Математические заметки

Том 105 выпуск 5 май 2019

УДК 517.5

Неравенства типа Джексона в пространствах $S^{(p,q)}(\sigma^{m-1})$

Р. А. Ласурия

Устанавливаются неравенства типа Джексона в случае приближения функций линейными методами суммирования их рядов Фурье–Лапласа в пространствах $S^{(p,q)}(\sigma^{m-1})$, $m \geqslant 3$, для классов функций, определяемых преобразованиями их рядов Фурье–Лапласа с помощью мультипликаторов, в терминах операторов, которые, также определяются соответствующими преобразованиями рядов Фурье–Лапласа.

Библиография: 33 названия.

Ключевые слова: ряд Фурье–Лапласа, линейные методы суммирования, наилучшие приближения, свертка.

DOI: https://doi.org/10.4213/mzm11996

1. Обозначения, определения и предложения. Пусть $\mathbb{R}^m$, $m \geqslant 3$, – m-мерное евклидово пространство векторов $x := (x_1, \dots, x_m)$ со скалярным произведением $(x, y) := \sum_{k=1}^m x_k y_k$ и нормой

$$|x| := \left(\sum_{k=1}^m x_k^2\right)^{1/2}, \qquad \sigma^{m-1} := \{x \in \mathbb{R}^m : |x| = 1\}.$$

Пусть dx-мера Хаара на сфере σ^{m-1}, инвариантная относительно группы вращений $SO(m)$ и нормированная единицей.

Пусть, далее, $L_p(\sigma^{m-1})$, $p \in (0, \infty]$, – пространство комплексных функций f, измеримых на σ^{m-1}, с заданным на нем функционалом

$$\|f\|_p = \|f\|_{L_p(\sigma^{m-1})} := \begin{cases} \left(\displaystyle\int_{\sigma^{m-1}} |f(x)|^p \, dx\right)^{1/p} < \infty, & p \in (0, \infty), \\ \operatorname*{ess\,sup}_{x \in \sigma^{m-1}} |f(x)| < \infty, & p = \infty. \end{cases}$$

Функционал $\|\cdot\|_p$ при $p \geqslant 1$ задает норму, а при $p \in (0, 1)$ – квазинорму в пространстве $L_p(\sigma^{m-1})$.

Пусть

$$S^{(\lambda)}[f] := \sum_{k=0}^{\infty} Y_k^{(\lambda)}(f, x), \qquad \lambda = \frac{m-2}{2} \tag{1.1}$$

© Р. А. Ласурия, 2019

– ряд Фурье–Лапласа функции $f \in L(\sigma^{m-1}) := L_1(\sigma^{m-1})$, где

$$Y_k^{(\lambda)}(f) = Y_k^{(\lambda)}(f,x) := \sum_{j=1}^{a_k} \widehat{f}_{k,j} Y_{k,j}(x),$$

$$\widehat{f}_{k,j} := (f, Y_{k,j}), \qquad j = 1, \dots, a_k, \quad k = 0, 1, \dots$$

– коэффициенты Фурье–Лапласа функции f, $\{Y_{k,j}(x)\}$, $j = 1, \dots a_k$, – сферические гармоники степени k, образующие ортонормированный базис в пространстве H_k сферических гармоник степени k размерности

$$a_k := \frac{(2k+m-2)(k+m-3)!}{k!\,(m-2)!}, \qquad (f,g) := \int_{\sigma^{m-1}} f(x)\overline{g(x)}\,dx.$$

Дифференциальные свойства функции, заданной на сфере σ^{m-1}, определим следующим образом (см., например, [1]).

Пусть $\psi = \{\psi(k)\}$, $k = 0, 1 \dots$, – произвольная система комплексных чисел, $\psi(0) := 1$. Если для $f \in L(\sigma^{m-1})$ ряд

$$A_0 + \sum_{k=1}^{\infty} \psi(k) Y_k^{(\lambda)}(f,x), \qquad A_0 := \mathrm{const},$$

является рядом Фурье–Лапласа некоторой функции $F \in L(\sigma^{m-1})$, то по аналогии с периодическим случаем (см., например, [2; ч. 1, с. 149]) функцию F назовем *ψ-интегралом* функции f: $F = I^\psi f$. Множество ψ-интегралов функций $f \in L(\sigma^{m-1})$ обозначим через $L^\psi(\sigma^{m-1})$. Если $\mathfrak{N} \subset L(\sigma^{m-1})$, то $L^\psi\mathfrak{N}(\sigma^{m-1})$ будет обозначать множество ψ-интегралов функции $\mathfrak{f} \in \mathfrak{N}$.

Пусть

$$\psi(k) \neq 0, \qquad k = 1, 2, \dots, \tag{1.2}$$

и ряд

$$\sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{\psi(k)} Y_k^{(\lambda)}(f,x)$$

является рядом Фурье–Лапласа некоторой функции $\varphi \in L(\sigma^{m-1})$. Функция φ называется *ψ-производной* функции f: $\varphi(x) = D^\psi(f;x) = f^\psi(x)$. Таким образом,

$$S^{(\lambda)}[f^\psi] = \sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{\psi(k)} Y_k^{(\lambda)}(f,x) = \sum_{k=1}^{\infty} Y_k^{(\lambda)}(f^\psi,x). \tag{1.3}$$

Подмножество функций $f \in L(\sigma^{m-1})$, у которых существуют ψ-производные, обозначим через $\overline{L}^\psi(\sigma^{m-1})$. Если $f \in \overline{L}^\psi(\sigma^{m-1})$ и $f^\psi \in \mathfrak{N}$, пишем $f \in \overline{L}^\psi\mathfrak{N}$.

Связь между ψ-интегралами и ψ-производными устанавливается в следующем утверждении.

Предложение А [1]. *Если функция $f \in L(\sigma^{m-1})$, ряд (1.1) – ее ряд Фурье–Лапласа, и $\psi(k) \neq 0$, $k = 1, 2, \dots$, то $I^\psi(f,x)$ обладает ψ-производной и*

1) $D^\psi(I^\psi(f,x)) = f(x) - C_0$,

$$C_0 = Y_0^{(\lambda)}(f,x) = \mathrm{const}\,.$$

Если $f \in L^{\psi}(\sigma^{m-1})$, *ряд* (1.1) – *ее ряд Фурье–Лапласа, то функция* $D^{\psi}(f,x)$ *обладает* ψ*-интегралом и при этом*

2) $I^{\psi}(D^{\psi}(f,x)) = f(x) + A_0$, $A_0 = \mathrm{const}$;

3) $\overline{L}^{\psi}(\sigma^{m-1}) = L^{\psi}(\sigma^{m-1})$.

Доказательство следует непосредственно из определений ψ-интеграла и ψ-производной функции $f \in L(\sigma^{m-1})$ (см., также, [1]).

В работе [1] приводятся условия существования ψ-производных f^{ψ} функций $f \in L(\sigma^{m-1})$.

Введем следующие множества функций, заданных на сфере σ^{m-1} [3], [4]. При каждом фиксированном $p \in (0,\infty]$ и $q \in (0,\infty)$ обозначим

$$S^{(p,q)} = S^{(p,q)}(\sigma^{m-1}) := \left\{ f \in L(\sigma^{m-1}) : \sum_{k=0}^{\infty} \|Y_k^{(\lambda)}(f)\|_p^q < \infty \right\}.$$

Элементы $f, g \in S^{(p,q)}$ считаем *тождественными*, если $\widehat{f}_{k,j} = \widehat{g}_{k,j}$ при всех $j = 1, \dots, a_k$, $k = 0, 1, \dots$.

Будем говорить, что множество $S^{(p,q)}$ порождается пространством $L(\sigma^{m-1})$, системой функций

$$\bigcup_{k=0}^{\infty} \{Y_{k,1}, Y_{k,2}, \dots, Y_{k,a_k}\} \tag{1.4}$$

и числами p, q. Определим в пространстве $S^{(p,q)}$ функционал посредством равенства

$$\|f\|_{S^{(p,q)}} = \|f\|_{S^{(p,q)}(\sigma^{m-1})} := \left(\sum_{k=0}^{\infty} \|Y_k^{(\lambda)}(f)\|_p^q \right)^{1/q}. \tag{1.5}$$

Множество $S^{(p,q)}(\sigma^{m-1})$ при $p \in [1,\infty]$, $q \in [1,\infty)$ образует линейное нормированное пространство, содержащее систему (1.4), с операциями сложения и умножения на число, определенными на всем пространстве $L(\sigma^{m-1})$. При $p = q = 2$ в силу равенства Парсеваля в $L_2(\sigma^{m-1})$ (см., например, [5]) имеем

$$\|f\|_2 = \left(\sum_{k=0}^{\infty} \|Y_k^{(\lambda)}(f)\|_2^2 \right)^{1/2} = \|f\|_{S^{(2,2)}}.$$

Пространство $S^{(p,2)}(\sigma^{m-1})$, $p \in [1,\infty]$, является гильбертовым. При всех остальных $q \in (0,\infty)$ пространства $S^{(p,q)}(\sigma^{m-1})$ наследуют важнейшие свойства гильбертовых пространств – равенство Парсеваля в виде соотношения (1.5) и минимальное свойство частных сумм ряда Фурье–Лапласа (1.1), а именно, выполнено.

Предложение B [3]. *Пусть*

$$P_{n-1}(x) = \sum_{k=0}^{n-1} Y_k(x) = \sum_{k=0}^{n-1} \sum_{j=1}^{a_k} \alpha_j^{(k)} Y_{k,j}(x)$$

– *произвольный полином по сферическим гармоникам* $Y_k(x)$,

$$S_{n-1}^{(\lambda)}(f,x) = \sum_{k=0}^{n-1} Y_k^{(\lambda)}(f,x)$$

– частные суммы ряда (1.1). *Среди всех сумм вида* $P_{n-1}(x)$ *при данном* $n = 1, 2, \dots$ *наименее уклоняется от* $f \in S^{(p,q)}(\sigma^{m-1})$, $q \in (0, \infty)$, $p \in (0, \infty]$ *частная сумма Фурье–Лапласа* $S_{n-1}^{(\lambda)}(f)$:

$$E_n(f)_{S^{(p,q)}} = \inf_{P_{n-1}} \|f - P_{n-1}\|_{S^{(p,q)}} = \|f - S_{n-1}^{(\lambda)}(f)\|_{S^{(p,q)}},$$

причем

$$E_n^q(f)_{S^{(p,q)}} = \|f\|_{S^{(p,q)}}^q - \sum_{k=0}^{n-1} \|Y_k^{(\lambda)}(f)\|_p^q = \sum_{k=n}^{\infty} \|Y_k^{(\lambda)}(f)\|_p^q.$$

Из предложения B следует, в частности, что система (1.4) полна в пространстве $S^{(p,q)}(\sigma^{m-1})$ и $S^{(p,q)}(\sigma^{m-1})$ сепарабельно.

Определим следующие классы функций [6]. Обозначим

$$L^\psi S^{(p,q)} = L^\psi S^{(p,q)}(\sigma^{m-1}) = \{f \in L^\psi(\sigma^{m-1}) : f^\psi \in S^{(p,q)}(\sigma^{m-1})\}.$$

Если $f \in L^\psi S^{(p,q)}$ и система ψ ограничена, $|\psi(k)| \leqslant C$, $k = 1, 2, \dots$, то $f \in S^{(p,q)}$. Действительно, в силу определения (1.3)

$$\begin{aligned}\|f\|_{S^{(p,q)}} &= \left(\sum_{k=0}^{\infty} \|Y_k^{(\lambda)}(f)\|_p^q\right)^{1/q} = \left(\sum_{k=0}^{\infty} \|\psi(k) Y_k^{(\lambda)}(f)\|_p^q\right)^{1/q} \\ &\leqslant C\left(\sum_{k=0}^{\infty} \|Y_k^{(\lambda)}(f^\psi)\|_p^q\right)^{1/q} = C\|f^\psi\|_{S^{(p,q)}},\end{aligned}$$

т.е. $L^\psi S^{(p,q)} \subset S^{(p,q)}$, $p \in (0, \infty]$, $q \in (0, \infty)$.

Пусть в некотором функциональном нормированном пространстве X действует семейство операторов A_u, удовлетворяющих условию

$$\lim_{u \to u_0} \|(E - A_u)f\|_X = 0 \tag{A}$$

для всех $f \in X$, т.е. семейство операторов, поточечно сходящихся к тождественному оператору E при $u \to u_0$. К такому виду операторов относятся, в частности, непрерывные методы суммирования рядов, в том числе интегралы Пуассона, различные операторы сдвига, операторы дробного интегрирования и др. Как известно, неравенства типа Джексона устанавливаются в терминах приближающих агрегатов и, как правило, разностных характеристик элементов соответствующих пространств, построенных на основе операторов сдвига.

Данную тематику можно расширить в том смысле, что неравенства типа Джексона могут быть сформулированы в терминах операторов $(E - A_u)$ и их степеней, удовлетворяющих условию (A).

На этом пути рассмотрим следующие определения. Пусть задана некоторая система комплексных функций $h = \{h_k(u)\}$, $k = 0, 1, \dots$, $u \in (\tau_0, \tau_1)$ таких, что

$$\begin{gathered} h_0(u) := 1, \qquad |h_k(u)| < 1, \quad k = 1, 2, \dots, \qquad u \in (\tau_0, \tau_1), \\ \lim_{u \to \tau_1 -} h_k(u) = 1 \qquad \text{или} \qquad \lim_{u \to \tau_0 +} h_k(u) = 1, \end{gathered} \tag{1.6}$$

и для любой функции $f \in L(\sigma^{m-1})$ ряд

$$\sum_{k=0}^{\infty} h_k(u) Y_k^{(\lambda)}(f,x) \tag{1.7}$$

– это ряд Фурье–Лапласа соответствующей функции $S_u f = S_{h,u} f(x) \in L(\sigma^{m-1})$, т.е.

$$Y_k^{(\lambda)}(S_u f, x) = h_k(u) Y_k^{(\lambda)}(f,x), \qquad k = 0, 1, \dots . \tag{1.8}$$

Таким образом, система функций h порождает оператор $A_u = S_u$, действующий из $L(\sigma^{m-1})$ в $L(\sigma^{m-1})$.

Пусть, далее, E – тождественный оператор, r – положительное действительное число, $g_r(t) = (1-t)^{r/2}$. Введем в рассмотрение известный разностный оператор порядка $r > 0$:

$$\Delta_u^r = \Delta_{h,u}^r := (E - S_{h,u})^{r/2} = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{1}{k!} g_r^{(k)}(0) S_{h,u}^k,$$
$$S_{h,u}^0 := f, \qquad S_{h,u}^k = S_{h,u}(S_{h,u}^{k-1}), \quad k = 1, 2, \dots . \tag{1.9}$$

В соответствии с (1.6)–(1.9), принимая во внимание равенство

$$Y_k^{(\lambda)}(\Delta_u^r f, x) = (1 - h_k(u))^{r/2} Y_k^{(\lambda)}(f,x), \tag{1.10}$$

для любой функции $f \in S^{(p,q)}$ и для всех $u \in (\tau_0, \tau_1)$ получаем

$$\|\Delta_u^r f\|_{S^{(p,q)}} = \left(\sum_{k=0}^{\infty} |1 - h_k(u)|^{rq/2} \|Y_k^{(\lambda)}(f)\|_p^q \right)^{1/q}, \tag{1.11}$$
$$\Delta_u^r f \in S^{(p,q)}, \qquad \lim_{u \to \tau_1 - (\tau_0 +)} \|\Delta_u^r f\|_{S^{(p,q)}} = 0.$$

В случае

$$h_k(u) = \frac{P_k^{(\lambda)}(\cos u)}{P_k^{(\lambda)}(1)}, \qquad u \in (0, \pi),$$

где $P_k^{(\lambda)}(t)$ – многочлены Гегенбауэра, разностная характеристика (1.11) со сдвигом

$$S_u f(x) = \frac{1}{|\sigma^{m-2}| \sin^{2\lambda} u} \int_{(x,y) = \cos u} f(y)\, dt(y), \qquad u \in (0, \pi),$$

где $|\sigma^{m-2}|$ – “площадь поверхности” сферы σ^{m-2}, и соответствующим ему модулем непрерывности в пространствах $S^{(p,q)}$ рассматривались в работах автора [3], [4] в связи с прямыми и обратными теоремами приближения в этих пространствах.

Каждое подпространство H_k содержит единственную зональную сферическую гармонику $z_k(x)$ вещественнозначную, зависящую только от $\theta = d(x,x)$ – сферического расстояния между точкой $x \in \sigma^{m-1}$ и точкой $x^0 = (0, \dots, 0, 1)$. Зональные сферические гармоники выражаются через полиномы Гегенбауэра $P_k^{(\lambda)}(t)$:

$$z_k(x) = \widetilde{z}_k(\theta) = \frac{k+\lambda}{\lambda} P_k^{(\lambda)}(\cos\theta).$$

Для зональной функции $g \in L(\sigma^{m-1})$ и функции $f \in L(\sigma^{m-1})$ свертка $[f * g](x)$, как известно, определяется по формуле

$$[f * g](x) = \int_{\sigma^{m-1}} f(y) g((x,y))\, dy, \qquad [f * g] \in L(\sigma^{m-1}),$$

где $(x,y) = \cos\theta$, если полюс x^0 поместить в точку x, при этом

$$Y_k^{(\lambda)}(f,x) = [f * z_k](x). \tag{1.12}$$

Относительно приведенных выше элементов гармонического анализа на сфере σ^{m-1} см. [7]–[9]. Имеет место следующее утверждение относительно условия (1.8).

Предложение 1. *Если существует зональная функция $g_u(x) = \widetilde{g}_u(\theta) \in L(\sigma^{m-1})$ такая, что*

$$S^{(\lambda)}[g_u] = \sum_{k=0}^{\infty} h_k(u) z_k(x), \tag{1.13}$$

то для каждой функции $f \in L(\sigma^{m-1})$ с рядом

$$S^{(\lambda)}[f] = \sum_{k=0}^{\infty} Y_k^{(\lambda)}(f,x)$$

ряд

$$\sum_{k=0}^{\infty} h_k(u) Y_k^{(\lambda)}(f,x)$$

является рядом Фурье–Лапласа некоторой функции $S_u f$ тогда и только тогда, когда почти всюду на σ^{m-1}

$$S_u f(x) = [f * g_u](x) = \int_{\sigma^{m-1}} f(y) g_u(\cos\theta)\, dy. \tag{1.14}$$

Доказательство. Пусть $S_u f(x) = [f * g_u]$. Тогда $S_u f \in L(\sigma^{m-1})$. В силу представления коэффициентов Фурье свертки через коэффициенты Фурье свертываемых функций [8; с. 69, 70]; с учетом того, что матрицы коэффициентов зональной функции g_u являются диагональными, имеем

$$\widehat{(S_u f)}_{k,j} = h_k(u) \widehat{f}_{k,j}$$

и, значит,

$$S^{(\lambda)}[S_u f] = \sum_{k=0}^{\infty} h_k(u) Y_k^{(\lambda)}(f,x).$$

Обратно, пусть

$$Y_k^{(\lambda)}(S_u f, x) = h_k(u) Y_k^{(\lambda)}(f,x).$$

Тогда

$$\begin{aligned} S^{(\lambda)}[S_u f] &= \sum_{k=0}^{\infty} Y_k^{(\lambda)}(S_u f, x) = \sum_{k=0}^{\infty} h_k(u) Y_k^{(\lambda)}(f,x) \\ &= \sum_{k=0}^{\infty} Y_k^{(\lambda)}([f * g_u], x]) = S^{\lambda}[[f * g_u]]. \end{aligned}$$

Предложение 1 доказано.

То же самое можно доказать, используя равенство (1.12) и ассоциативность свертки.

Пусть, к примеру, $h_k(u) = u^k$, $u \in (0,1)$. В силу неравенства

$$|P_n^{(\lambda)}(\cos\theta)| \leqslant Cn^{2\lambda-1}$$

(см., например, [9; с. 106]) заключаем, что ряд

$$P_u(\theta) := \sum_{k=0}^{\infty} z_k(x)u^k = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{k+\lambda}{\lambda} P_k^{(\lambda)}(\cos\theta)u^k$$

равномерно сходится относительно θ и, значит, является рядом Фурье ядра Пуассона (см., например, [9; с. 107])

$$P_u(\theta) = \frac{1-u^2}{(1-2u\cos\theta+u^2)^{\lambda+1}}\,.$$

Следовательно, согласно предложению 1 ряд

$$\sum_{k=0}^{\infty} u^k Y_k^{(\lambda)}(f,x)$$

является рядом Фурье–Лапласа функции

$$S_u f(x) = \int_{\sigma^{m-1}} f(y)P_u(\theta)\,du,$$

т.е. интеграла Пуассона функции f.

Таким образом, последовательность $h_k(u) = u^k$, $u \in (0,1)$, удовлетворяет условиям (1.6), (1.8), а также условию

$$\lim_{u\to 1-} h_k(u) = 1, \qquad k = 1,2,\dots\,.$$

Известно [10], что в случае $h_k(u) = (k(k+m-2))^{-u/2}$, $u > 0$, $k = 1,2,\dots$, существует зональная функция $g_u(x) = \widetilde{g}_u(\theta)$, $g \in L(\sigma^{m-1})$, для которой выполняется условие (1.13):

$$S^{(\lambda)}[g_u] = \sum_{k=1}^{\infty} (k(k+m-2))^{-u/2} z_k(x). \tag{1.15}$$

Тогда, полагая $h_0(u) := 1$ и обозначая

$$L^0(\sigma^{m-1}) := \left\{ f \in L(\sigma^{m-1}) : Y_0(f) = \int_{\sigma^{m-1}} f(x)\,dx = 0 \right\},$$

из предложения 1 получаем, что для любой функции $f \in L^0(\sigma^{m-1})$ ряд

$$\sum_{k=1}^{\infty} (k(k+m-2))^{-u/2} Y_k^{(\lambda)}(f,x)$$

является рядом Фурье–Лапласа функции Suf, почти всюду на σ^{m-1} определяемой равенством (1.14), в котором зональная функция g_u определяется равенством (1.15). При этом, данная система h удовлетворяет условию (1.6) и $\lim_{u\to 0+} h_k(u) = 1$, $k = 1,2,\dots$. В этом случае, как известно, S_u определяет оператор дробного интегрирования на сфере σ^{m-1}.

2. Постановка задачи. Известно большое количество работ, посвященных неравенствам типа Джексона–Стечкина для функций, заданных на сфере σ^{m-1}. К этому числу относятся работы Никольского и Лизоркина [11], Джафарова [12], Кушниренко [13], Петровой [14], Рустамова [15], Бутцера [16]. Точные неравенства типа Джексона–Стечкина для наилучших приближений и линейных методов приближения в пространствах непрерывных функций $C(\sigma^{m-1})$, $L_2(\sigma^{m-1})$, $L_p(\sigma^{m-1})$, $p \geqslant 1$ исследовались в работах Шалаева [17], Арестова и Попова [18], Бабенко [19], Горбачёва [20], Попова [21], Бабенко, Доронина, Лигуна, Шумейко [22], автора [3], [4] в пространствах $S^{(p,q)}$.

Первые точные неравенства типа Джексона в периодическом случае в пространстве $L_2(\sigma^1)$ были получены Черных [23], [24], Бабенко [21], Тайковым [26], [27]. Точную константу в неравенстве Джексона для функций многих переменных, заданных на торе T^m в $L_2(T^m)$ нашел Юдин [28]. Относительно других точных результатов в этом направлении см. [29]–[33]. Аналогичные вопросы в пространствах периодических функций, подобных $S^{(p,q)}$, исследовались в работах Степанца и Сердюка [1; ч. 2].

В настоящей работе устанавливаются неравенства типа Джексона–Стечкина для функций классов $L^\psi S^{(p,q)}(\sigma^{m-1})$ в пространствах $S^{(p,q)}(\sigma^{m-1})$ в терминах величин, определяемых равенством (1.11), при этом аппаратом приближения являются линейные методы суммирования рядов Фурье–Лапласа вида

$$U_{n-1}^{(\lambda)}(f,M) = U_{n-1}^{(\lambda)}(f,M,x) := \sum_{k=0}^{n-1} \mu_k Y_k^{(\lambda)}(f,x),$$

где $M = \{\mu_k\}$, $k = 0,1,\dots,$ – некоторая последовательность комплексных чисел, $\mu_0 := 1$. В частности, когда $\mu_k = 1$, $k = 0,1,\dots,$

$$U_{n-1}^{(\lambda)}(f,M,x) = S_{n-1}^{(\lambda)}(f,x).$$

Далее положим

$$\delta_n(f,M)_{S^{(p,q)}} := \|f - U_{n-1}(f,M)\|_{S^{(p,q)}}.$$

Если $\mu_k = 1$, $k = 0,1,\dots,$ то

$$E_n(f)_{S^{(p,q)}} = \delta_n(f,M)_{S^{(p,q)}}.$$

Нас будут интересовать оценки вида

$$\delta_n^q(f,M)_{S^{(p,q)}} \leqslant K_n(M,\theta,h,r,\psi,\tau,q) \int_{T_\tau} \|\Delta_u^r f^\psi\|_{S^{(p,q)}}^q \theta(u)\,du,$$

где

$$T_\tau := \begin{cases} [\tau,\tau_1], & \text{если } \lim_{u\to\tau_1-} h_k(u) = 1, \\ [\tau_0,\tau], & \text{если } \lim_{u\to\tau_0+} h_k(u) = 1, \end{cases} \qquad \tau \in (\tau_0,\tau_1),$$

и

$$\delta_n^q(f,M)_{S^{(p,q)}} \leqslant \widetilde{K}_n(M,h,r,\psi,\tau,q)\|\Delta_\tau^r f^\psi\|_{S^{(p,q)}}^q, \qquad \tau \in (\tau_0,\tau_1), \quad n = 1,2,\dots,$$

неулучшаемые в известном смысле, где $\theta(\,\cdot\,)$ – некоторая ненулевая неотрицательная суммируемая на T_τ функция.

В дальнейшем будем полагать

$$K_{n,1}(M,\theta,h,r,\psi,\tau,q) := \max_{1\leqslant k\leqslant n-1} \frac{|1-\mu_k|^q|\psi(k)|^q}{\int_{T_\tau}|1-h_k(u)|^{rq/2}\theta(u)\,du}, \tag{2.1}$$

$$K_{n,2}(\theta,h,r,\psi,\tau,q) := \sup_{k>n-1} \frac{|\psi(k)|^q}{\int_{T_\tau}|1-h_k(u)|^{rq/2}\theta(u)\,du}, \tag{2.2}$$

$$K_n(M,\theta,h,r,\psi,\tau,q) := \max\{K_{n,1}(M,\theta,h,r,\psi,\tau,q), K_{n,2}(\theta,h,r,\psi,\tau,q)\}, \tag{2.3}$$

а также,

$$\widetilde{K}_{n,1}(M,h,r,\psi,\tau,q) := \max_{1\leqslant k\leqslant n-1} \frac{|1-\mu_k|^q|\psi(k)|^q}{|1-h_k(\tau)|^{rq/2}}, \tag{2.4}$$

$$\widetilde{K}_{n,2}(h,r,\psi,\tau,q) := \sup_{k>n-1} \frac{|\psi(k)|^q}{|1-h_k(\tau)|^{rq/2}}, \qquad \tau\in(\tau_0,\tau_1), \tag{2.5}$$

$$\widetilde{K}_n(M,h,r,\psi,\tau,q) = \max\{\widetilde{K}_{n,1}(M,h,r,\psi,\tau,q), \widetilde{K}_{n,2}(h,r,\psi,\tau,q)\}. \tag{2.6}$$

Далее также рассматриваются системы h и ψ, удовлетворяющие дополнительным условиям

$$K_{n,2}(\theta,h,r,\psi,\tau,q) = \frac{|\psi(n)|^q}{\int_{T_\tau}|1-h_n(u)|^{rq/2}\theta(u)\,du} \tag{2.7}$$

или

$$\widetilde{K}_{n,2}(h,r,\psi,\tau,q) = \frac{|\psi(n)|^q}{|1-h_n(\tau)|^{rq/2}}, \qquad \tau\in(\tau_0,\tau_1). \tag{2.8}$$

3. Основные результаты и следствия. Справедливо следующее утверждение.

Теорема 1. *Пусть система $\psi=\{\psi(k)\}$, $\psi(0)=1$, $k=1,2,\dots$, комплексных чисел удовлетворяет условию (1.2) и ограничена, система комплексных функций $h=\{h_k(u)\}$, $u\in(\tau_0,\tau_1)$, удовлетворяет условиям (1.6) и (1.8). Тогда для каждой функции $f\in L^\psi S^{(p,q)}$, $q\in[1,\infty)$, $p\in(0,\infty]$, каждой последовательности $M=\{\mu_k\}$, каждого $\tau\in(\tau_0,\tau_1)$ и каждой ненулевой неотрицательной суммируемой функции $\theta(u)$, $u\in T_\tau$, при всех $n=1,2,\dots$ и при каждом $r>0$ выполняется неравенство*

$$\delta_n^q(f,M)_{S^{(p,q)}} \leqslant K_n(M,\theta,h,r,\psi,\tau,q)\int_{T_\tau}\|\Delta_u^r f^\psi\|^q_{S^{(p,q)}}\theta(u)\,du. \tag{3.1}$$

При этом, если системы h и ψ удовлетворяют условию (2.7), то

$$\sup_{\substack{f\in L^\psi S^{(p,q)}\\ f\neq\mathrm{const}}} \frac{\delta_n^q(f,M)_{S^{(p,q)}}}{\int_{T_\tau}\|\Delta_u^r f^\psi\|^q_{S^{(p,q)}}\theta(u)\,du} = K_n(M,\theta,h,r,\psi,\tau,q), \tag{3.2}$$

т.е. в этом случае неравенство (3.1) неулучшаемо.

Доказательство. В силу определения (1.3) и равенства (1.11) имеем

$$\begin{aligned}\|\Delta_u^r f^\psi\|_{S^{(p,q)}}^q &= \sum_{k=0}^{\infty} |1-h_k(u)|^{rq/2} \|Y_k^{(\lambda)}(f^\psi)\|_p^q \\ &= \sum_{k=0}^{\infty} |1-h_k(u)|^{rq/2} \frac{1}{|\psi(k)|^q} \|Y_k^{(\lambda)}(f)\|_p^q. \end{aligned} \tag{3.3}$$

Для любой функции $f \in L^\psi S^{(p,q)}$ будем иметь

$$\begin{aligned}\delta_n^q(f,M)_{S^{(p,q)}} &= \sum_{k=0}^{\infty} \|Y_k^{(\lambda)}(f - U_{n-1}^{(\lambda)}(f,M))\|_p^q \\ &= \sum_{k=0}^{n-1} \|(1-\mu_k) Y_k^{(\lambda)}(f)\|_p^q + \sum_{k=n}^{\infty} \|Y_k^{(\lambda)}(f)\|_p^q \\ &= \sum_{k=0}^{n-1} |1-\mu_k|^q \|Y_k^{(\lambda)}(f)\|_p^q + \sum_{k=n}^{\infty} \|Y_k^{(\lambda)}(f)\|_p^q \\ &= \sum_{k=1}^{n-1} \frac{\int_{T_\tau} |1-\mu_k|^q |1-h_k(u)|^{rq/2} |\psi(k)|^{-q} \|Y_k^{(\lambda)}(f)\|_p^q \theta(u)\,du}{\int_{T_\tau} |1-h_k(u)|^{rq/2} |\psi(k)|^{-q} \theta(u)\,du} \\ &\quad + \sum_{k=n}^{\infty} \frac{\int_{T_\tau} |1-h_k(u)|^{rq/2} |\psi(k)|^{-q} \|Y_k^{(\lambda)}(f)\|_p^q \theta(u)\,du}{\int_{T_\tau} |1-h_k(u)|^{rq/2} |\psi(k)|^{-q} \theta(u)\,du}. \end{aligned}$$

Учитывая обозначения (2.1)–(2.3) и равенство (3.3), получаем

$$\begin{aligned}&\delta_n^q(f,M)_{S^{(p,q)}} \\ &\quad \leqslant K_{n,1}(M,\theta,h,r,\psi,\tau,q) \biggl(\sum_{k=1}^{n-1} \int_{T_\tau} |1-h_k(u)|^{rq/2} |\psi(k)|^{-q} \|Y_k^{(\lambda)}(f)\|_p^q \theta(u)\,du \biggr) \\ &\qquad + K_{n,2}(\theta,h,r,\psi,\tau,q) \biggl(\sum_{k=n}^{\infty} \int_{T_\tau} |1-h_k(u)|^{rq/2} |\psi(k)|^{-q} \|Y_k^{(\lambda)}(f)\|_p^q \theta(u)\,du \biggr) \\ &\quad \leqslant K_n(M,\theta,h,r,\psi,\tau,q) \biggl(\sum_{k=0}^{\infty} \int_{T_\tau} |1-h_k(u)|^{rq/2} |\psi(k)|^{-q} \|Y_k^{(\lambda)}(f)\|_p^q \theta(u)\,du \biggr) \\ &\quad = K_n(M,\theta,h,r,\psi,\tau,q) \int_{T_\tau} \|\Delta_u^r f^\psi\|_{S^{(p,q)}}^q \theta(u)\,du. \end{aligned}$$

Таким образом, неравенство (3.1) доказано.

Покажем неулучшаемость оценки (3.1), когда системы h и ψ удовлетворяют условию (2.7).

Пусть сначала

$$K_n(M,\theta,h,r,\psi,\tau,q) = K_{n,2}(\theta,h,r,\psi,\tau,q)$$

и положим $f^*(x) = Y_{n,1}(x)$. Тогда будем иметь

$$\begin{gathered}\delta_n^q(f^*,M)_{S^{(p,q)}} = \|f^* - U_{n-1}(f^*,M)\|_{S^{(p,q)}}^q = \|Y_{n,1}\|_p^q, \\ \|\Delta_u^r (f^*)^\psi\|_{S^{(p,q)}}^q = |1-h_n(u)|^{rq/2} \|Y_{n,1}\|_p^q |\psi(n)|^{-q}. \end{gathered}$$

Следовательно, в силу (2.7)

$$\sup_{\substack{f\in L^\psi S^{(p,q)}\\ f\neq\mathrm{const}}} \frac{\delta_n^q(f,M)_{S^{(p,q)}}}{\int_{T_\tau}\|\Delta_u^r f^\psi\|^q_{S^{(p,q)}}\theta(u)\,du} \geqslant \frac{\delta_n^q(f^*,M)_{S^{(p,q)}}}{\int_{T_\tau}\|\Delta_u^r (f^*)^\psi\|^q_{S^{(p,q)}}\theta(u)\,du}$$
$$= \frac{\|Y_{n,1}\|_p^q}{\int_{T_\tau}|1-h_n(u)|^{rq/2}\|Y_{n,1}\|_p^q|\psi(n)|^{-q}\theta(u)\,du}$$
$$= \frac{|\psi(n)|^q}{\int_{T_\tau}|1-h_n(u)|^{rq/2}\theta(u)\,du} = K_{n,2}(\theta,h,r,\psi,\tau,q).$$

Если же

$$K_n(M,\theta,h,r,\psi,\tau,q) = K_{n,1}(M,\theta,h,r,\psi,\tau,q),$$
$$K_{n,1}(M,\theta,h,r,\psi,\tau,q) = \frac{|1-\mu_{k_0}|^q|\psi(k_0)|^q}{\int_{T_\tau}|1-h_{k_0}(u)|^{rq/2}\theta(u)\,du},$$

где $1\leqslant k_0\leqslant n-1$, полагая $f^*(x)=Y_{k_0,1}(x)$, получаем

$$\|\Delta_u^r(f^*)^\psi\|^q_{S^{(p,q)}} = |1-h_{k_0}(u)|^{rq/2}|\psi(k_0)|^{-q}\|Y_{k_0,1}\|_p^q,$$
$$\delta_n^q(f^*,M)_{S^{(p,q)}} = |1-\mu_{k_0}|^q\|Y_{k_0,1}\|_p^q.$$

Поэтому

$$\sup_{\substack{f\in L^\psi S^{(p,q)}\\ f\neq\mathrm{const}}} \frac{\delta_n^q(f,M)_{S^{(p,q)}}}{\int_{T_\tau}\|\Delta_u^r f^\psi\|^q_{S^{(p,q)}}\theta(u)\,du} \geqslant \frac{\delta_n^q(f^*,M)_{S^{(p,q)}}}{\int_{T_\tau}\|\Delta_u^r (f^*)^\psi\|^q_{S^{(p,q)}}\theta(u)\,du}$$
$$= \frac{|1-\mu_{k_0}|^q|\psi(k_0)|^q}{\int_{T_\tau}|1-h_{k_0}(u)|^{rq/2}\theta(u)\,du} = K_{n,1}(M,\theta,h,r,\psi,\tau,q).$$

Таким образом,

$$\sup_{\substack{f\in L^\psi S^{(p,q)}\\ f\neq\mathrm{const}}} \frac{\delta_n^q(f,M)_{S^{(p,q)}}}{\int_{T_\tau}\|\Delta_u^r f^\psi\|^q_{S^{(p,q)}}\theta(u)\,du} \geqslant K_n(M,\theta,h,r,\psi,\tau,q).$$

Равенство (3.2) доказано.

Теорема 2. *Пусть система $\psi=\{\psi(k)\}$, $\psi(0)=1$, $k=1,2,\dots$ комплексных чисел удовлетворяет условию (1.2) и ограничена, система комплексных функций $h=\{h_k(u)\}$, $u\in(\tau_0,\tau_1)$, удовлетворяет условиям (1.6) и (1.8). Тогда для каждой функции $f\in L^\psi S^{(p,q)}$, $q\in[1,\infty)$, $p\in(0,\infty]$, каждой последовательности $M=\{\mu_k\}$, каждого $\tau\in(\tau_0,\tau_1)$ при всех $n=1,2,\dots$ и при каждом $r>0$ справедливо неравенство*

$$\delta_n^q(f,M)_{S^{(p,q)}} \leqslant \widetilde{K}_n(M,h,r,\psi,\tau,q)\|\Delta_\tau^r f^\psi\|^q_{S^{(p,q)}}. \tag{3.4}$$

При этом, если системы h и ψ удовлетворяют условию (2.8), то для любого $\tau\in(\tau_0,\tau_1)$ при всех $n=1,2,\dots$ и при каждом $r>0$

$$\sup_{\substack{f\in L^\psi S^{(p,q)}\\ f\neq\mathrm{const}}} \frac{\delta_n^q(f,M)_{S^{(p,q)}}}{\|\Delta_\tau^r f^\psi\|^q_{S^{(p,q)}}} = \widetilde{K}_n(M,h,r,\psi,\tau,q), \tag{3.5}$$

т.е. в этом случае неравенство (3.4) неулучшаемо.

Для доказательства соотношений (3.4) и (3.5) достаточно повторить с очевидными изменениями приведенные выше рассуждения с учетом условия (2.8) и обозначений (2.4)–(2.6).

Для наилучших приближений получаем такие следствия.

Следствие 1. *В условиях теоремы 1 справедливо неравенство*

$$E_n^q(f)_{S^{(p,q)}} \leqslant K_{n,2}(\theta, h, r, \psi, \tau, q) \int_{T_\tau} \|\Delta_u^r f^\psi\|_{S^{(p,q)}}^q \theta(u)\, du.$$

При этом, если системы h и ψ удовлетворяют условию (2.7), то для всех $\tau \in (\tau_0, \tau_1)$ и при всех $n = 1, 2, \dots$.

$$\sup_{\substack{f \in L^\psi S^{(p,q)} \\ f \neq \mathrm{const}}} \frac{E_n^q(f)_{S^{(p,q)}}}{\int_{T_\tau} \|\Delta_u^r f^\psi\|_{S^{(p,q)}}^q \theta(u)\, du} = \frac{|\psi(n)|^q}{\int_{T_\tau} |1 - h_n(u)|^{rq/2} \theta(u)\, du}.$$

Следствие 2. *В условиях теоремы 2 имеет место неравенство*

$$E_n^q(f)_{S^{(p,q)}} \leqslant \widetilde{K}_{n,2}(h, r, \psi, \tau, q) \|\Delta_\tau^r f^\psi\|_{S^{(p,q)}}^q, \qquad \tau \in (\tau_0, \tau_1).$$

При этом, если системы h и ψ удовлетворяют условию (2.8), то для каждого $\tau \in (\tau_0, \tau_1)$ при всех $n = 1, 2, \dots$.

$$\sup_{\substack{f \in L^\psi S^{(p,q)} \\ f \neq \mathrm{const}}} \frac{E_n^q(f)_{S^{(p,q)}}}{\|\Delta_\tau^r f^\psi\|_{S^{(p,q)}}^q} = \frac{|\psi(n)|^q}{|1 - h_n(\tau)|^{rq/2}}.$$

Следствие 3. *Если системы h и ψ удовлетворяют условию (2.8), то в условиях теоремы 2 справедливы неулучшаемые неравенства*

$$\delta_n^q(f, M)_{S^{(p,q)}} \leqslant \max\left\{ \max_{k \leqslant n-1} \frac{|1 - \mu_k|^q |\psi(k)|^q}{|1 - h_k(\tau)|^{rq/2}}, \frac{|\psi(n)|^q}{|1 - h_n(\tau)|^{rq/2}} \right\} \|\Delta_u^r f^\psi\|_{S^{(p,q)}}^q, \qquad \tau \in (\tau_0, \tau_1),$$

в частности,

$$E_n^q(f)_{S^{(p,q)}} \leqslant \frac{|\psi(n)|^q}{|1 - h_n(\tau)|^{rq/2}} \|\Delta_\tau^r f^\psi\|_{S^{(p,q)}}^q, \qquad \tau \in (\tau_0, \tau_1).$$

Сравнивая множители при $\|\Delta_\tau^r f^\psi\|_{S^{(p,q)}}^q$, нетрудно убедиться, что если последовательность $M = \{\mu_k\}$ такова, что при некотором $\tau = \tau(n) \in (\tau_0, \tau_1)$ при всех $k \leqslant n-1$

$$|1 - \mu_k| \leqslant \frac{|1 - h_k(\tau)|^{r/2} |\psi(n)|}{|1 - h_n(\tau)|^{r/2} |\psi(k)|},$$

то упомянутые множители в рассматриваемых неравенствах совпадают.

Далее заметим, что системы h и ψ удовлетворяют условиям (2.7) и (2.8), если последовательность чисел $\{|\psi(k)|\}$, $k = 1, 2, \dots$, монотонно убывает, а система действительных функций $h = \{h_k(u)\}$ такова, что при каждом фиксированном $u \in (\tau_0, \tau_1)$ последовательность действительных чисел $\{h_k(u)\}$, помимо указанных выше условий, так же монотонно убывает. Стало быть, имеют место следующие утверждения.

Теорема 3. *Пусть система* $\{\psi(k)\}$, $\psi(0)=1$, $k=1,2,\dots$, *комплексных чисел удовлетворяет условию* (1.2) *и последовательность* $\{|\psi(k)|\}$ *монотонно убывает, система действительных функций* $\{h_k(u)\}$, $u\in(\tau_0,\tau_1)$, *удовлетворяет условиям* (1.6), (1.7) *и при каждом фиксированном* $u\in(\tau_0,\tau_1)$ *последовательность чисел* $\{h_k(u)\}$, $k=1,2,\dots$, *монотонно убывает. Тогда для каждой функции* $f\in L^\psi S^{(p,q)}$, *каждой последовательности* $M=\{\mu_k\}$, *каждого* $\tau\in(\tau_0,\tau_1)$ *и любой ненулевой неотрицательной суммируемой на* T_τ *функции* $\theta(\,\cdot\,)$ *при всех* $r>0$ *и при каждом* $n=1,2,\dots$, *имеет место неулучшаемое неравенство* (3.1), *где множитель* $K_n(M,\theta,h,r,\psi,\tau,q)$ *определен равенством* (2.3), *в котором*

$$K_{n,1}(M,\theta,h,r,\psi,\tau,q)=\max_{1\leqslant k\leqslant n-1}\frac{|1-\mu_k|^q|\psi(k)|^q}{\int_{T_\tau}(1-h_k(u))^{rq/2}\theta(u)\,du}\,, \tag{3.6}$$

$$K_{n,2}(\theta,h,r,\psi,\tau,q)=\frac{|\psi(n)|^q}{\int_{T_\tau}(1-h_n(u))^{rq/2}\theta(u)\,du}\,. \tag{3.7}$$

Теорема 4. *Пусть системы* h *и* ψ *удовлетворяют условиям теоремы* 3. *Тогда для каждой функции* $f\in L^\psi S^{(p,q)}$, *каждой последовательности* $M=\{\mu_k\}$, *каждого* $\tau\in(\tau_0,\tau_1)$ *при всех* $r>0$ *и при каждом* $n=1,2,\dots$ *имеет место неулучшаемое неравенство* (3.4), *где множитель* $\widetilde{K}_n(M,h,r,\psi,\tau,q)$ *определен равенством* (2.6), *в котором*

$$\widetilde{K}_{n,1}(M,h,r,\psi,\tau,q)=\max_{1\leqslant k\leqslant n-1}\frac{|1-\mu_k|^q|\psi(k)|^q}{(1-h_k(\tau))^{rq/2}}\,, \tag{3.8}$$

$$\widetilde{K}_{n,2}(h,r,\psi,\tau,q)=\frac{|\psi(n)|^q}{(1-h_n(\tau))^{rq/2}}\,. \tag{3.9}$$

Возьмем в качестве системы h последовательность функций $h_k(u)=u^k$, $k=0,1,\dots$, $u\in(0,1)$. В этом случае, в соответствии с определениями (1.8)–(1.11), имеем

$$Suf(x)=\int_{\sigma^{m-1}}f(y)P_u(\theta)\,dy,\qquad S^\lambda[Suf]=\sum_{k=0}^\infty u^kY_k^{(\lambda)}(f,x),$$

$$S^\lambda[\Delta_u^rf]=\sum_{k=0}^\infty(1-u^k)^{rq/2}Y_k^{(\lambda)}(f,x),\qquad \|\Delta_u^rf\|^q_{S^{(p,q)}}=\sum_{k=0}^\infty(1-u^k)^{rq/2}\|Y_k^{(\lambda)}(f)\|_p^q,$$

Поэтому из теорем 3 и 4, учитывая равенства (3.6)–(3.9), получаем следующее утверждение.

Следствие 4. *Пусть система* $\psi=\{\psi(k)\}$, $\psi(0)=1$, $k=1,2,\dots$, *комплексных чисел удовлетворяет условию* (1.2) *и последовательность* $\{|\psi(k)|\}$ *монотонно убывает. Тогда для каждой функции* $f\in L^\psi S^{(p,q)}$, *каждой последовательности* $M=\{\mu_k\}$, *каждого* $\tau\in(0,1)$ *и каждой ненулевой неотрицательной суммируемой на* $[\tau,1]$ *функции* $\theta(\,\cdot\,)$ *при всех* $r>0$ *и при каждом* $n=1,2,\dots$ *имеют место неулучшаемые неравенства*

$$\delta_n^q(f,M)_{S^{(p,q)}}\leqslant K_n(M,\theta,h,r,\psi,\tau,q)\int_\tau^1\|\Delta_u^rf^\psi\|^q_{S^{(p,q)}}\theta(u)\,du, \tag{3.10}$$

где

$$K_n(M,\theta,h,r,\psi,\tau,q):=\max\{K_{n,1}(M,\theta,h,r,\psi,\tau,q),K_{n,2}(\theta,h,r,\psi,\tau,q)\},$$

$$K_{n,1}(M,\theta,h,r,\psi,\tau,q) = \max_{1\leqslant k\leqslant n-1} \frac{|1-\mu_k|^q|\psi(k)|^q}{\int_\tau^1 (1-u^k)^{rq/2}\theta(u)\,du},$$
$$K_{n,2}(\theta,h,r,\psi,\tau,q) = \frac{|\psi(n)|^q}{\int_\tau^1 (1-u^n)^{rq/2}\theta(u)\,du};$$

в частности,

$$E_n^q(f)_{S^{(p,q)}} \leqslant \frac{|\psi(n)|^q \int_\tau^1 \|\Delta_u^r f^\psi\|^q_{S^{(p,q)}}\theta(u)\,du}{\int_\tau^1 (1-u^n)^{rq/2}\theta(u)\,du}, \tag{3.11}$$

а также неулучшаемые неравенства

$$\delta_n^q(f,M)_{S^{(p,q)}} \leqslant \widetilde{K}_n(M,h,r,\psi,\tau,q)\|\Delta_\tau^r f^\psi\|^q_{S^{(p,q)}}, \tag{3.12}$$

где

$$\widetilde{K}_n(M,h,r,\psi,\tau,q) := \max\{\widetilde{K}_{n,1}(M,h,r,\psi,\tau,q), \widetilde{K}_{n,2}(h,r,\psi,\tau,q)\},$$
$$\widetilde{K}_{n,1}(M,h,r,\psi,\tau,q) = \max_{1\leqslant k\leqslant n-1} \frac{|1-\mu_k|^q|\psi(k)|^q}{(1-\tau^k)^{rq/2}},$$
$$\widetilde{K}_{n,2}(h,r,\psi,\tau,q) = \frac{|\psi(n)|^q}{(1-\tau^n)^{rq/2}}, \qquad \tau\in(0,1);$$

в частности,

$$E_n^q(f)_{S^{(p,q)}} \leqslant \frac{|\psi(n)|^q}{(1-\tau^n)^{rq/2}}\|\Delta_\tau^r f^\psi\|^q_{S^{(p,q)}}, \tag{3.13}$$

если же $\tau=\tau(n,s)=s^{-1/n}$, $s>1$, *то*

$$E_n^q(f)_{S^{(p,q)}} \leqslant \left(\frac{s}{s-1}\right)^{rq/2} |\psi(n)|^q\|\Delta^r_{s^{-1/n}} f^\psi\|^q_{S^{(p,q)}}. \tag{3.14}$$

Полагая

$$\psi(k)=\psi(k,m)=(k(k+m-2))^{-\alpha/2}, \qquad \alpha>0,$$
$$L^\psi S^{(p,q)} := L^\alpha S^{(p,q)}, \qquad f^\psi := f^{(\alpha)},$$

получаем оценки, аналогичные оценкам (3.10)–(3.14) для функций классов $L^\alpha S^{(p,q)}$, которые в случае $S^{(2,2)}(\sigma^{m-1}) = L_2(\sigma^{m-1})$ и $r=2l$, $l=1,2,\dots$, $s=2$, ранее были получены в [22].

Пусть, далее,

$$\psi(k)=\psi_{\gamma,\alpha}(k)=\exp(-\gamma k^\alpha), \qquad \gamma>0, \quad \alpha>0.$$

Тогда для классов функций $L^{\psi_{\gamma,\alpha}}S^{(p,q)} := L^\psi S^{(p,q)}$, $f^\psi := f^{\psi_{\gamma,\alpha}}$, состоящих из бесконечно дифференцируемых на сфере функций в смысле действия оператора Лапласа–Бельтрами, из оценок (3.10)–(3.14) получаем соответствующие неулучшаемые неравенства типа Джексона–Стечкина.

СПИСОК ЦИТИРОВАННОЙ ЛИТЕРАТУРЫ

[1] Р. А. Ласурия, “Приближения функций на сфере линейными методами”, *Укр. матем. журн*, **66**:11 (2014), 1498–1511.

[2] А. И. Степанец, *Методы теории приближений*, Ч. 1, Праці Ін-ту математики НАН України. Математика та її застосування, **40**, Ін-т математики НАН України, Київ, 2002; А. И. Степанец, *Методы теории приближений*, Ч. 2, Праці Ін-ту математики НАН України. Математика та її застосування, **40**, Ін-т математики НАН України, Київ, 2002.

[3] Р. А. Ласурия, “Прямые и обратные теоремы приближения функций, заданных на сфере в пространстве $S^{(p,q)}(\sigma^m)$”, *Укр. матем. журн.*, **59**:7 (2007), 901–911.

[4] Р. А. Ласурия, “Прямые и обратные теоремы приближения функций суммами Фурье–Лапласа в пространствах $S^{(p,q)}(\sigma^{m-1})$”, *Матем. заметки*, **98**:4 (2015), 530–543.

[5] И. М. Стейн, *Сингулярные интегралы и дифференциальные свойства функций*, Мир, М., 1973.

[6] Р. А. Ласурия, “Аппроксимационные характеристики пространств $S^{(p,q)}(\sigma^m)$ функций, заданных на сфере”, *Екстремальні задачі теорії функцій та суміжні питання*, Праці Ін-ту математики НАН України, **46**, Ін-т математики НАН України, Київ, 2003, 89–115.

[7] И. Стейн, Г. Вейс, *Введение в гармонический анализ на евклидовых пространствах*, Мир, М., 1974.

[8] Н. Я. Виленкин, *Специальные функции и теория представлений групп*, Наука, М., 1965.

[9] Л. В. Жижиашвили, С. Б. Топурия, “Ряды Фурье–Лапласа на сфере”, Итоги науки и техн. Сер. Мат. анал., **15**, ВИНИТИ, М., 1977, 83–130.

[10] R. Askey, S. Wainger, “On the behavior of special classes of ultrasherical expansions. I”, *J. Anal. Math.*, **15** (1965), 193–220; R. Askey, S. Wainger, “On the behavior of special classes of ultrasherical expansions. II”, *J. Anal. Math.*, **15** (1965), 221–244.

[11] С. М. Никольский, П. И. Лизоркин, “Аппроксимация функций на сфере”, *Изв. АН СССР. Сер. матем.*, **51**:3 (1987), 635–651.

[12] Ар. С. Джафаров, “О сферических аналогах классических теорем Дж. Джексона и С. Н. Бернштейна”, *Докл. АН СССР*, **203**:2 (1972), 278–281.

[13] Г. Г. Кушниренко, “О приближении функций, заданных на единичной сфере, конечными сферическими суммами”, *Науч. докл. высшей школы. Сер. физ.-матем. наук*, 1958, № 4, 47–53.

[14] И. В. Петрова, “Теорема Джексона и пространство Бесова на сфере”, *Докл. АН СССР*, **278**:3 (1984), 544–549.

[15] Х. П. Рустамов, “О приближении функций на сфере”, *Изв. РАН. Сер. матем.*, **57**:5 (1993), 127–148.

[16] P. L. Butzer, “A survey of fork on approximation at Aachen, 1968–1972”, *Approximation Theory*, Academic Press, New York, 1973, 31–100.

[17] В. В. Шалаев, “Точные оценки приближения непрерывных на сфере функций линейными операторами типа свертки”, *Укр. матем. журн.*, **43**:4 (1991), 565–567.

[18] В. В. Арестов, В. Ю. Попов, “Неравенства Джексона на сфере в L_2”, *Изв. вузов. Матем.*, 1995, № 8, 13–20.

[19] А. Г. Бабенко, “Точное неравенство Джексона–Стечкина в пространстве L^2 функций на многомерной сфере”, *Матем. заметки*, **60**:3 (1996), 333–355.

[20] Д. В. Горбачёв, “Точное неравенство Джексона в пространстве L_p на сфере”, *Матем. заметки*, **66**:1 (1999), 50–62.

[21] В. Ю. Попов, “Приближение на сфере в L_2”, *Докл. АН СССР*, **301**:4 (1988), 793–797.

[22] В. Ф. Бабенко, В. Г. Доронин, А. А. Лигун, А. А. Шумейко, “О неравенствах типа Джексона для функций, заданных на сфере”, *Укр. матем. журн.*, **57**:3 (2005), 291–304.

[23] Н. И. Черных, “О неравенстве Джексона в L_2”, *Приближение функций в среднем*, Тр. МИАН СССР, **88**, 1967, 71–74.

[24] Н. И. Черных, “О наилучшем приближении периодических функций тригонометрическими полиномами в L_2”, *Матем. заметки*, **2**:5 (1967), 513–522.

[25] А. Г. Бабенко, “О точной константе в неравенстве Джексона в L^2”, *Матем. заметки*, **39**:5 (1986), 651–664.

[26] Л. В. Тайков, “Неравенства, содержащие наилучшие приближения и модуль непрерывности функций из L_2”, *Матем. заметки*, **20**:3 (1976), 433–438.

[27] Л. В. Тайков, “Наилучшие приближения дифференцируемых функций в метрике пространства L_2”, *Матем. заметки*, **22**:4 (1977), 535–542.

[28] В. А. Юдин, “Диофантовы приближения в экстремальных задачах L_2”, *Докл. АН СССР*, **251**:1 (1980), 54–57.

[29] А. А. Лигун, “Точные неравенства типа Джексона для периодических функций в пространстве L_2”, *Матем. заметки*, **43**:6 (1988), 757–769.

[30] V. G. Doronin, A. A. Ligun, “On exact constants in Jackson’s type inequalities in the space L_2”, *East J. Approx.*, **1**:2 (1995), 189–197.

[31] В. В. Волчков, “О точных константах в неравенствах типа Джексона для периодических функций в пространстве L_2”, *Укр. матем. журн.*, **47**:1 (1995), 108–110.

[32] Н. И. Черных, “Неравенство Джексона в $L_p(0, 2\pi)$ $(1 \leqslant p < 2)$ с точной константой”, *Труды Всесоюзной школы по теории функций*, Тр. МИАН, **198**, Наука, М., 1992, 232–241.

[33] Н. П. Корнейчук, *Точные константы в теории приближения*, Наука, М., 1987.

Р. А. Ласурия
Абхазский государственный университет
E-mail: rlasuria67@yandex.ru

Поступило
13.03.2018
После доработки
27.06.2018
Принято к публикации
14.11.2018