В. К. Белошапка, Теорема единственности для автоморфизмов невырожденной поверхности в комплексном пространстве, *Матем. заметки*, 1990, том 47, выпуск 3, 17–22

Математические заметки

том 47 выпуск 3 март 1990

ТЕОРЕМА ЕДИНСТВЕННОСТИ ДЛЯ АВТОМОРФИЗМОВ НЕВЫРОЖДЕННОЙ ПОВЕРХНОСТИ В КОМПЛЕКСНОМ ПРОСТРАНСТВЕ

В. К. Белошапка

Рассмотрим набор из k $(k \geqslant 1)$ вещественно аналитических вещественнозначных функций $\varphi^1, \ldots, \varphi^k$, определенных в окрестности некоторой точки ξ комплексного линейного пространства. Пусть $\varphi^1(\xi) = \ldots = \varphi^k(\xi) = 0$ и k векторов $\operatorname{grad} \varphi^1(\xi), \ldots, \operatorname{grad} \varphi^k(\xi)$ линейно независимы как векторы комплексного линейного пространства. Тогда соотношения $\varphi^1 = \ldots = \varphi^k = 0$ задают в окрестности ξ вещественно аналитическую поверхность M коразмерности k и $\xi \in M$.

Рассмотрим, далее, голоморфные преобразования h, определенные и обратимые в окрестности точки ξ и такие, что $h(M) \subset M$ и $h(\xi) = \xi$. И пусть $G(M)$ — это группа всех таких преобразований, каждое из которых определено в своей окрестности точки ξ. Условие линейной независимости градиентов позволяет после подходящей комплексной афинной замены и применения теоремы о неявном отображении записать уравнение M в виде $v = F(z, \bar{z}, u)$, где (z, w) — координатные функции исходного комплексного линейного пространства $\mathbf{C}^{n+k}$

$$z = (z^1, \ldots, z^n), \quad w = (w^1, \ldots, w^k), \quad w = u + iv,$$

причем $F = \bar{F}$ и $F|_0 = 0$, $dF|_0 = 0$. Выделяя компоненту F степени 1 по z, 1 по $\bar{z}$, 0 по u, получим векторзначную эрмитову форму $\langle z, z\rangle = (\langle z, z\rangle^1, \ldots, \langle z, z\rangle^k)$. Эта форма называется формой Леви поверхности M в точке ξ. Отметим также, что $T_0M \cap iT_0M = \{w = 0\}$, поэтому n — это размерность комплексной части касательной к M в точке ξ.

Исследования вещественных подмногообразий комплексного пространства и их голоморфных отображений берут свое начало в работах А. Пуанкаре и Э. Картана. Основные достижения в этом направлении были получены в изучении структуры вещественных гиперповерхностей, т. е. для $k = 1$ (см. [1, 2]). При этом общая ситуация, $k \geqslant 1$, т. е. многообразия более высокой коразмерности, изучена гораздо хуже. Среди работ по поверхностям высокой коразмерности следует отметить уже упомянутую работу

[1], где кроме случая $k = 1$ дифференциально-геометрическими методами изучались также ситуации $k = n^2$ и $k = n^2 - 1$. В работе автора [3] для произвольного k формулируется некоторое условие на форму $\langle z, z \rangle$ (см. ниже), обобщающее на случай произвольного k обычное условие невырожденности одномерной эрмитовой формы и гарантирующее формальную конечномерность группы $G(M)$ (т. е. формальные ряды, задающие автоморфизм, однозначно определяются некоторым набором своих младших коэффициентов). В работе [4] проводится изучение случая $k = n = 2$ вплоть до построения нормальной формы уравнений поверхности.

Определение. Будем говорить, что k-мерная эрмитова форма $\langle z, z \rangle$ является невырожденной тогда и только тогда, когда выполнены следующие два условия:

$$\langle z, z \rangle^1, \ldots, \langle z, z \rangle^k \text{ линейно независимы;} \tag{1}$$

$$\text{из } \langle z, e \rangle = 0 \text{ для всех } z \text{ следует, что } e = 0. \tag{2}$$

Первое условие означает, что линейная оболочка образа $\mathbf{C}^n$ при отображении $z \to (\langle z, z \rangle^1, \ldots, \langle z, z \rangle^k)$ совпадает с $\mathbf{R}^k$. При этом размерность самого образа может быть меньше k и отображение может понижать размерность, как это видно из следующего примера.

Пример. Пусть $n = 2$, $k = 4$ и $\langle z, z \rangle = (|z^1|^2, |z^2|^2, 2\operatorname{Re} z^1\bar{z}^2, 2\operatorname{Im} z^1\bar{z}^2)$. Тогда формы линейно независимы, но между ними имеется зависимость

$$(\langle z, z \rangle^3)^2 + (\langle z, z \rangle^4)^2 = 4 \langle z, z \rangle^1 \langle z, z \rangle^2,$$

и размерность образа $\mathbf{C}^2$ равна трем.

Если среди линейных комбинаций координатных эрмитовых форм есть невырожденная, то условие (2), очевидно, выполнено. Обратное неверно.

Пример. Пусть $n = 3$, $k = 3$, $\langle z, z \rangle = (|z^1|^2, 2\operatorname{Re} z^1\bar{z}^2, 2\operatorname{Re} z^1\bar{z}^3)$. Если $\langle z, e \rangle = 0$, то

$$z^1\bar{e}^1 = 0, \quad z^1\bar{e}^2 + z^2\bar{e}^1 = 0, \quad z^1\bar{e}^3 + z^3\bar{e}^1 = 0,$$

откуда следует, что $e = 0$ и условие (2) выполнено. Составим теперь линейную комбинацию трех эрмитовых матриц, задающих формы

$$\alpha \begin{vmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{vmatrix} + \beta \begin{vmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{vmatrix} + \gamma \begin{vmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} \alpha & \beta & \gamma \\ \beta & 0 & 0 \\ \gamma & 0 & 0 \end{vmatrix}.$$

Определитель этой матрицы равен нулю при всех α, β, γ.

Напомним также (см. [3]), что нарушение любого из этих условий приводит к тому, что группа автоморфизмов квадрики $v = \langle z, z \rangle$ становится бесконечномерной.

Ниже будет доказана следующая

ТЕОРЕМА. *Пусть форма Леви поверхности M коразмерности $k \geqslant 1$ в точке ξ является невырожденной, и $h \in G(M)$, тогда h однозначно определяется значениями первых и вторых производных в точке ξ.*

Таким образом, ситуация с произвольным k аналогична той, что имеет место для $k = 1$ (см. [2]).

Доказательство. Сначала реализуем несколько первых шагов схемы Мозера (см. [2]). Запишем уравнение M в виде

$$v = F(z, \bar{z}, u) = \sum F_q(z, \bar{z}, u), \tag{3}$$

где $F_q(tz, t\bar{z}, t^2u) = t^q F_q(z, \bar{z}, u)$, тогда $F_0 = F_1 = 0$, $F_2 = Q(z, z) + \langle z, z\rangle + \overline{Q(z, z)}$, где Q — некоторая квадратичная форма. После замены $z^* = z$, $w^* = w + 2iQ(z, z)$ уравнение принимает вид $v = \langle z, z\rangle + F_3 + \ldots$ (F_q изменились, но обозначения старые). Автоморфизм M зададим формулами

$$z^* = \Sigma f_q, \quad w^* = \Sigma g_q, \tag{4}$$

где $f_q(tz, t^2w) = t^q f_q(z, w)$. Тогда $f_0 = 0$, $f_1 = Cz$, $g_0 = g_1 = 0$, $g_2 = \rho w$, причем

$$\langle Cz, Cz\rangle = \rho\langle z, z\rangle, \tag{5}$$

т. е. (4) принимает вид

$$z^* = Cz + \sum\nolimits_2^\infty f_q, \quad w^* = \rho w + \sum\nolimits_3^\infty g_q. \tag{6}$$

Условие $h(M) \subset M$ дает тождество

$$\operatorname{Im} g = \langle f, f\rangle + F(f, \bar{f}, \operatorname{Re} g)$$

при $w = u + i(\langle z, z\rangle + F(z, \bar{z}, u))$.

Выделяя в нем μ-ю компоненту, получаем

$$\operatorname{Re}(ig_\mu + 2\langle f_{\mu-1}, Cz\rangle)|_{v=\langle z, z\rangle} = F_\mu(z, \bar{z}, u) - F_\mu(Cz, \bar{C}\bar{z}, \rho u) + \text{ члены, зависящие от } F_\nu, g_\nu, f_{\nu-1} \text{ при } \nu < \mu.$$

Поэтому неоднозначность в рекуррентном вычислении компонент f и g зависит от неоднозначности в решении уравнения

$$\operatorname{Re}(ig + 2\langle f, Cz\rangle)|_{v=\langle z,z\rangle} = 0.$$

Заменим f на Cf, а g на ρg и, пользуясь соотношением (5), получим

$$\operatorname{Re}(ig + 2\langle f, z\rangle)|_{v=\langle z,z\rangle} = 0. \tag{7}$$

Разлагая (7) по компонентам различных степеней по z и $\bar{z}$, получим

$$\frac{i}{2} g_p = 0, \quad \langle f_{p+1}, z\rangle - \frac{1}{2}\Delta g_p = 0; \tag{8}$$

$$\begin{gathered} ig_1 + 2\langle z, f_0\rangle = 0, \\ -\Delta g_1 + \langle f_2, z\rangle - 2i\langle z, \Delta f_0\rangle = 0, \\ -\frac{i}{2}\Delta^2 g_1 + 2i\langle \Delta f_2, z\rangle - \langle z, \Delta^2 f_0\rangle = 0; \end{gathered} \tag{9}$$

$$
\begin{aligned}
&-\operatorname{Im} g_0 = 0,\\
&-\operatorname{Re}\Delta g_0 + 2\operatorname{Re}\langle f_1, z\rangle = 0,\\
&\frac{1}{2}\operatorname{Im}\Delta^2 g_0 - 2\operatorname{Im}\langle \Delta f_1, z\rangle = 0,\\
&\frac{1}{6}\operatorname{Re}\Delta^3 g_0 - \operatorname{Re}\langle \Delta^2 f_1, z\rangle = 0;
\end{aligned}
\tag{10}
$$

где $\Delta h = \partial_u h\,(\langle z, z\rangle)$. Из (8) получаем $g_p = 0$ при $p \geqslant 2$, а также, воспользовавшись (2), что $f_p = 0$ при $p \geqslant 3$. (9) и (10) после исключения g_1 и $\operatorname{Im} g_0$ запишем так:

$$
\begin{aligned}
&\langle f_2, z\rangle = 2i\,\langle z, f_0\rangle,\\
&\langle z, \Delta^2 f_0\rangle = 0;
\end{aligned}
\tag{11}
$$

$$
\begin{aligned}
&\operatorname{Im}\langle \Delta f_1, z\rangle = 0,\\
&2\operatorname{Re}\langle f_1, z\rangle - \operatorname{Re}\Delta g_0 = 0,\\
&\operatorname{Re}\Delta^3 g_0 = 0.
\end{aligned}
\tag{12}
$$

При $k > 1$ решение этих уравнений является непростой задачей, поэтому далее прямое применение схемы Мозера невозможно.

Для оценки размерности пространства решений систем (11) и (12) воспользуемся сначала теоремой об экспоненциальном представлении (см. [5]). Для (11) положим

$$
\begin{aligned}
&f_2 = \tilde f_2 \exp((t, u)),\\
&f_0 = \tilde f_0 \exp((t, u)),
\end{aligned}
$$

где $\tilde f_2$ и $\tilde f_0$ не зависят от u, $(t, u) = t^1u^1 + \ldots + t^ku^k$, тогда $\langle \tilde f_2, z\rangle = 2i\,(t, \langle z, z\rangle)\langle z, \tilde f_0\rangle$, $(t, \langle z, z\rangle)^2\langle \tilde f_0, z\rangle = 0$, откуда с использованием (1) следует, что $t = 0$.

Аналогично для (12) получаем

$$
\begin{aligned}
&\operatorname{Im}(t, \langle z, z\rangle)\langle \tilde f_1, z\rangle = 0,\\
&2\operatorname{Re}\langle \tilde f_1, z\rangle = \operatorname{Re}(t, \langle z, z\rangle)\, g_0,\\
&\operatorname{Re}(t, \langle z, z\rangle)^3 g_0 = 0.
\end{aligned}
$$

Откуда также получаем, что $t = 0$. По теореме об экспоненциальном представлении отсюда следует, что решения (11) и (12) являются многочленами, степень которых ограничена единой константой.

Теперь дадим точные оценки на степени этих многочленов. Пусть

$$
\begin{aligned}
&f_0 = a_0 + a_1 + \ldots,\\
&f_2 = A_0 + A_1 + \ldots,
\end{aligned}
$$

где степень a_p и A_p по u равна p, тогда (11) можно записать так:

$$
\begin{aligned}
&\langle A_{p-1}, z\rangle = 2i\,\langle z, \Delta a_p\rangle,\\
&\langle z, \Delta^2 a_p\rangle = 0.
\end{aligned}
\tag{13}
$$

Пусть $a_p = \sum_j a_{j_1\ldots j_p} u^{j_1} \ldots u^{j_p}$,

$A_{p-1} = \sum_j A_{j_1\ldots j_{p-1}} u^{j_1} \ldots u^{j_{p-1}}$,

причем коэффициенты симметричны по индексам, т. е. $a_{\sigma(j)} = a_j$, $A_{\sigma(j)} = A_j$ для любой перестановки σ.

Для $q = 1, \ldots, k$ имеем

$$\frac{\partial}{\partial u^q}(a_p) = \sum a_{j_1\ldots j_p} \frac{\partial}{\partial u^q}(u^{j_1} \ldots u^{j_p}) =$$

$$= \sum a_{j_1\ldots j_p} \frac{\partial u^{j_1}}{\partial u^q} u^{j_2} \ldots u^{j_p} + \ldots + \sum a_{j_1\ldots j_p} u^{j_1} \ldots u^{j_{p-1}} \frac{\partial u^{j_p}}{\partial u^q} =$$

$$= \sum a_{j_1\ldots j_p} \delta_q^{j_1} u^{j_2} \ldots u^{j_p} + \ldots + \sum a_{j_1\ldots j_p} u^{j_1} \ldots u^{j_{p-1}} \delta_q^{j_p} =$$

$$= \sum a_{q j_2\ldots j_p} u^{j_2} \ldots u^{j_p} + \ldots + \sum a_{j_1\ldots j_{p-1} q} u^{j_1} \ldots u^{j_{p-1}} =$$

$$= \sum a_{j_1\ldots j_{p-1} q} u^{j_1} \ldots u^{j_{p-1}} + \ldots + \sum a_{j_1\ldots j_{p-1} q} u^{j_1} \ldots u^{j_{p-1}} =$$

$$= p \sum a_{j_1\ldots j_{p-1} q} u^{j_1} \ldots u^{j_{p-1}},$$

где δ_p^q — символ Кронекера. Таким образом,

$$\Delta a_p = p \sum_q \langle z, z \rangle^q \sum_j a_{j_1\ldots j_{p-1} q} u^{j_1} \ldots u^{j_{p-1}}$$

и (13) принимает вид

$$\langle A_{j_1\ldots j_{p-1}}, z \rangle = 2ip \sum_q \langle z, z \rangle^q \langle z, a_{j_1\ldots j_{p-1} q} \rangle, \tag{14}$$
$$p(p-1) \sum_q \langle z, z \rangle^{q_1} \langle z, z \rangle^{q_2} \langle z, a_{j_1\ldots j_{p-2} q_1 q_2} \rangle = 0.$$

Пусть (14) имеет ненулевое решение для некоторого $p > 1$, тогда, полагая при $s > 0$

$$A_{l_1\ldots l_s j_1\ldots j_{p-1}} = A_{j_1\ldots j_{p-1}}, \quad a_{l_1\ldots l_s j_1\ldots j_p} = a_{j_1\ldots j_p},$$

получаем ненулевое решение (14), а тем самым и (11) сколь угодно высокой степени. Противоречие. Таким образом, $\deg_u f_0 \leqslant 1$, $\deg_u f_2 = 0$.

Аналогичное рассуждение, примененное к (12), показывает, что $\deg_u f_1 \leqslant 1$, $\deg_u g_0 \leqslant 2$. Теорема доказана.

Математический институт
им. В. А. Стеклова АН СССР

Поступило
03.08.89

СПИСОК ЦИТИРОВАННОЙ ЛИТЕРАТУРЫ

[1] Tanaka N. On the pseudo-conformal geometry of hypersurfaces of the space of n complex variables // J. Math. Soc. Japan 1962. V. 14. P. 397—429; Graded Lie algebras and geometric structures // Proc. US — Japan Seminar in Differential Geometry. 1965. P. 147—150.

[2] Chern S. S., Moser J. K. Real hypersurfaces in complex manifolds.// Asta Math. 1974. V. 133, N 3—4. P. 219—271.
[3] Белошапка В. К. Конечномерность группы автоморфизмов вещественно аналитической поверхности // Изв. АН СССР. Сер. мат. 1988. Т. 52, № 2. С. 437—442.
[4] Лобода А. В. Порождающие вещественно аналитические многообразия коразмерности 2 в $\mathbf{C}^2$ и их биголоморфные отображения // Изв. АН СССР. Сер. мат. 1988. Т. 52, № 5. С. 970—990.
[5] Паламодов В. П. Линейные дифференциальные операторы с постоянными коэффициентами. М.: Наука, 1967.