Math-Net.Ru
Общероссийский математический портал

М. И. Рахимбердиев, О центральных показателях линейных систем,
Дифференц. уравнения, 1983, том 19, номер 2, 253–259

https://www.mathnet.ru/de4768

Использование Общероссийского математического портала Math-Net.Ru подразумевает, что вы прочитали и согласны с пользовательским соглашением
https://www.mathnet.ru/rus/agreement

Параметры загрузки:
IP: 18.97.14.83
27 апреля 2025 г., 19:34:34

$|w_{il}(x, \rho, s)\exp(-\operatorname{Re}\varphi_l x)| \leqslant \frac{C_1(C\cdot 8^2)^\nu}{\rho^{3\nu-2}s^{6\nu-1}}$. Из последнего неравенства при $\nu\to\infty$ получим $w_{il}(x, \rho, s)\equiv 0$, что и требовалось доказать.

Таким образом, нами доказана

Теорема. *Если коэффициенты P_k, Q_k $(k=\overline{1, 3})$, $-a_1$, $-a_2$, a_3, $-b_1$, $-b_2$, b_3, d системы (1.1) — положительные числа и $b_1\neq b_2$, то существует фундаментальная матрица решений $y_{il}(x, \rho, s)$ $(i, l=\overline{1, 8})$ системы (4.2) или (1.7) (или (1.11)), допускающих в каждой из областей Ω_m плоскости комплексного параметра ρ (в которой при подходящей нумерации величин (4.30) выполняются неравенства (5.5)) асимптотические представления*

$$y_{il}(x, \rho, s) = u_{il}(x, \rho, s) + \exp(\varphi_l x)\frac{\mathscr{E}(x, \rho, s)}{\rho s^5}, \tag{5.15}$$

где $\mathscr{E}(x, \rho, s)$ непрерывно дифференцируема по $x\in[0, s]$ и ограничена при больших ρ равномерно по целочисленным $s\geqslant 1$. Функции $u_{il}(x, \rho, s)$ на всей плоскости комплексного параметра допускают асимптотические представления (3.19), (3.21), (3.23), (3.25), (3.39), (3.41), (3.47), (3.49).

Асимптотические представления $y_{il}(x, \rho, s) = y_{il}(x, \lambda s, s)$ как функции от λ, s при больших λ легко получаются из (5.4) путем оценки слагаемых на плоскости комплексного параметра λ. В этом случае границы областей Ω_m, в которых при подходящей нумерации величин φ_k выполняются неравенства (5.5), зависят от s, и эти границы с ростом s стягиваются к мнимой оси плоскости комплексного параметра λ. Асимптотические представления $y_{il}(x, \lambda, s)$ в этих областях получаются из (5.15) непосредственно заменой ρ на λs.

Литература

1. Огибалов П. М. Вопросы динамики и устойчивости оболочек.— М.: Изд-во МГУ, 1963.
2. Расулов М. Л. Метод контурного интеграла.— М.: Наука, 1964.
3. Тамаркин Я. Д. О некоторых общих задачах теории обыкновенных дифференциальных уравнений и разложение произвольных функций в ряды.— Петроград, 1917.
4. Tamarkin J. D. — Math. Z., 1928, 27.
5. Birkhoff G. D.— Trans. Ann. Math. Soc., 1908, 9.

Азербайджанский государственный университет им. С. М. Кирова

Поступила в редакцию 30 декабря 1981 г.

УДК 517.924.4

М. И. РАХИМБЕРДИЕВ

О ЦЕНТРАЛЬНЫХ ПОКАЗАТЕЛЯХ ЛИНЕЙНЫХ СИСТЕМ

В статье предлагаются формулы для центральных показателей систем $x'=A(t)x$, не использующие их решений, и проводятся исследования, связанные с их неустойчивостью.

1. Пусть M^n — метрическое пространство систем $x'=A(t)x$ с кусочно-непрерывными и ограниченными при $t\in R^+$ оператор-функциями $A(t): R^n\to R^n$, $\rho(A_1, A_2)=\sup\limits_{t\geqslant 0}\|A_1(t)-A_2(t)\|$ — метрика в M^n.

Если $\lambda_1(A)\geqslant\ldots\geqslant\lambda_n(A)$ — показатели Ляпунова системы $x'=A(t)x$, то число $\Omega(A)=\lim\limits_{\varepsilon\to+0}\sup\limits_{\rho(A, B)\leqslant\varepsilon}\lambda_1(B)$ называется ее верхним центральным показателем, а число $\omega(A)=\lim\limits_{\varepsilon\to+0}\inf\limits_{\rho(A, B)\leqslant\varepsilon}\lambda_n(B)$ — нижним центральным показателем (см. [1]). Из этих формул вытекает полунепрерывность показателей Ω, ω как функций системы (соответственно сверху и снизу). А так как они разрывны (см. [2]), то принадлежат в точности первому классу по бэровской классификации функций (см. [3], с. 236). Этот факт делает возможным представление функций $\Omega(\cdot)$, $\omega(\cdot)$ в виде предела непрерывных функций (что и осуществляется, например, в [1]). Задача же состоит в том, чтобы определить эти непрерывные функции каким-либо приемлемым способом непосредственно по матрице системы. При изучении свойств функций $\Omega(\cdot)$, $\omega(\cdot)$, связанных с их разрывностью, важно также установить множество значений, принимаемых ими вблизи точек разрыва.

Введем обозначения: $\mathscr{L}$ — множество ляпуновских преобразований R^n (см. [1]), с. 243); $A_L(t)=L^{-1}(t)A(t)L(t)-L^{-1}(t)\dot{L}(t)$, $L\in\mathscr{L}$; $C(M^n)$ — множество непрерывных функций $\varphi(\cdot):M^n\to R$; $\bar{G}(\cdot)$ $(\underline{G}(\cdot))$ — верхняя (нижняя) огибающая семейства функций G (см. [4], с. 177); $\sigma_f(A)$ — множество предельных точек всевозможных последовательностей значений $f(B_i)$ функции $f(\cdot)$, заданных условием $\lim\limits_{i\to+\infty}\rho(A, B_i)=0$.

II. Пусть $S=\{\alpha_L(\cdot)\,|\,L\in\mathscr{L}\}$, где функции $\alpha_L(\cdot):M^n\to R$ определяются равенством

$$\alpha_L(A)=\overline{\lim_{t\to+\infty}}\frac{1}{t}\int\limits_0^t\max_{(\xi,\,\xi)=1,\,\xi\in R^n}(\xi,\ A_L(u)\xi)\,du, \tag{1}$$

$s=\{\varphi(\cdot)\,|\,\varphi(\cdot)\in C(M^n),\ \varphi(A)\leqslant\alpha_L(A)\ \ \forall L\in\mathscr{L},\ \forall A\in M^n\}$.

Заметим, что подынтегральная величина в формуле (1) совпадает с наибольшим собственным значением оператора $\frac{1}{2}(A(t)+A^*(t))$, поэтому $S\subset C(M^n)$, кроме того, из легко проверяемых неравенств

$$-\sup_{t\geqslant0}\|A(t)\|\leqslant\bar{s}(A)\leqslant\underline{S}(A)\leqslant\sup_{t\geqslant0}\|A(t)\| \tag{2}$$

следует, что функции $\underline{S}(\cdot)$, $\bar{s}(\cdot)$ определены всюду на M^n. Они полунепрерывны (соответственно сверху и снизу) как огибающие семейств непрерывных функций (см. [3], с. 193). В силу неравенства (2) при всяком $A\in M^n$ множество $\sigma_{\underline{s}}(A)$ ограничено; а из его определения следует, что оно замкнуто.

Теорема 1. *Всюду на M^n $\underline{S}(A)=\Omega(A)$.*

Доказательство. Выберем какой-либо ортонормированный базис в R^n. Перроновским преобразованием $x=U(t)y$ (см. [1], с. 263) систему $x'=A(t)x$ приведем к треугольному виду

$$y'=B(t)\,y,\qquad B(t)=\begin{pmatrix} b_{11}(t) & \dots & b_{1n}(t)\\ & \ddots & \vdots\\ 0 & & b_{nn}(t)\end{pmatrix}. \tag{3}$$

Согласно формуле (8.6) и теореме 8.3.1 из [1], имеем

$$\Omega(A)=\lim_{H\to+\infty}\left[\ \overline{\lim_{t\to+\infty}}\frac{1}{tH}\int\limits_0^t\max_i\int\limits_\tau^{\tau+H}b_i(u)\,du\,d\tau\right]. \tag{4}$$

Фиксируем $\varepsilon>0$. Выбираем $H>0$ таким, чтобы выполнялось неравенство

$$|\Omega^H(A)-\Omega(A)|<\frac{\varepsilon}{2}; \tag{5}$$

здесь через $\Omega^H(A)$ обозначена величина, заключенная в формуле (4) в квадратные скобки. Далее, действуя на систему (3) ляпуновским

H-преобразованием $y = L_H(t)z$ (см. [1], с. 248): $L_H(t) = = \operatorname{diag}\left\{\int\limits_0^t (b_i(\tau) - b_i^H(\tau))\,d\tau\right\}$, $b_i^H(\tau) = \frac{1}{H}\int\limits_\tau^{\tau+H} b_i(u)\,du$, $i = 1, \ldots, n$, получаем треугольную систему $z' = B^H(t)z$ с диагональными элементами $b_1^H(t), \ldots, b_n^H(t)$. Обозначаем: $\bar{B}^H(t) = \operatorname{diag}\{b_i^H(t)\}$.

Пользуясь равенством $\max\limits_{(\xi,\,\xi)=1,\ \xi\in R^n} (\xi, \bar{B}^H(t)\xi) = \max b_i^H(t)$, устанавливаем, что

$$\alpha(\bar{B}^H) = \alpha_E(\bar{B}^H) = \overline{\lim_{t\to+\infty}}\, \frac{1}{t}\int\limits_0^t \max b_i^H(\tau)\,d\tau.$$

Отсюда и из (4) получаем: $\alpha(\bar{B}^H) = \Omega^H(A)$. Применяя к системе $z' = = B^H(t)z$ β-преобразование Ляпунова $z = L_\beta u$ (см. [1], с. 248), приходим к системе $u' = L_\beta^{-1}B^H(t)L_\beta u$, причем $\beta > 0$ выбираем так, чтобы выполнялось неравенство

$$|\alpha(\bar{B}^H) - \alpha(L_\beta^{-1}B^H L_\beta)| < \frac{\varepsilon}{2}, \tag{6}$$

обеспечиваемое непрерывностью функции $\alpha(\cdot)$. Согласно (5), (6) и равенствам $\alpha(L_\beta^{-1}B^H L_\beta) = \alpha_{L_\beta}(B^H) = \alpha_{L_H L_\beta}(B) = \alpha_{UL_H L_\beta}(A)$, имеем

$$|\Omega(A) - \alpha_{UL_H L_\beta}(A)| < \varepsilon. \tag{7}$$

С другой стороны, используя оценку Важевского (см. [1], с. 128), получаем неравенство $\Omega(A) \leqslant \alpha_L(A)$, справедливое для всех $L \in \mathscr{L}$, которое вместе с неравенством (7) позволяет утверждать, что $\Omega(A) = = \inf\limits_{L\in\mathscr{L}} \alpha_L(A) = \underline{S}(A)$. Теорема доказана.

Замечание. Из теоремы 1 следует, что для всякой системы $A \in M^n$ существует последовательность ляпуновских преобразований $\{L_i\}$, с помощью которой можно вычислить центральный показатель $\Omega(A)$ по формуле

$$\Omega(A) = \lim_{i\to+\infty}\left[\overline{\lim_{t\to+\infty}}\, \frac{1}{t}\int\limits_0^t \max_{(\xi,\,\xi)=1,\ \xi\in R^n} (\xi, A_{L_i}(u)\xi)\,du\right],$$

более того, все L_i могут быть взяты вида $L_i = UL_{H_i}L_{\beta_i}$, где U — перроновское преобразование, L_{H_i} — H-преобразование, L_{β_i} — β-преобразование; если же $A(t)$ — треугольная матрица, то $L_i = L_{H_i}L_{\beta_i}$.

III. Используем выводы п. II для дальнейшего изучения свойств показателя Ω.

Теорема 2. *Для любых двух систем A и B из M^n существует функция $g(\cdot) : [0, 1] \to M^n$ со следующими свойствами:*

а) $g(0) = A$, $g(1) = B$;

б) функция $\Omega(g(\cdot)) : [0, 1] \to R$ непрерывна;

в) $\rho(A, g(\tau)) \leqslant \rho(A, B)$ $\forall \tau \in [0, 1]$.

Доказательство 1. Фиксируем в R^n ортонормированный базис. Пусть $A, B \in M^n$. Обозначим: $t_k = \frac{1}{2}k(k-1)$. Для любого $\tau \in [0, 1]$ определяем следующим образом матричную функцию $A^\tau(t)$. Полагаем $A^0(t) = A(t)$, $A^1(t) = B(t)$,

$$A^\tau(t) = \begin{cases} A(t) & \text{при } t \in [t_k, t_k + (1-\tau)k), \\ B(t) & \text{при } t \in [t_k + (1-\tau)k, t_{k+1}), \quad k = 1, 2, \ldots; \end{cases}$$

если $\tau \in (0, 1)$.

Из способа построения ортогональных матриц, задающих перроновские преобразования (см. [1], с. 261), следует возможность их выбора только с положительным определителем. Пусть матричные функции $U(t)$, $V(t)$ задают перроновские преобразования соответственно систем $x'=A(t)x$, $x'=B(t)x$, причем $\det U(t)>0$, $\det V(t)>0$. Определяем матричную функцию $C^\tau(t)$: $C^0(t)=A_U(t)$, $C^1(t)=B_V(t)$,

$$C^\tau(t)=\begin{cases} A_U(t) & \text{при } t\in[t_k,\ t_k+(1-\tau)k), \\ B_V(t) & \text{при } t\in[t_k+(1-\tau)k,\ t_{k+1}),\quad k=1,2,\ldots; \end{cases}$$

если $\tau\in(0,1)$.

Так как $C^\tau(t)$ — треугольная матрица, то из замечания к теореме 1 следует, что для каждого $\tau\in[0,1]$ существует последовательность $L_i=L_{H_i}L_{\beta_i}\in\mathscr{L}$, $i=1,2,\ldots$, для которой

$$\lim_{i\to+\infty}\alpha(C^\tau_{L_i})=\Omega(C^\tau). \tag{8}$$

Будем считать, что все β_i выбраны и в зависимости от выполнения неравенства

$$\sup_{t\geqslant 0}\|C^\tau_{L_i}(t)-\bar{C}^\tau_{L_i}(t)\|<1. \tag{9}$$

2. Обозначим: $f_i(\tau)=\alpha(C^\tau_{L_i})$, $d\alpha=\max\{\sup\limits_{t\geqslant 0}\|A(t)\|,\ \sup\limits_{t\geqslant 0}\|B(t)\|\}$,

$$\gamma_i(\tau,t)=\max_{(\xi,\xi)=1,\ \xi\in R^n}(\xi,\ C^\tau_{L_i}(t)\xi).$$

Так как

$$\|\bar{C}^\tau_{L_i}(t)\|=\left\|\operatorname{diag}\left\{\frac{1}{H_i}\int\limits_t^{t+H_i}c^\tau_j(u)\,du\right\}\right\|\leqslant\sup_{t\geqslant 0}\|\bar{C}^\tau(t)\|\leqslant$$

$$\leqslant\max\{\sup_{t\geqslant 0}\|\bar{A}_U(t)\|,\ \sup_{t\geqslant 0}\|\bar{B}_V(t)\|\}\leqslant d,$$

то с использованием неравенства (9) получаем

$$|\gamma_i(\tau,t)|\leqslant\|C^\tau_{L_i}(t)\|\leqslant\|\bar{C}^\tau_{L_i}(t)\|+1\leqslant d+1. \tag{10}$$

Поэтому

$$|f_i(\tau)|\leqslant\overline{\lim_{t\to+\infty}}\frac{1}{t}\int\limits_0^t|\gamma_i(\tau,u)|\,du<d+1,\quad\forall\tau\in[0,1],\quad i=1,2,\ldots \tag{11}$$

Фиксируем $\varepsilon>0$ и полагаем $\delta=\varepsilon/(d+1)$. Пусть $\tau_1,\tau_2\in[0,1]$, $\tau_1>\tau_2$, $\Delta_k=[t_k+(1-\tau_1)k,\ t_k+(1-\tau_2)k]$, $\Delta=\bigcup\limits_{i=1}^{\infty}\Delta_i$, $\chi_\Delta(t)$ — характеристическая функция множества Δ.

Имеем

$$\gamma_i(\tau_1,t)=\gamma_i(\tau_2,t)+\chi_\Delta(t)[\gamma_i(\tau_1,t)-\gamma_i(\tau_2,t)], \tag{12}$$

$$\int\limits_0^{t_N}\chi_\Delta(u)[\gamma_i(\tau_1,u)-\gamma_i(\tau_2,u)]\,du=\sum_{k=1}^{N-1}\int\limits_{\Delta_k}[\gamma_i(\tau_1,u)-\gamma_i(\tau_2,u)]\,du.$$

Отсюда

$$\left|\frac{1}{t_N}\int\limits_0^{t_N}\chi_\Delta(u)[\gamma_i(\tau_1,u)-\gamma_i(\tau_2,u)]\,du\right|\leqslant$$

$$\leqslant\frac{1}{t_N}(\tau_1-\tau_2)(d+1)\sum_{k=1}^{N-1}k=(\tau_1-\tau_2)(d+1).$$

Следовательно, если $|\tau_1-\tau_2|<\delta$, τ_1, $\tau_2\in[0, 1]$, то из (12) вытекает

$$\left| \overline{\lim_{N\to+\infty}} \frac{1}{t_N} \int_0^{t_N} \gamma_i(\tau_1, u)\,du - \overline{\lim_{N\to+\infty}} \frac{1}{t_N} \int_0^{t_N} \gamma_i(\tau_2, u)\,du \right| < \varepsilon. \qquad (13)$$

Учитывая (10) и тот факт, что $t_N/t_{N-1}\to1$, $N/t_N\to0$ при $N\to+\infty$, получаем равенство

$$f_i(\tau) = \overline{\lim_{t\to+\infty}} \frac{1}{t} \int_0^t \gamma_i(\tau, u)\,du = \overline{\lim_{N\to+\infty}} \frac{1}{t_N} \int_0^{t_N} \gamma_i(\tau, u)\,du,$$

позволяющее записать неравенство (13) в виде $|f_i(\tau_1)-f_i(\tau_2)|<\varepsilon$. Значит, последовательность функций $f_i(\tau)$ равномерно ограничена, равностепенно непрерывна и имеет, согласно (8), предел $\Omega(C^\tau)$. На основании теоремы Арцеля функция $\Omega(C^\tau)$ на $[0, 1]$ непрерывна.

3. Установим теперь равенство $\Omega(A^\tau)=\Omega(C^\tau)$. Ясно, что достаточно рассмотреть случай $\tau\in(0, 1)$. Пусть k^τ — наименьшее целое k, удовлетворяющее неравенству $k>\max(1/\tau, 1/(1-\tau))$.

Определим ортогональную непрерывно-дифференцируемую матричную функцию $U^\tau(t)$, полагая

$$U^\tau(t) = \begin{cases} U(t) & \text{при } t\in[0, t_k\tau)\cup[t_k, t_k+(1-\tau)k-1), \\ V(t) & \text{при } t\in[t_k+(1-\tau)k, t_{k+1}-1, k=k^\tau, k^\tau+1, \end{cases}$$

а при $t\in[t_k+(1-\tau)k-1, t_k+(1-\tau)k)\cup[t_{k+1}-1, t_{k+1})$, где $k>k^\tau$, потребуем, чтобы выполнялось неравенство $\|\dot{U}^\tau(t)\|<\pi$. Подробнее аналогичное построение выполнено в работе [6]*).

Сравним теперь две системы $x'=A^\tau_{U^\tau}(t)x$ и $x'=C^\tau(t)x$. Их матрицы отличаются на множестве нулевой равномерной относительной меры. Поэтому, используя неравенство Гронуолла — Беллмана, нетрудно показать, что $\Omega(A^\tau_{U^\tau})=\Omega(C^\tau)$. А так как $\Omega(A^\tau_{U^\tau})=\Omega(A^\tau)$, то функция $g(\tau)=A^\tau$ удовлетворяет утверждению теоремы. Теорема доказана.

Теорема 3. *Всюду на* M^n $\sigma_\Omega(A)=[\bar{s}(A), \Omega(A)]$.

Доказательство 1. Покажем сначала, что $\max\sigma_\Omega(A)=\Omega(A)$, $\min\sigma_\Omega(A)=\bar{s}(A)$. Первое из этих равенств вытекает непосредственно из полунепрерывности сверху функции $\Omega(\cdot)$.

Пусть $\varphi(\cdot)\in s$. В силу теоремы 1 и определения множества s имеем $\varphi(A)\leqslant\inf\limits_{L\in\mathscr{L}}\alpha_L(A)=\Omega(A)$ $\forall A\in M^n$. Отсюда, учитывая непрерывность функции $\varphi(\cdot)$ и замкнутость $\sigma_\Omega(A)$, получаем

$$\varphi(A) = \lim_{\varepsilon\to+0} \inf_{\rho(A, B)\leqslant\varepsilon} \varphi(B) \leqslant \lim_{\varepsilon\to+0} \inf_{\rho(A, B)\leqslant\varepsilon} \Omega(B) = \min\sigma_\Omega(A). \qquad (14)$$

Согласно предложению 4 на с. 193 из [4], функция $\min\sigma_\Omega(\cdot)$ полунепрерывна снизу, поэтому существует возрастающая последовательность функций $\{\varphi_i(\cdot)\}$ из $C(M^n)$, для которых $\min\sigma_\Omega(\cdot)$ есть верхняя огибающая (см. [5], с. 41). Следовательно,

$$\varphi_i(A)\leqslant\min\sigma_\Omega(A)\leqslant\Omega(A)\leqslant\alpha_L(A) \quad \forall L\in\mathscr{L}, \quad i=1, 2, \ldots$$

Сопоставляя полученное с неравенством (14), приходим к выводу: $\min\sigma_\Omega(A)=\bar{s}(A)$.

2. Пусть A — точка разрыва функции $\Omega(\cdot)$, иначе $\sigma_\Omega(A)=\Omega(A)$. Фиксируем $\varepsilon>0$. Из п. 1 следует существование точки B, в которой показатель Ω равен $\bar{s}(A)$, а $\rho(A, B)\leqslant\varepsilon$. В данной ситуации функция $\Omega(g(\cdot))$, определенная теоремой 2, при изменении ее аргумента от 0

*) В формуле (27) работы [6] следует различать две матрицы, обозначенные одной буквой V_m.

до 1 принимает все значения от $\Omega(A)$ до $\bar{s}(A)$. Поэтому и в силу произвольности $\varepsilon>0$ $\sigma_\Omega(A)\supset[\bar{s}(A), \Omega(A)]$.

В п. I доказано, что $\sigma_\Omega(A)\subset[\bar{s}(A), \Omega(A)]$. В результате получаем требуемое равенство. Теорема доказана.

IV. Все результаты, полученные для показателя Ω, имеют аналоги для показателя ω. Чтобы избежать повторений, в процессе доказательства теорем будем опускать те рассуждения, которые допускают перенесения из доказанных выше теорем для показателя Ω.

Пусть $p=\{\theta_L(\cdot)\,|\,L\in\mathscr{L}\}$, где $\theta_L(\cdot)\,:\,M^n\to R$ — функции, определяемые равенством

$$\theta_L(A)=\overline{\lim_{t\to+\infty}}\frac{1}{t}\int\limits_0^t\min_{(\xi,\,\xi)=1,\,\xi\in R^n}(\xi,\ A_L(u)\xi)\,du; \tag{15}$$

$$P=\{\varphi(\cdot)\,|\,\varphi(\cdot)\in C(M^n),\ \ \varphi(A)\geqslant\theta_L(A)\ \ \forall L\in\mathscr{L},\ \forall A\in M^n\}.$$

Функции $\theta_L(\cdot)$ непрерывны, так как подынтегральная величина в формуле (15) совпадает с наименьшим собственным значением оператора $\frac{1}{2}\,(A(t)+A^*(t))$.

Теорема 4. *Всюду на* M^n $\bar{p}(A)=\omega(A)$.

Доказательство. Покажем, какие изменения нужно внести в доказательство теоремы 1, чтобы установить требуемое равенство.

Вместо (4) рассмотрим формулу

$$\omega(A)=\lim_{H\to+\infty}\left[\overline{\lim_{t\to+\infty}}\frac{1}{tH}\int\limits_0^t\min_i\int\limits_\tau^{\tau+H}b_i(u)\,du\,d\tau\right]. \tag{16}$$

Пусть $\omega^H(A)$ — выражение в квадратных скобках. Фиксируя $\varepsilon>0$, выбираем $H>0$ таким, чтобы выполнялось

$$|\omega^H(A)-\omega(A)|<\frac{\varepsilon}{2}. \tag{17}$$

Из соотношения

$$\theta(\bar{B}^H)=\overline{\lim_{t\to+\infty}}\frac{1}{t}\int\limits_0^t\min_i b_i^H(\tau)\,d\tau$$

и формулы (16) получаем $\theta(\bar{B}^H)=\omega^H(A)$. С помощью неравенств (17) и таких, которые соответствуют (6) и (7), используя оценку Важевского, приходим к соотношению $\omega(A)=\sup\limits_{L\in\mathscr{L}}\theta_L(A)=\bar{p}(A)$. Теорема доказана.

V. Теорема 5. *Для любых двух систем* A *и* B *из* M^n *существует функция* $g(\cdot)\,:\,[0,1]\to M^n$ *со следующими свойствами*:

а) $g(0)=A$, $g(1)=B$;

б) функция $\omega(g(\cdot))\,:\,[0,1]\to R$ *— непрерывна;*

в) $\rho(A, g(\tau))\leqslant\rho(A, B)$ $\forall\tau\in[0,1]$.

Следуем схеме доказательства теоремы 2. Для этого выбираем последовательность $L_i=L_{H_i}L_{\beta_i}\in\mathscr{L}$, удовлетворяющую вместо (8), (9) следующим условиям:

$$\lim_{i\to+\infty}\theta(C^\tau_{L_i})=\omega(C^\tau),\quad \sup_{t\geqslant 0}\|C^\tau_{L_i}(t)-\bar{C}^\tau_{L_i}(t)\|<1.$$

Обозначаем: $f_i(\tau)=\theta(C^\tau_{L_i})$, $\gamma_i(\tau, t)=\min\limits_{(\xi,\,\xi)=1,\,\xi\in R^n}(\xi,\ C^\tau_{L_i}(t)\xi)$.

Далее, рассматривая показатель ω вместо Ω, применяем доказательство теоремы 2.

Теорема 6. *Всюду на* M^n $\sigma_\omega(A)=[\omega(A), \underline{P}(A)]$.

С точностью до обозначений и знака неравенств доказательство совпадает с предложенным в теореме 3.

Литература

1. Былов Б. Ф., Виноград Р. Э., Гробман Д. М., Немыцкий В. В. Теория показателей Ляпунова.— М.: Наука, 1966.
2. Миллионщиков В. М. Дифференц. уравнения, 1969, т. 5, № 4, с. 749—750.
3. Хаусдорф Ф. Теория множеств.— М.—Л.: ОНТИ, 1937.
4. Бурбаки Н. Общая топология. Топологические группы. Числа и связанные с ними группы и пространства.— М.: Наука, 1969.
5. Бурбаки Н. Общая топология. Использование вещественных чисел в общей топологии. Функциональные пространства. Сводка результатов.— М.: Наука, 1975.
6. Рахимбердиев М. И.— Дифференц. уравнения, 1977, т. 13, № 4, с. 616—625.

Институт математики и механики АН КазССР

Поступила в редакцию 23 марта 1981 г.

УДК 517.934

Н. Х. РОЗОВ, Т. Р. ГИЧЕВ

СИНГУЛЯРНО ВОЗМУЩЕННЫЕ ЗАДАЧИ С МИНИМАЛЬНЫМ ИМПУЛЬСОМ

Дальнейшее развитие ставшей уже классической теории оптимальных процессов для управляемых объектов, описываемых обыкновенными дифференциальными уравнениями [1], потребовало изучения аналогичных проблем для разнообразных систем управления иных типов (с распределенными параметрами, дискретных и т. д.). В частности, значительный интерес как с теоретической, так и с прикладной точек зрения вызывают импульсные системы управления. Задачи с минимальным импульсом для систем этого класса исследовались в [2, 3]; вопрос о влиянии возмущения данных такой задачи на ее решение рассматривался в [4]. Отметим также, что в последнее время все большее внимание привлекают сингулярно возмущенные задачи оптимального управления.

Настоящая работа посвящена линейным импульсным объектам управления, закон движения которых содержит входящий сингулярно малый положительный параметр; подобные объекты довольно часто встречаются в приложениях. Выясняется поведение при стремлении параметра к нулю решения задачи оптимального (в смысле минимальности импульса) управления с фиксированным или подвижным правым концом.

Предварительные результаты данного исследования были представлены в [5].

1. Некоторые обозначения. Для удобства чтения дальнейшего текста приведем здесь собранные вместе расшифровки ряда используемых обозначений.

Точка над буквой означает дифференцирование по независимой переменной t; штрих справа вверху — транспонирование.

Запись $\{\varphi_k\}\rightrightarrows\varphi_0$ на $[a, b]$ означает, что последовательность функций $\{\varphi_k(t)\}_1^\infty$ равномерно сходится на отрезке $[a, b]$ к функции $\varphi_0(t)$.

$\mathfrak{B}_r$ — пространство непрерывных на $[t_0, T]$ r-мерных вектор-функций $q(t)$ с нормой $\rho[q]=\max\{\gamma[q(t)]\,|\,t_0\leqslant t\leqslant T\}$, где $\gamma[\cdot]=\|\cdot\|$ — фиксированная норма в $\mathbf{R}^r$.

$\mathfrak{B}_r^*$ — пространство r-вектор-функций $Q(t)$, $t_0\leqslant t\leqslant T$, $Q(t_0)=0$, непрерывных справа в каждой точке интервала (t_0, T) и имеющих огра-