Доклады Академии наук СССР
1963. Том 150, № 5

МАТЕМАТИКА

В. Т. ХАРИН

К ОЦЕНКЕ ТОЧНОСТИ ПРИБЛИЖЕННЫХ СОБСТВЕННЫХ ЧИСЕЛ И ВЕКТОРОВ

(Представлено академиком Г. И. Петровым 21 XI 1962)

1. Рассмотрим уравнение

$$T(\lambda)\varphi \equiv [E - K(\lambda)]\varphi = 0, \tag{1,1}$$

где $K(\lambda)$ — вполне непрерывный линейный оператор в гильбертовом пространстве H, аналитически по норме зависящий от параметра λ в некоторой области D комплексной λ-плоскости, E — тождественный оператор ([1]).

Пусть $u \in H$ — нормированный приближенный собственный вектор уравнения (1,1), полученный каким-либо приближенным методом. Применим к уравнению (1,1) обобщенный метод Галеркина ([2,3]) в первом приближении, взяв в качестве первых базисных векторов вектор u и некоторый нормированный вектор $v \in H$. Для приближенных собственных значений получим уравнение

$$E(\lambda) \equiv (T(\lambda)u, v) = 0. \tag{1,2}$$

Пусть теперь H_f означает ортогональное дополнение вектора $f \in H$ до H, и пусть оператор P ортогонально проектирует H на H_v. Всякий вектор $\varphi \in H$ представляется в виде

$$\varphi = au + \omega, \tag{1,3}$$

где $a = (\varphi, u)$, $(\omega, u) = 0$. Проектируя $T(\lambda)\varphi$ последовательно на v и H_v, заменим (1,1) системой уравнений

$$(T(\lambda)\varphi, v) \equiv a(T(\lambda)u, v) + (T(\lambda)\omega, v) = 0; \tag{1,4}$$

$$PT(\lambda)\varphi \equiv aPT(\lambda)u + PT(\lambda)\omega = 0. \tag{1,5}$$

Перепишем (1,5) в виде

$$P[E - K(\lambda)]\omega = -aPT(\lambda)u. \tag{1,6}$$

Вводя обозначение $P\omega = \Omega$ и учитывая, что $\omega \in H_u$, получим

$$\omega = A\Omega \equiv \Omega - \frac{(\Omega, u)}{(v, u)}v. \tag{1,7}$$

Переходя теперь в (1,6) от ω к Ω, будем иметь

$$[E - \tilde{K}(\lambda)]\Omega = -aPT(\lambda)u, \tag{1,8}$$

где оператор $\tilde{K}(\lambda)$ ставит в соответствие вектору $f \in H$ вектор $\tilde{K}(\lambda)f \in H_v$ по формуле

$$\tilde{K}(\lambda)f = PK(\lambda)f - \frac{(f, u)}{(v, u)}PK(\lambda)v \tag{1,9}$$

и $\tilde{K}(\lambda)$ можно рассматривать в H_v, что мы и будем делать всюду ниже.

Пусть приближенное собственное значение λ_1 является регулярной точкой для оператора $\tilde{K}(\lambda)$, т. е. существует оператор $[E - \tilde{K}(\lambda_1)]^{-1}$, а следовательно, в некоторой окрестности точки λ_1 существует оператор $[E -$

$-\widetilde{K}(\lambda)]^{-1}$. Если собственное значение λ уравнения (1,1) попадает в эту окрестность, то, как нетрудно показать, оно простое, $a \neq 0$, и (1,8) разрешается следующим образом:

$$\Omega = -a\,[E - \widetilde{K}(\lambda)]^{-1} PT(\lambda)\, u. \tag{1,10}$$

Если теперь подставить (1,10) в (1,7), а (1,7) в (1,4) и разделить на a, то получим уравнение, которому удовлетворяют собственные значения уравнения (1,1), являющиеся регулярными точками для $\widetilde{K}(\lambda)$, и только они, в виде

$$F(\lambda) + \Phi(\lambda) = 0, \tag{1,11}$$

где

$$\Phi(\lambda) = \frac{1}{a}(T(\lambda)\,\omega, v), \tag{1,12}$$

и ω определяется из (1,7) и (1,10). Впредь под собственными значениями условимся понимать только корни уравнения (1,11).

Чтобы оценить близость приближенных и точных собственных значений, надо фактически сравнить нули аналитических функций $F(\lambda)$ и $F(\lambda) + \Phi(\lambda)$.

Приведенные рассуждения обобщают аналогичные рассуждения Г. И. Петрова [4]. Способ сравнения нулей $F(\lambda)$ и $F(\lambda) + \Phi(\lambda)$, предложенный им, сводится к тому, что в очевидном из (1,11) равенстве $|F(\lambda)| = |\Phi(\lambda)|$ правая часть мажорируется некоторой функцией от $|\lambda|$, после чего $|\lambda|$ заменяется на $|\lambda_1| + |\lambda - \lambda_1|$, и полученное неравенство разрешается относительно $|\lambda - \lambda_1|$. Чтобы решение давало верхнюю грань для $|\lambda - \lambda_1|$, приходится налагать тяжелые дополнительные условия (подробности см. [4]).

Мы используем для сравнения нулей теорему Руше [5]. Это позволит смягчить условия, необходимые для проведения оценки.

2. Будем для простоты рассматривать линейную зависимость $K(\lambda)$ от λ

$$K(\lambda) = M + \lambda N, \tag{2,1}$$

где M и N — вполне непрерывные линейные операторы в H, D совпадает со всей λ-плоскостью. В общем случае рассуждения проводятся по аналогии. Первое приближение по методу Галеркина — Петрова в случае (2,1) дает единственное приближенное собственное значение

$$\lambda_1 = \frac{(u - Mu, v)}{(Nu, v)}, \tag{2,2}$$

причем

$$F(\lambda) = (\lambda - \lambda_1)(Nu, v). \tag{2,3}$$

В соответствии с теоремой Руше, если в λ-плоскости существует замкнутый контур C, охватывающий точку λ_1, на котором

$$|F(\lambda)| > |\Phi(\lambda)|, \tag{2,4}$$

то внутри C находится единственное собственное значение.

Для применения теоремы Руше надо оценить правую часть в (2,4). Очевидное из (1,12) и (1,7) неравенство

$$|\Phi(\lambda)| \leqslant \|T(\lambda) A\| \cdot \|\Omega\| \tag{2,5}$$

(здесь и в дальнейшем операторы, стоящие под знаком нормы, рассматриваются только в H_v) сводит дело к оценке $\|\Omega\|$.

Легко видеть, что

$$\widetilde{K}(\lambda) = \widetilde{K}(\lambda_1) + (\lambda - \lambda_1)\widetilde{N}. \tag{2,6}$$

где $\tilde{N}$ получается из N так же, как $\tilde{K}(\lambda)$ из $K(\lambda)$. Представим $\tilde{K}(\lambda_1)$ в виде

$$\tilde{K}(\lambda_1) = K_1 + K_2, \tag{2,7}$$

так что $(E - K_1)^{-1}$ существует и известен нам. В качестве K_1 можно взять, например, вырожденный оператор достаточно высокого порядка. При этом $\| K_2 \|$ можно сделать сколь угодно малым.

Применяя к уравнению (1,8) оператор $(E - K_1)^{-1}$, учитывая (2,6) и (2,7) и вводя обозначения

$$R = (E - K_1)^{-1}K_2, \quad S = (E - K_1)^{-1}\tilde{N}, \tag{2,8}$$

получим

$$[E - R - (\lambda - \lambda_1) S]\, \Omega = -a (E - K_1)^{-1} PT(\lambda) u. \tag{2,9}$$

При условии

$$\| R + (\lambda - \lambda_1) S \| < 1 \tag{2,10}$$

уравнение (2,9) разрешимо и имеет место оценка

$$\| \Omega \| \leqslant \frac{|a| \cdot \| (E - K_1)^{-1} \| \cdot \| PT(\lambda) u \|}{1 - \| R + (\lambda - \lambda_1) S \|}. \tag{2,11}$$

Подставим теперь (2,11) в (2,5), а (2,5) и (2,3) в (2,4). Полученное таким образом неравенство вместе с (2,10) определяет некоторую область в плоскости λ. Любой замкнутый контур C в этой области, охватывающий точку λ_1, будет удовлетворять условиям теоремы Руше и содержать единственное собственное значение оператора (2,1).

В частном случае $\| \tilde{K}(\lambda_1) \| < 1$ вместо (2,8) можно положить $K_1 = 0$, и тогда будет $R = \tilde{K}(\lambda_1)$, $S = \tilde{N}$, $\| (E - K_1)^{-1} \| = 1$.

3. Будем отыскивать контур C в виде окружности радиуса ρ с центром в точке λ_1. Усиливая условие (2,10), заменим его двумя неравенствами

$$\| R \| < 1, \quad \rho \leqslant \frac{1 - \| R \|}{\| S \|}. \tag{3,1}$$

Если $\lambda \in C$, то, очевидно,

$$\begin{aligned} \| T(\lambda) A \| &\leqslant \| T(\lambda_1) A \| + \rho \| NA \|, \\ \| PT(\lambda) u \| &\leqslant \| PT(\lambda_1) u \| + \rho \| PNu \|. \end{aligned} \tag{3,2}$$

Подставим теперь последовательно (3,2) в (2,11) и (2,5), (2,5) и (2,3) в (2,4). Получим для ρ неравенство

$$\alpha\rho^2 + \beta\rho + \gamma < 0, \tag{3,3}$$

где

$$\begin{aligned} \alpha &= \| (E - K_1)^{-1} \| \cdot \| NA \| \cdot \| PNu \| + | (Nu, v) | \cdot \| S \|, \\ \beta &= \| (E - K_1)^{-1} \| \cdot (\| NA \| \cdot \| PT(\lambda_1) u \| + \| T(\lambda_1) A \| \cdot \| PNu \|) - \\ &\quad - | (Nu, v) | \, (1 - \| R \|), \\ \gamma &= \| (E - K_1)^{-1} \| \cdot \| T(\lambda_1) A \| \cdot \| PT(\lambda_1) u \|. \end{aligned} \tag{3,4}$$

Если вектор u достаточно близок к точному собственному вектору y и направление вектора v близко к направлению вектора Nu, то $\| T(\lambda_1) u \|$ и $\| PNu \|$ малы, и из формул (3,4) следует, что $\beta^2 - 4\alpha\gamma > 0$, $\beta < 0$. Значит, решение неравенства (3,3) будет иметь вид

$$0 < \rho_1 < \rho < \rho_2, \tag{3,5}$$

где ρ_1, ρ_2 — корни квадратного трехчлена из (3,3). Если ρ_1 удовлетворяет второму условию (3,1), то в круге $| \lambda - \lambda_1 | < \rho_1$ лежит единственное собственное значение, и других собственных значений нет в т кой окрестности точки λ_1, которая определяется неравенством

$$|\lambda - \lambda_1| < \min\left(\rho_2, \ \frac{1 - \|R\|}{\|S\|}\right). \tag{3,6}$$

Из сказанного выше следует, что оптимальный вариант выбора v с точки зрения качества оценки (3,5) будет $v = Nu / \|Nu\|$. При этом $\|PNu\| = 0$, $|(Nu, v)| = \|Nu\|^2$ и оценка упрощается и улучшается. Кстати, легко показать, что, если u задано, то $\|T(\lambda) u\|$ достигает минимума при $\lambda = (u - Mu, Nu) / \|Nu\|^2$, т. е. указанный выбор v оптимален и с точки зрения минимума невязки $T(\lambda) u$.

Разумеется, можно искать контур C не в виде окружности. Связанные с этим возможности улучшения оценки зависят от конкретной реализации гильбертова пространства и оператора $K(\lambda)$.

Зная оценку для $\|\omega\|$, мы легко оценим точность нахождения приближенного собственного вектора по формуле

$$\frac{\|\varphi - au\|}{\|au\|} = \frac{\|\omega\|}{|a|},$$

так как $|a|$ входит сомножителем в выражение для $\|\omega\|$.

Автор выражает благодарность акад. Г. И. Петрову, а также В. А. Медведеву за весьма полезные обсуждения.

Научно-исследовательский институт механики
Московского государственного университета
им. М. В. Ломоносова

Поступило
21 XI 1962

ЦИТИРОВАННАЯ ЛИТЕРАТУРА

[1] В. И. Смирнов, Курс высшей математики, **5**, 1959. [2] Г. И. Петров, Прикл. матем. и мех., **4**, в. 3 (1940). [3] Н. И. Польский, Укр. матем. журн., 7 № 1 (1955). [4] Г. И. Петров, Прикл. матем. и мех., **21**, в. 2 (1957). [5] М. А. Лаврентьев, Б. В. Шабат, Методы теории функций комплексного переменного, 1958