обеим частям (A.12), получаем:

$$\Lambda^* \frac{1}{c} S \frac{\partial}{\partial \nu}\left(\frac{\partial p}{\partial \xi}\right) = -\Lambda^* D^* \varphi - \Lambda^* B\, \Lambda \varphi. \tag{A.13}$$

(iv) Из определения Λ усматривается следующий факт: если $q = q(x, \xi)$ — гладкая в $\overline{A}^T$ функция, удовлетворяющая соотношениям

$$\frac{1}{\varepsilon} \operatorname{div} \varepsilon \nabla q = 0 \quad \text{в } A^T; \tag{A.14}$$

$$q|_{\Gamma \times [0,T]} = 0, \tag{A.15}$$

то для нее выполнено равенство

$$\Lambda\, S \frac{\partial q}{\partial \nu} = S\, q.$$

Дифференцируя в (A.1), (A.3) по ξ, заключаем, что $q = \frac{\partial p}{\partial \xi}$ удовлетворяет (A.14), (A.15); отсюда имеем:

$$\Lambda S \frac{\partial}{\partial \nu}\left(\frac{\partial p}{\partial \xi}\right) = S \frac{\partial p}{\partial \xi}$$

и, с учетом (2.13),

$$\Lambda^* \frac{1}{c} S \frac{\partial}{\partial \nu}\left(\frac{\partial p}{\partial \xi}\right) = \frac{1}{c} S \frac{\partial p}{\partial \xi} = D \Lambda \varphi - \varphi \tag{A.16}$$

(см. (A.10)). Сопоставляя (A.13) и (A.16), получаем:

$$-\Lambda^* D^* \varphi - \Lambda^* B\, \Lambda \varphi = D\, \Lambda \varphi - \varphi,$$

что приводит к (2.17). Теорема доказана.

В. Доказательство теоремы 2.3

В.1. Оператор L в п.г.к. Пусть γ^1, γ^2, τ — суть п.г.к.; в разделе В обозначаем $\tau =: \gamma^0$; латинские индексы пробегают значения $1, 2, 0$; греческие, как и ранее, принимают значения $1, 2$. Евклидов метрический тензор в п.г.к. имеет вид (1.3); при этом $g_{\alpha 0} = g_{0\alpha} = 0$, $g_{00} = c^2$.

Для гладкого поля $\mathbf{y} = \mathbf{y}_\theta + y^0\mathbf{r}_0 = y^\alpha \mathbf{r}_\alpha + y^0\mathbf{r}_0 = y^i\mathbf{r}_i$ имеем

$$\operatorname{rot}\mathbf{y} = \left[\epsilon^{ijk}\frac{\partial}{\partial\gamma^k}(g_{jl}y^l)\right]\mathbf{r}_i,$$

где ϵ^{ijk} — кососимметрический тензор Леви-Чивита: $\epsilon^{120} = g^{-1/2}$, $g := \det\{g_{ik}\} = c^2 J^2$. В приводимой ниже записи оператора $L = -\frac{1}{\varepsilon}\operatorname{rot}\frac{1}{\mu}\operatorname{rot}$ в п.г.к. мы используем матричное представление, отождествляя $\mathbf{y} = \mathbf{y}_\theta + y^0\mathbf{r}_0$ со столбцом $\begin{pmatrix}\mathbf{y}_\theta \\ y^0\end{pmatrix}$. Для краткости обозначаем $\operatorname{div}^\varepsilon_\theta := \frac{1}{\varepsilon}\operatorname{div}_\theta\varepsilon$; напомним, что $\frac{D}{d\gamma^0}$ есть ковариантная производная в оптической метрике.

Лемма В.1. *В подобласти Ω, покрываемой п.г.к., для гладкого поля $\mathbf{y} = \mathbf{y}_\theta + y^0\mathbf{r}_0$ справедливо представление*

$$\begin{aligned} L\mathbf{y} &= \begin{pmatrix}(L\mathbf{y})_\theta \\ (Ly)^0\end{pmatrix} \\ &= \left(\begin{array}{c|c} \frac{D^2}{d\gamma^{0\,2}} + 2\frac{\partial \ln[(cJ\varepsilon)^{1/2}c]}{\partial\gamma^0}\frac{D}{d\gamma^0} + D_{11} - c^2\nabla_\theta \operatorname{div}^\varepsilon_\theta & -\nabla_\theta\frac{\partial}{\partial\gamma^0} + D_{10} \\ D_{01} - \frac{\partial}{\partial\gamma^0}\operatorname{div}^\varepsilon_\theta & B \end{array}\right)\begin{pmatrix}\mathbf{y}_\theta \\ c^2y^0\end{pmatrix}, \end{aligned} \tag{B.1}$$

(*вертикальная линия отделяет столбцы*) *где* $D_{11}\mathbf{y}_\theta = \left(h^{\mu\nu}\frac{\partial^2 y^\alpha}{\partial\gamma^\mu\partial\gamma^\nu}\right)\mathbf{r}_\alpha + \widetilde{D}_{11}\mathbf{y}_\theta$, $\widetilde{D}_{11}$, D_{10} *и* D_{01} *— суть* послойные *дифференциальные операторы порядка не выше* 1 (*они содержат* $\frac{\partial}{\partial\gamma^\alpha}$ *и не содержат* $\frac{\partial}{\partial\gamma^0}$).

Весьма длинные вычисления, приводящие к (В.1), приведены в [4]. Отметим, что в них допущен ряд неточностей, которые не повлияли на окончательный результат.

В.2. Вспомогательные соотношения. Напомним, что оператор $K : L_2(\Omega^T) \to L_2(\Omega^T)$ мы называем послойным, если он действует по правилу

$$(K\varphi)|_{\Gamma^\xi} = K(\xi)[\varphi|_{\Gamma^\xi}], \quad 0 < \xi \le T,$$

где $K(\xi)$ — суть операторы в $L_2(\Gamma^\xi)$.

Лемма B.2.

(i) *Для гладкой в* $\overline{\Omega}^T$ *функции* χ *справедливо соотношение*

$$\chi\Lambda - \Lambda\chi = K_1, \tag{B.2}$$

в котором K_1 *есть послойный оператор такой, что* $K_1(\xi)$ *— суть ПДО порядка* -2 *и для любого интервала* $\delta \le \xi \le T$ $(\delta > 0)$ *выполнена оценка*: $\|K_1(\xi)\|_{H^s(\Gamma^\xi)\to H^{s+2}(\Gamma^\xi)} \le C(\delta)$, $(s \ge 0)$;

(ii) *справедливо представление*

$$\Lambda B\Lambda = \mathbb{I} + K_2, \tag{B.3}$$

в котором K_2 *есть послойный оператор такой, что* $K_2(\xi)$ *— суть ПДО порядка* -1 *и выполнена оценка*: $\|K_2(\xi)\|_{H^{s-1}(\Gamma^\xi)\to H^s(\Gamma^\xi)} \le C(\delta)$ *при* $0 < \delta \le \xi \le T$, $s \ge 1$;

(iii) *справедливо представление*

$$\frac{\partial}{\partial\tau}\Lambda - \Lambda\frac{\partial}{\partial\tau} = K_3, \tag{B.4}$$

в котором K_3 *есть послойный оператор такой, что* $K_3(\xi)$ *— суть ПДО порядка* -1 *и выполнена оценка*: $\|K_3(\xi)\|_{H^{s-1}(\Gamma^\xi)\to H^s(\Gamma^\xi)} \le C(\delta)$ *при* $0 < \delta \le \xi \le T$, $s \ge 1$.

Опуская доказательство, отметим, что (B.2) и (B.3) оправдываются с использованием вполне стандартных результатов эллиптической теории [16], а (B.4) легко следует из (B.2), (B.3) и (2.17). Поясним также, что операторы $K_{1,2,3}(\xi)$ оказываются псевдодифференциальными из-за того, что таковыми являются операторы Кальдерона, определяющие Λ: каждый Λ^ξ есть эллиптический ПДО порядка -1 (см., например, [22]).

B.3. Оператор $M^T L^T (M^T)^*$.

Для гладких $\mathbf{y} \in J^T$, $\mathbf{v} \in \mathcal{L}_\theta^T$, согласно (2.18), (2.19), имеем

$$M^T\begin{pmatrix}\mathbf{y}_\theta\\ y^0\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}\mathbf{I} & -\nabla_\theta\Lambda c\\ 0 & 0\end{pmatrix}\begin{pmatrix}\mathbf{y}_\theta\\ y^0\end{pmatrix}; \tag{B.5}$$

$$(M^T)^*\begin{pmatrix}\mathbf{v}\\ 0\end{pmatrix} = P_J^T\begin{pmatrix}\mathbf{v}\\ \frac{1}{c^2}\Lambda c\,\mathrm{div}_\theta^\varepsilon \mathbf{v}\end{pmatrix}. \tag{B.6}$$

Отметим, что проектор P_J^T сохраняет гладкость: $P_J^T \mathbf{C}^\infty(\overline{\Omega}^T) \subset J^T \cap \mathbf{C}^\infty(\overline{\Omega}^T)$ [8]. Пусть $\mathbf{w}$ — произвольное гладкое поле в $\overline{\Omega}^T$; согласно разложению Вейля (см. п. 2.6) имеем $\mathbf{w} = \nabla q + P_J^T \mathbf{w}$, откуда

$$L^T P_J^T \mathbf{w} = -\frac{1}{\varepsilon}\mathrm{rot}\frac{1}{\mu}\mathrm{rot} P_J^T \mathbf{w} = -\frac{1}{\varepsilon}\mathrm{rot}\frac{1}{\mu}\mathrm{rot}\mathbf{w}. \tag{B.7}$$

Применяя L^T в (B.6), имеем равенства

$$L^T \left(M^T\right)^* \begin{pmatrix} \mathbf{v} \\ 0 \end{pmatrix}$$

см. (B.7)

$$= -\frac{1}{\varepsilon}\mathrm{rot}\frac{1}{\mu}\mathrm{rot}\begin{pmatrix} \mathbf{v} \\ \frac{1}{c^2}\Lambda c\,\mathrm{div}_\theta^\varepsilon \mathbf{v} \end{pmatrix}$$

см. (B.1)

$$= \left(\begin{array}{c|c} \frac{D^2}{d\gamma^{0\,2}} + 2\frac{\partial \ln[(cJ\varepsilon)^{1/2}c]}{\partial\gamma^0}\frac{D}{d\gamma^0} - c^2\nabla_\theta \mathrm{div}_\theta^\varepsilon + D_{11} & -\nabla_\theta \frac{\partial}{\partial\gamma^0} + D_{10} \\ -\frac{\partial}{\partial\gamma^0}\mathrm{div}_\theta^\varepsilon + D_{01} & B \end{array} \right) \begin{pmatrix} \mathbf{v} \\ \Lambda c\,\mathrm{div}_\theta^\varepsilon \mathbf{v} \end{pmatrix}$$

$$= \begin{pmatrix} \frac{D^2\mathbf{v}}{d\gamma^{0\,2}} + 2\frac{\partial \ln[(cJ\varepsilon)^{1/2}c]}{\partial\gamma^0}\frac{D\mathbf{v}}{d\gamma^0} - c^2\nabla_\theta \mathrm{div}_\theta^\varepsilon \mathbf{v} + D_{11}\mathbf{v} - \nabla_\theta\frac{\partial}{\partial\gamma^0}\Lambda c\,\mathrm{div}_\theta^\varepsilon \mathbf{v} + D_{10}\Lambda c\,\mathrm{div}_\theta^\varepsilon \mathbf{v} \\ -\frac{\partial}{\partial\gamma^0}\mathrm{div}_\theta^\varepsilon \mathbf{v} + B\Lambda c\,\mathrm{div}_\theta^\varepsilon \mathbf{v} + D_{01}\mathbf{v} \end{pmatrix}.$$

Действуя M^T с учетом (B.5), получаем

$$M^T L^T \left(M^T\right)^* \begin{pmatrix} \mathbf{v} \\ 0 \end{pmatrix}$$

$$= \begin{pmatrix} \mathbf{I} & -\nabla_\theta \Lambda c \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$$

$$\begin{pmatrix} \frac{D^2\mathbf{v}}{d\gamma^{0\,2}} + 2\frac{\partial \ln[(cJ\varepsilon)^{1/2}c]}{\partial\gamma^0}\frac{D\mathbf{v}}{d\gamma^0} - c^2\nabla_\theta \mathrm{div}_\theta^\varepsilon \mathbf{v} + D_{11}\mathbf{v} - \nabla_\theta\frac{\partial}{\partial\gamma^0}\Lambda c\,\mathrm{div}_\theta^\varepsilon \mathbf{v} + D_{10}\Lambda c\,\mathrm{div}_\theta^\varepsilon \mathbf{v} \\ -\frac{\partial}{\partial\gamma^0}\mathrm{div}_\theta^\varepsilon \mathbf{v} + B\Lambda c\,\mathrm{div}_\theta^\varepsilon \mathbf{v} + D_{01}\mathbf{v} \end{pmatrix}$$

$$= \begin{pmatrix} \left\{ \begin{array}{l} \frac{D^2\mathbf{v}}{d\gamma^{0\,2}} + 2\frac{\partial \ln[(cJ\varepsilon)^{1/2}c]}{\partial\gamma^0}\frac{D\mathbf{v}}{d\gamma^0} - c^2\nabla_\theta \mathrm{div}_\theta^\varepsilon \mathbf{v} - \nabla_\theta\frac{\partial}{\partial\gamma^0}\Lambda c\,\mathrm{div}_\theta^\varepsilon \mathbf{v} + D_{11}\mathbf{v} \\ + \nabla_\theta \Lambda c\frac{\partial}{\partial\gamma^0}\mathrm{div}_\theta^\varepsilon \mathbf{v} - \nabla_\theta\Lambda c B\Lambda c\,\mathrm{div}_\theta^\varepsilon \mathbf{v} + D_{10}\Lambda c\,\mathrm{div}_\theta^\varepsilon \mathbf{v} - \nabla_\theta \Lambda c D_{01}\mathbf{v} \end{array} \right\} \\ 0 \end{pmatrix}$$

$$= \begin{pmatrix} \left\{ \begin{array}{l} \frac{D^2\mathbf{v}}{d\gamma^{0\,2}} + 2\frac{\partial \ln[(cJ\varepsilon)^{1/2}c]}{\partial\gamma^0}\frac{D\mathbf{v}}{d\gamma^0} + D_{11}\mathbf{v} \\ -c^2\nabla_\theta(\mathbf{I} + \Lambda B\Lambda)\mathrm{div}_\theta^\varepsilon \mathbf{v} - (\nabla_\theta\Lambda c B\Lambda c - c^2\nabla_\theta\Lambda B\Lambda)\mathrm{div}_\theta^\varepsilon \mathbf{v} \\ -\nabla_\theta\left(\frac{\partial}{\partial\gamma^0}\Lambda - \Lambda\frac{\partial}{\partial\gamma^0}\right)c\,\mathrm{div}_\theta^\varepsilon \mathbf{v} + \nabla_\theta\Lambda\left(c\frac{\partial}{\partial\gamma^0} - \frac{\partial}{\partial\gamma^0}c\right)\mathrm{div}_\theta^\varepsilon \mathbf{v} \\ +D_{10}\Lambda c\mathrm{div}_\theta^\varepsilon \mathbf{v} - \nabla_\theta\Lambda c\, D_{01}\mathbf{v} \end{array} \right\} \\ 0 \end{pmatrix}$$

см. (B.2)–(B.4)

$$= \begin{pmatrix} \frac{D^2\mathbf{v}}{d\gamma^{0\,2}} + 2\frac{\partial \ln[(cJ\varepsilon)^{1/2}c]}{\partial\gamma^0}\frac{D\mathbf{v}}{d\gamma^0} + D_{11}\mathbf{v} + \widetilde{S}\mathbf{v} \\ 0 \end{pmatrix};$$

таким образом, для гладкого поля $\mathbf{v}$ имеем

$$
\begin{aligned}
&M^T L^T (M^T)^* \mathbf{v} \\
&\quad = \left\{ \left[\frac{D^2}{d{\gamma^0}^2} + 2 \frac{\partial \ln((cJ\varepsilon)^{1/2} c)}{\partial \gamma^0} \frac{D}{\partial \gamma^0} \right] \mathbf{v} + D_{11} \mathbf{v} \right\} + \widetilde{S} \mathbf{v} \\
&\quad =: \{\mathcal{A} + D_{11}\} \mathbf{v} + \widetilde{S} \mathbf{v},
\end{aligned} \tag{B.8}
$$

где $\widetilde{S}$ послойный оператор такой, что все $\widetilde{S}(\xi)$ — суть ПДО порядка не выше 1.

B.4. Завершение доказательства. В соответствии с (B.8) имеем

$$
(\Pi^T M^T) L^T (\Pi^T M^T)^* = \Pi^T \mathcal{A} (\Pi^T)^* + \Pi^T D_{11} (\Pi^T)^* + S_1, \tag{B.9}
$$

где $S_1 := \Pi^T \widetilde{S} (\Pi^T)^*$; рассмотрим первое слагаемое.

По определениям п. 2.2 и свойству (2.3) имеем

$$
\begin{aligned}
\frac{\partial}{\partial \tau} &= \pi \frac{D}{d\gamma^0} \pi^{-1} \\
&\text{см. (2.1)} \\
&= \varkappa \pi \left[\varkappa^{-1} \frac{D}{d\gamma^0} \varkappa \right] (\varkappa \pi)^{-1} = \Pi^T \left[\varkappa^{-1} \frac{D}{d\gamma^0} \varkappa \right] (\Pi^T)^*,
\end{aligned}
$$

что приводит к

$$
\begin{aligned}
\frac{\partial^2}{\partial \tau^2} &= \Pi^T \left[\varkappa^{-1} \frac{D}{d{\gamma^0}^2} \varkappa \right] (\Pi^T)^* \\
&= \Pi^T \left[\frac{D^2}{d{\gamma^0}^2} + 2 \frac{\partial \ln \varkappa}{\partial \gamma^0} \frac{D}{d\gamma^0} + \frac{1}{\varkappa} \frac{\partial^2 \varkappa}{\partial {\gamma^0}^2} \right] (\Pi^T)^*.
\end{aligned}
$$

Учитывая свойство (2.1), определение $\varkappa$ и принимая во внимание равенство $\frac{\partial}{\partial \gamma^0}(c_0 J_0) = 0$, имеем

$$
\frac{\partial^2}{\partial \tau^2} = \Pi^T \left[\frac{D^2}{d{\gamma^0}^2} + 2 \frac{\partial \ln((cJ\varepsilon)^{1/2} c)}{\partial \gamma^0} \frac{D}{d\gamma^0} \right] (\Pi^T)^* + q, \tag{B.10}
$$

где q есть оператор умножения на $\frac{1}{\varkappa} \frac{\partial^2 \varkappa}{\partial {\gamma^0}^2}$. Сравнивая (B.10) с определением $\mathcal{A}$, получаем

$$
\Pi^T \mathcal{A} (\Pi^T)^* = \frac{D^2}{d\tau^2} - q. \tag{B.11}
$$

Второе слагаемое в (B.9) требует отдельных рассмотрений. Пусть $\sigma \subset \Gamma$ есть окрестность покрытая локальными координатами γ^1, γ^2; $\widetilde{\mathbf{r}}_1, \widetilde{\mathbf{r}}_2$ — суть два касательных базисных поля в $\sigma \times [0,T] \subset \Theta^T$, которые не зависят от τ и определяются следующим образом:

$$\widetilde{\mathbf{r}}_\alpha(\gamma, \tau) := \mathbf{r}_\alpha(\gamma).$$

Поля

$$\widetilde{\widetilde{\mathbf{r}}}_\alpha := (\Pi^T)^* \widetilde{\mathbf{r}}_\alpha = c_\alpha^\beta \mathbf{r}_\beta$$

образуют базис поперечных полей в трубке $\mathcal{B}_\sigma^T \subset \Omega^T$ (см. (1.2)).

Далее, выберем гладкое поле $\mathbf{f} \in \mathcal{F}^T$ и представим его в $\sigma \times [0,T]$ в виде $\mathbf{f} = f^\alpha \widetilde{\widetilde{\mathbf{r}}}_\alpha$ с $f^\alpha = f^\alpha(\gamma, \tau)$. Через $\overline{c}_\sigma^\beta$ обозначим матрицу, обратную к c_α^β; справедливы равенства

$$\begin{aligned}
\Pi^T D_{11} (\Pi^T)^* \mathbf{f} &= \Pi^T D_{11} f^\alpha\, \widetilde{\widetilde{\mathbf{r}}}_\alpha = \Pi^T D_{11} f^\sigma c_\sigma^\eta \mathbf{r}_\eta \\
&= \Pi^T \left[h^{\mu\nu} \frac{\partial^2 (f^\sigma c_\sigma^\eta)}{\partial \gamma^\mu \partial \gamma^\nu} \right] \mathbf{r}_\eta + \Pi^T \widetilde{D}_{11} (\Pi^T)^* \mathbf{f} \\
&\quad \text{представляя } \mathbf{r}_\eta = \overline{c}_\eta^\alpha \widetilde{\widetilde{\mathbf{r}}}_\alpha \\
&= \Pi^T \left[h^{\mu\nu} \frac{\partial^2 (f^\sigma c_\sigma^\eta)}{\partial \gamma^\mu \partial \gamma^\nu} \overline{c}_\eta^\alpha \right] \widetilde{\widetilde{\mathbf{r}}}_\alpha + \Pi^T \widetilde{D}_{11} (\Pi^T)^* \mathbf{f} \\
&\quad \text{пронося скаляры через } \Pi^T \text{ в соответствии с леммой 2.1} \\
&= \left[h^{\mu\nu} \frac{\partial f^\alpha}{\partial \gamma^\nu \partial \gamma^\nu} \right] \widetilde{\mathbf{r}}_\alpha + S' \mathbf{f},
\end{aligned} \tag{B.12}$$

где S' — послойный дифференциальный оператор, порядка не выше 1.

Подставляя (B.11), (B.12) в (B.9) и вспоминая определение $I^T = \Pi^T M^T$, получаем

$$(I^T) L (I^T)^* \mathbf{f} = \left[\left(\frac{\partial^2}{\partial \tau^2} + h^{\mu\nu} \frac{\partial^2}{\partial \gamma^\mu \partial \gamma^\nu} \right) f^\alpha \right] \widetilde{\mathbf{r}}_\alpha + S\mathbf{f},$$

где S — оператор со свойствами, указанными в теореме 2.3. Теорема 2.3 доказана.

Анализ доказательства и лемма B.2 позволяют переформулировать результат в виде теоремы 2.4.

C. Доказательство теоремы 3.1

Главная часть доказательства выделена в отдельную теорему, представляющую самостоятельный интерес; она относится к общему случаю $0 < T < T_*$.

Отнесем поле $\mathrm{h} \in J^T$ к классу $\mathcal{N}^T$, если:

(1) при всех (малых) $\delta_0 > 0$ сужение h на подобласть $\Omega^{T-\delta_0}$ есть поле класса $\mathbf{H}^1(\Omega^{T-\delta_0})$;

(2) $\mathrm{h}_\theta = 0$ на Γ;

(3) $\mathrm{rot}\,\mathrm{h} = 0$ в Ω^T.

Теорема C.1. *Для любого $T > 0$ справедливо равенство*

$$J^T \ominus \mathrm{clos}\, \mathcal{E}^T = \mathcal{N}^T. \tag{C.1}$$

Доказательство. (i) Выберем элемент $\mathrm{h} \in \mathcal{N}^T$ и используем его в качестве данных в системе (3.12)–(3.14). Из условия (2) и свойства гиперболичности (iii), п. 3.3 легко следует

$$\mathbf{w}^{\mathbf{h}}(x,t) = (t-T)\mathrm{h}(x) \quad \text{в } \{(x,t) \in Q^T \mid t > \tau(x)\}.$$

Поэтому $\nu \times \frac{1}{\mu}\mathrm{rot}\,\mathbf{w}^{\mathbf{h}} = 0$ на $\Sigma^T := \Gamma \times [0,T]$, что влечет

$$(\mathbf{e}^{\mathbf{f}}(\cdot,T), \mathbf{h})_{J^T} = 0$$

(см. (3.15)) для всех $\mathbf{f} \in \mathrm{Dom}\, W^T$; т.е. имеем $\mathbf{h} \perp \mathcal{E}^T$. Этим установлено включение $\mathcal{N}^T \subset J^T \ominus \mathrm{clos}\, \mathcal{E}^T$ и для доказательства теоремы остается установить обратное включение.

(ii) Нам потребуются следующие два вспомогательных предположения.

Лемма C.1. *Пусть поле $\mathbf{y} \in \mathbf{C}^1(\overline{\Omega}^\delta)$ $(\delta > 0)$ удовлетворяет условиям:*

$$\begin{aligned}
&(\alpha) \quad & \mathrm{div}\,\chi\mathbf{y} = 0 \quad & \text{в } \Omega^\delta \text{ при некотором } \chi \in C^1(\overline{\Omega}^\delta),\ \chi > 0;\\
&(\beta) \quad & \mathbf{y} = 0 \quad & \text{на } \Gamma;\\
&(\gamma) \quad & \nu \times \mathrm{rot}\,\mathbf{y} = 0 \quad & \text{на } \Gamma;
\end{aligned}$$

тогда

$$\frac{\partial \mathbf{y}}{\partial \nu} = 0 \quad \text{на } \Gamma. \tag{C.2}$$

Лемма C.2. *Для полей* $\mathbf{y} \in \mathbf{C}^1(\overline{\Omega}^\delta)$ *справедливо представление*

$$\nu \cdot \operatorname{rot} \mathbf{y} = Q\mathbf{y}_\theta \quad \text{на } \Gamma, \tag{C.3}$$

в котором $Q : \mathbf{H}^1(\Gamma) \to L_2(\Gamma)$ *есть тангенциальный дифференциальный оператор* 1*-го порядка.*

Доказательства опускаются; лемма C.2 взята из [10].

(iii) Выберем произвольно $\mathbf{y} \in J^T \ominus \operatorname{clos} \mathcal{E}^T$; пусть $\mathbf{w}^\mathbf{y} \in C([0,T]; J_+)$ есть соответствующее решение (3.12)–(3.14). Граничное условие (3.14) и двойственность (3.15) приводят к равенствам

$$\mathbf{w}^\mathbf{y}_\theta = 0, \quad \nu \times \frac{1}{\mu} \operatorname{rot} \mathbf{w}^\mathbf{y} = 0 \quad \text{на } \Sigma^T, \tag{C.4}$$

последнее из которых понимается в смысле F_-. Далее, рассмотрим нечетное продолжение

$$\mathbf{u}(\cdot, t) := \begin{cases} \mathbf{w}^\mathbf{y}(\cdot\,, t), & 0 \le t < T; \\ -\mathbf{w}^\mathbf{y}(\cdot\,, 2T - t), & T \le t < 2T; \end{cases}$$

которое принадлежит $C([0,T]; J_+)$ в силу равенства $\mathbf{w}^\mathbf{y}(\cdot, T) = 0$. Как можно проверить, $\mathbf{u}$ удовлетворяет системе

$$\mathbf{u}_{tt} - L\mathbf{u} = 0 \quad \text{в } Q^{2T} = \Omega \times (0, 2T); \tag{C.5}$$

$$\mathbf{u}_\theta = 0, \ \nu \times \frac{1}{\mu} \operatorname{rot} \mathbf{u} = 0 \quad \text{на } \Sigma^{2T} = \Gamma \times [0, 2T]. \tag{C.6}$$

(iv) Чтобы иметь дело с классическими функциями, используем сглаживание по времени. Выберем скалярную функцию $\varphi \in C_0^\infty[-1, 1]$ такую, что

$$\varphi(-t) = \varphi(t), \quad \varphi(t) \ge 0, \quad \int_{-1}^{1} \varphi(t)dt = 1,$$

и обозначим $\varphi_\delta(t) := \frac{1}{\delta}\varphi\left(\frac{t}{\delta}\right)$ $(\delta > 0)$, так что φ_δ сходится к дельта-функции Дирака при $\delta \to 0$. Свертка

$$\mathbf{u}^\delta(\cdot, t) := \int_{t-\delta}^{t+\delta} \varphi_\delta(t - s)\mathbf{u}(\cdot, s)ds$$

определена в $Q_\delta^{2T} := \Omega \times (\delta, 2T - \delta)$ и удовлетворяет системе

$$\mathbf{u}_{tt}^\delta - L\mathbf{u}^\delta = 0 \quad \text{в } Q_\delta^{2T}; \tag{C.7}$$

$$\mathbf{u}_\theta^\delta = 0, \quad \boldsymbol{\nu} \times \frac{1}{\mu} \operatorname{rot} \mathbf{u}^\delta = 0 \quad \text{на } \Sigma_\delta^{2T}, \tag{C.8}$$

где $\Sigma_\delta^{2T} := \Gamma \times [\delta, 2T - \delta]$.

Установим включение $\mathbf{u}^\delta(\cdot, t) \in \bigcap_{j=0}^\infty \operatorname{Dom} L_0^j$. Применяя метод Фурье и раскладывая решение $\mathbf{w}^\mathbf{y}$ по собственному базису оператора L_0 (см. п. 2.9), будем иметь

$$\mathbf{u}(\cdot, t) = \sum_k \frac{\sin \sqrt{|\lambda_k|}(t - T)}{\sqrt{|\lambda_k|}} (\mathbf{y}, \varphi_k)_J \varphi_k.$$

Как легко показать, свертка с φ_δ дает аналогичное разложение для $\mathbf{u}^\delta$ с коэффициентами, убывающими быстрее λ_k^{-j} с любым $j > 0$, что и приводит к объявленному включению.

По эллиптичности L_0, установленное включение влечет $\mathbf{u}^\delta(\cdot, t) \in \mathbf{C}^\infty(\overline{\Omega})$, т.е. сглаживание по времени приводит к сглаживанию по пространственным переменным. Окончательно заключаем: решение $\mathbf{u}^\delta$ попадает в класс $\mathbf{C}^\infty(\overline{Q_\delta^{2T}})$ и удовлетворяет (C.7), (C.8) в классическом смысле.

(v) Умножая (C.7) на ν на Γ имеем

$$\begin{aligned} \boldsymbol{\nu} \cdot \mathbf{u}_{tt}^\delta &= \boldsymbol{\nu} \cdot L\mathbf{u}^\delta \\ &\quad \text{см. (C.3)} \\ &= -\frac{1}{\varepsilon} Q \left(\frac{1}{\mu} \operatorname{rot} \mathbf{u}^\delta \right)_\theta \\ &\quad \text{см. (C.8)} \\ &= 0 \quad \text{на } \Sigma_\delta^{2T}; \end{aligned} \tag{C.9}$$

дифференцируя первое равенство в (C.8) по времени, получаем

$$\left(\mathbf{u}_{tt}^\delta\right)_\theta = 0 \quad \text{на } \Sigma_\delta^{2T}. \tag{C.10}$$

Из соотношений (C.9), (C.10) следует

$$\mathbf{u}_{tt}^\delta = 0 \quad \text{на } \Sigma_\delta^{2T}. \tag{C.11}$$

Покажем, что

$$\frac{\partial \mathbf{u}^\delta_{tt}}{\partial \nu} = 0 \quad \text{на } \Sigma^{2T}_\delta. \tag{C.12}$$

Проверяя условия *леммы* C.1 (при фиксированном t), получаем

$$\begin{aligned}
&(\alpha) \qquad \operatorname{div} \varepsilon \mathbf{u}^\delta_{tt} = \left(\operatorname{div} \varepsilon \mathbf{u}^\delta\right)_{tt} = 0 \quad \text{в } \Omega;\\
&(\beta) \qquad \mathbf{u}^\delta_{tt} = 0 \quad \text{на } \Gamma \text{ (см. (C.11))};\\
&(\gamma) \quad \boldsymbol{\nu} \times \operatorname{rot} \mathbf{u}^\delta_{tt} = \left(\boldsymbol{\nu} \times \operatorname{rot} \mathbf{u}^\delta\right)_{tt} = 0 \quad \text{на } \Gamma \text{ (см. (C.8))};
\end{aligned}$$

следовательно, (C.12) выполнено.

Дифференцирование по времени в (C.7) дает

$$\left(\mathbf{u}^\delta_{tt}\right)_{tt} - L\mathbf{u}^\delta_{tt} = 0 \quad \text{в } Q^{2T}_\delta. \tag{C.13}$$

(vi) Итак, вектор-функция $\mathbf{u}^\delta_{tt}$ оказывается гладким решением гиперболического уравнения (C.13) с нулевыми данными Коши (C.11), (C.12) на времениподобной поверхности Σ^{2T}_δ. Применяя векторный вариант [11] теоремы единственности Хольмгрена–Йона–Татару [23] и используя известную схему Д. Рассела [18] (см. также [2]), заключаем, что $\mathbf{u}^\delta_{tt}$ продолжается нулем с Σ^{2T}_δ в подобласть

$$K^{2T}_\delta := \left\{ (x,t) \in Q^{2T}_\delta \middle| \tau(x) + \delta < t < 2T - \tau(x) - \delta \right\},$$

ограниченную характеристическими поверхностями:

$$\mathbf{u}^\delta_{tt} = 0 \quad \text{в } K^{2T}_\delta.$$

Из последнего следует

$$\mathbf{u}^\delta(x,t) = (t-T)\mathbf{y}^\delta(x) \quad \text{в } K^{2T}_\delta \tag{C.14}$$

с гладким $\mathbf{y}^\delta := \mathbf{u}^\delta_t(\cdot, T)$.

(vii) Введем поле $\Psi(x,t) := \frac{1}{\mu}\operatorname{rot}\mathbf{u}^\delta(x,t)$, определенное на Q^{2T}_δ, и покажем, что оно имеет нулевые данные Коши:

$$\Psi = 0, \ \frac{\partial \Psi}{\partial \nu} = 0 \quad \text{на } \Sigma^{2T}_\delta. \tag{C.15}$$

С этой целью проверим выполнение условий *леммы* С.1 для $\Psi(\cdot, t)$:

(α)

$$\operatorname{div} \mu\Psi = \operatorname{div} \operatorname{rot} \mathbf{u}^\delta = 0;$$

(β) последовательно используя соотношения (С.3) и (С.8), имеем

$$\begin{aligned}\boldsymbol{\nu} \cdot \Psi &= \frac{1}{\mu}\boldsymbol{\nu} \cdot \operatorname{rot} \mathbf{u}^\delta \\ &= \frac{1}{\mu} Q\mathbf{u}^\delta_\theta \\ &= 0 \quad \text{на } \Gamma;\end{aligned}$$

согласно (С.8) имеем

$$\begin{aligned}\boldsymbol{\nu} \times \Psi &= \boldsymbol{\nu} \times \frac{1}{\mu}\operatorname{rot} \mathbf{u}^\delta \\ &= 0 \quad \text{на } \Gamma,\end{aligned}$$

в силу чего

$$\Psi = 0 \quad \text{на } \Gamma; \tag{C.16}$$

(γ) в силу (С.7) и (С.11) справедливы равенства

$$\begin{aligned}&\boldsymbol{\nu} \times \operatorname{rot} \Psi \\ &\quad = \boldsymbol{\nu} \times \operatorname{rot} \frac{1}{\mu} \operatorname{rot} \mathbf{u}^\delta \\ &\quad = -\varepsilon\boldsymbol{\nu} \times \mathbf{u}^\delta_{tt} = 0.\end{aligned}$$

Следовательно, *лемма* С.1 дает

$$\frac{\partial \Psi}{\partial \nu} = 0 \quad \text{на } \Gamma; \tag{C.17}$$

равенства (С.16), (С.17) приводят к (С.15).

(viii) Применяя $\frac{1}{\mu}\operatorname{rot}$ в (С.7), получаем, что Ψ есть решение уравнения

$$\Psi_{tt} - \frac{1}{\mu}\operatorname{rot}\frac{1}{\varepsilon}\operatorname{rot} \Psi = 0 \quad \text{в } Q^{2T}_\delta, \tag{C.18}$$

которое является гиперболическим в силу μ-соленоидальности Ψ; кроме того, согласно (C.15), Ψ имеет нулевые данные Коши. Те же аргументы, что были использованы в (vi), позволяют заключить

$$\Psi = 0 \quad \text{в } K_\delta^{2T}. \tag{C.19}$$

Вспоминая определение Ψ, имеем

$$\Psi = \frac{1}{\mu}\operatorname{rot}\mathbf{u}^\delta$$
см. (C.14)
$$= (t-T)\frac{1}{\mu}\operatorname{rot}\mathbf{y}^\delta \text{в } K_\delta^{2T};$$

рассматривая (C.19) на сечениях области K_δ^{2T} гиперповерхностями $\{t \neq T\}$, получаем

$$\operatorname{rot}\mathbf{y}^\delta = 0 \quad \text{в } \Omega^{T-\delta}. \tag{C.20}$$

(ix) При $\delta \to 0$ имеет место сходимость $\mathbf{u}^\delta \to \mathbf{u}$ в $C([\delta_0, 2T-\delta_0]; J_+)$ при каждом $\delta_0 > 0$; в силу (C.14) (с $t \neq T$) она приводит к сходимости $\mathbf{y}^\delta \to \mathbf{y}$ в $\mathbf{H}^1(\Omega^{T-\delta_0})$. Учитывая (C.20), получаем

$$\operatorname{rot}\mathbf{y} = 0 \quad \text{в } \Omega^{T-\delta_0}, \quad \delta_0 > 0;$$

та же сходимость с учетом первого условия в (C.8) и представления (C.14) приводит к равенству $\mathbf{y}_\theta = 0$ на Γ. Значит, $\mathbf{y} \in \mathcal{N}^T$. Теорема C.1 доказана.

Лемма C.3. *При $T < T_\omega$ справедливо равенство*

$$\mathcal{N}^T = \{0\}.$$

Доказательство. Выберем $\mathbf{h} \in \mathcal{N}^T$; условия $\operatorname{div}\varepsilon\mathbf{h} = 0$, $\operatorname{rot}\mathbf{h} = 0$ означают ε-гармоничность поля $\mathbf{h}$ и влекут гладкость $\mathbf{h}$ в Ω^T; условие $\mathbf{h}_\theta|_\Gamma = 0$ обеспечивает гладкость $\mathbf{h}$ вплоть до Γ. При $T < T_\omega$ поверхность Γ^T (внутренняя компонента $\partial\Omega^T$) является гладкой; включение $\mathbf{h} \in J^T$ приводит к равенству $\boldsymbol{\nu}\cdot\mathbf{h}|_{\Gamma^T} = 0$ (см. (2.4)), которое обеспечивает гладкость $\mathbf{h}$ вплоть до Γ^T. Таким образом, $\mathbf{h} \in \mathbf{C}^\infty(\overline{\Omega}^T)$.

При $T < T_\omega$ подобласть Ω^T обладает следующим топологическим свойством: любой одномерный цикл (гладкую простую замкнутую кривую) в Ω^T можно непрерывно деформировать в цикл, лежащий на Г. В силу соотношений $\mathbf{h}_\theta = 0$ на Г и $\operatorname{rot}\mathbf{h} = 0$ в Ω^T, это свойство обеспечивает существование функции (потенциала) p такой, что $\mathbf{h} = \nabla p$, причем

$$\operatorname{div}\varepsilon\nabla p = 0 \quad \text{в } \Omega^T. \tag{C.21}$$

Из нормальности h на Г следует

$$p = 0 \quad \text{на } \Gamma; \tag{C.22}$$

согласно (2.4), имеем

$$\nu \cdot \nabla p = \frac{\partial p}{\partial \nu} = 0 \quad \text{на } \Gamma^T. \tag{C.23}$$

Эллиптическая задача (C.21)–(C.23) имеет единственное решение $p = 0$; следовательно, $\mathbf{h} = 0$. Лемма доказана.

Сопоставляя результаты теоремы C.1 и леммы C.3, получаем: $J^T \ominus \operatorname{clos} \mathcal{E}^T = \{0\}$ при $T < T_\omega$. Теорема 3.1 доказана.

Список литературы

[1] Бабич В. М., Булдырев В. С., *Асимптотические методы в задачах дифракции коротких волн*, Наука, М., 1972.

[2] Belishev M., *Boundary control in reconstruction of manifolds and metrics* (*the* BC-*method*), Inverse Problems **13** (1997), no. 5, R1–R45; http://www.iop.org/Journals/ip/.

[3] Белишев М. И., Гласман А. К., *Визуализация волн в динамической системе Максвелла* (BC-*метод*), Зап. науч. семин. ПОМИ **250** (1998), 49–61.

[4] Belishev M., Glasman A., *Boundary control and inverse problem for the dynamical Maxwell system: the recovering of velocity in regular zone*, Preprint CMLA ENS Cachan no. 9814, 1998; http://www.cmla.ens-cachan.fr.

[5] Белишев М. И., Гласман А. К., *К проектированию в пространстве соленоидальных векторных полей*, Зап. науч. семин. ПОМИ **257** (1999), 16–43.

[6] Belishev M., Gotlib V. Yu., *Dynamical variant of the* BC-*method: theory and numerical testing*, J. Inverse Ill-Posed Probl. **7** (1999), no. 3, 15–33.

[7] Белишев М. И., Качалов А. П., *Операторный интеграл в многомерной спектральной обратной задаче*, Зап. науч. семин. ПОМИ **215** (1994), 9–37.

[8] Быховский Э. Б., Смирнов Н. В., *Об ортогональном разложении пространства вектор-функций, квадратично суммируемых по заданной области, и операторах векторного анализа*, Тр. Мат. ин-та АН СССР **59** (1960), 5–36.

[9] Вайнберг Б. Р., *Асимптотические методы в уравнениях математической физики*, МГУ, М., 1982.

[10] Дюво Г., Лионс Ж.-Л., *Неравенства в механике и физике*, Наука, М., 1980.

[11] Eller M., Isakov V., Nakamura G., Tataru D., *Uniqueness and stability in the Cauchy problem for Maxwell's and elasticity systems*, 1998, http://www.math.nwu.edu/ tataru/papers/systems.ps.

[12] Kazdan J., Warner F., *Scalar curvature and conformal deformation of Riemannian structure*, J. Differential Geom. **10** (1975), 113–134.

[13] Ладыженская О. А., Солонников В. А., *О принципе линеаризации и инвариантных многообразиях для задач магнитной гидродинамики*, Зап. науч. семин. ЛОМИ **38** (1973), 46–93.

[14] Lagnese J., *Exact boundary controllability of Maxwell's equations in a general region*, SIAM J. Control Optim. **27** (1989), 374–388.

[15] Lasiecka I., Triggiani R., *Recent advances in regularity of second-order hyperbolic mixed problems, and applications*, Dynam. Report. Expositions Dynam. Systems (N. S.), vol. 3, Springer-Verlag, Berlin, 1994, pp. 104–162.

[16] Лионс Ж.-Л., Мадженес Э., *Неоднородные граничные задачи и их приложения*, Мир, М., 1971.

[17] Ola P., Päivärinta L., Somersalo E., *An inverse boundary value problem in electrodynamics*, Duke Math. J. **70** (1993), 617–653.

[18] Russell D., *Boundary value control of the higher-dimensional wave equation*, SIAM J. Control **9** (1971), 29–42.

[19] Schwarz G., *Hodge decomposition — a method for solving boundary value problems*, Lecture Notes in Math., vol. 1607, Springer-Verlag, Berlin, 1995.

[20] Шарафутдинов В. А., *Интегральная геометрия тензорных полей*, Наука, Новосибирск, 1993.

[21] Sylvester J., *A convergent layer stripping algorithm for the radially symmetric impedance tomography problem*, Comm. Partial Differential Equations **17** (1992), no. 11–12, 1955–1994.

[22] Sylvester J., Uhlmann G., *The Dirichlet to Neumann map and applications*, Inverse Problems in Partial Differential Equations (Arcata, CA, 1989), SIAM, Philadelphia, PA, 1990, pp. 101–139.

[23] Tataru D., *Unique continuation for solutions to PDE's; between Hörmander's theorem and Holmgren's theorem*, Comm. Partial Differential Equations **20** (1995), no. 5–6, 855–884.

С.-Петербургское отделение
Математического института
им. В. А. Стеклова РАН
191011, Санкт-Петербург
наб. р. Фонтанки, 27
Россия
E-mail: belishev@pdmi.ras.ru

Поступило 12 апреля 1999 г.