



A. D. Baev, D. A. Chechin, S. A. Shabrov, N. I. Rabotinskaya, N. A. Babaitseva, A priori estimation of solutions of a boundary problem for a pseudodifferential equation with degeneration, *Izv. Vyssh. Uchebn. Zaved. Mat.*, 2021, Number 5, 6–10

DOI: 10.26907/0021-3446-2021-5-6-10

Use of the all-Russian mathematical portal Math-Net.Ru implies that you have read and agreed to these terms of use
<http://www.mathnet.ru/eng/agreement>

Download details:

IP: 18.97.14.90

March 21, 2025, 22:39:28



А.Д. БАЕВ, Д.А. ЧЕЧИН, С.А. ШАБРОВ, Н.И. РАБОТИНСКАЯ, Н.А. БАБАЙЦЕВА

АПРИОРНАЯ ОЦЕНКА РЕШЕНИЙ ОДНОЙ ГРАНИЧНОЙ ЗАДАЧИ ДЛЯ ПСЕВДОДИФФЕРЕНЦИАЛЬНОГО УРАВНЕНИЯ С ВЫРОЖДЕНИЕМ

Аннотация. В работе получена коэрцитивная априорная оценка решений граничной задачи в полупространстве для вырождающегося псевдодифференциального уравнения. Левая часть уравнения представляет собой сумму псевдодифференциального оператора с вырождением, построенного по специальному интегральному преобразованию, и оператора дифференцирования. Априорная оценка получена в специальных весовых пространствах типа пространств С.Л. Соболева, нормы в которых построены с помощью специального интегрального преобразования.

Ключевые слова: априорная оценка, вырождающееся уравнение, псевдодифференциальный оператор с вырождением, весовое пространство С.Л. Соболева.

УДК: 517.946

DOI: 10.26907/0021-3446-2021-5-6-10

Теория вырождающихся уравнений в настоящее время интенсивно развивается. Такие уравнения описывают математические модели, в которых граница области оказывает существенное влияние на процессы, происходящие вблизи границы. В этом случае на границе области может меняться как тип уравнения, так и его порядок. Краевые задачи для таких уравнений относятся к неклассическим задачам математической физики. Одна из главных трудностей, возникающих в теории вырождающихся эллиптических уравнений, связана с влиянием младших (в смысле теории регулярных эллиптических операторов) членов уравнения на постановку граничных задач и их коэрцитивную разрешимость.

Развитие теории коэрцитивной разрешимости краевых задач для вырождающихся уравнений потребовало соответствующего развития теории псевдодифференциальных операторов. Одним из направлений развития этой теории стало введение и исследование классов вырождающихся псевдодифференциальных операторов, построенных с помощью специального интегрального преобразования F_α , введенного в [1]. Изучение вырождающихся псевдодифференциальных операторов с постоянным символом позволило разработать методы исследования общих краевых задач для вырождающихся эллиптических уравнений (см. [1], [2]). При этом вырождение носит не только “степенной” характер, но и произвольный. Другой метод использования псевдодифференциальных операторов в теории вырождающихся уравнений был применен С.З. Левендорским [3]. В отличие от работы [3] мы не требуем, чтобы весовая функция $\alpha(t)$, определяющая вырождение, принадлежала пространству $C^\infty(\mathbb{R}^1)$.

Поступила в редакцию 27.04.2020, после доработки 27.04.2020. Принята к публикации 30.03.2021.

Благодарности. Работа выполнена при финансовой поддержке гранта Российского научного фонда (проект № 19–11–00197).

Изучение некоторых классов вырождающихся псевдодифференциальных операторов с переменным символом позволило исследовать коэрцитивную разрешимость и получить априорные оценки решений новых классов краевых задач для вырождающихся уравнений (см. [4]–[6]).

В настоящей работе исследуется граничная задача в полупространстве вырождающихся псевдодифференциальных операторов с переменным символом. При доказательстве основной теоремы используются свойства вырождающихся псевдодифференциальных операторов, полученные в [7].

Рассмотрим функцию $\alpha(t)$, $t \in R_+^1$, для которой $\alpha(+0) = \alpha'(+0) = 0$, $\alpha(t) > 0$ при $t > 0$, $\alpha(t) = \text{const}$ для $t \geq d$ при некотором $d > 0$. Рассмотрим интегральное преобразование

$$F_\alpha[u(t)](\eta) = \int_0^{+\infty} u(t) \exp\left(i\eta \int_t^d \frac{d\rho}{\alpha(\rho)}\right) \frac{dt}{\sqrt{\alpha(t)}},$$

определенное, например, на функциях $u(t) \in C_0^\infty(R_+^1)$. Для преобразования F_α справедлив аналог равенства Парсеваля $\|F_\alpha[u](\eta)\|_{L_2(R^1)} = \sqrt{2\pi} \|u\|_{L_2(R_+^1)}$, что дает возможность расширить это преобразование до непрерывного преобразования, осуществляющего гомеоморфизм пространств $L_2(R^1)$ и $L_2(R_+^1)$. Это равенство позволяет также рассмотреть преобразование F_α на некоторых классах обобщенных функций. Для расширенного таким образом преобразования F_α сохраним старое обозначение. Обозначим через F_α^{-1} обратное к F_α преобразование. Это преобразование можно записать в виде

$$F_\alpha^{-1}[w(\eta)](t) = \frac{1}{\sqrt{\alpha(t)}} F_{\eta \rightarrow \tau}^{-1}[w(\eta)] \Big|_{\tau=\varphi(t)},$$

где $F_{\eta \rightarrow \tau}^{-1}$ — обратное преобразование Фурье. На функциях $u(t) \in C_0^\infty(\bar{R}_+^1)$ выполняются соотношения $F_\alpha[D_{\alpha,t}^j u](\eta) = \eta^j F_\alpha[u](\eta)$, $j = 1, 2, \dots$, где $D_{\alpha,t} = \frac{1}{i} \sqrt{\alpha(t)} \partial_t \sqrt{\alpha(t)}$, $\partial_t = \frac{\partial}{\partial t}$.

Преобразование F_α переводит операцию $D_{\alpha,t}$ в операцию умножения на двойственную переменную η .

Рассмотрим вырождающийся псевдодифференциальный оператор, определенный формулой

$$P^{(\sigma)}(t, D_x, D_{\alpha,t}) v(x, t) = F_{\xi \rightarrow x}^{-1} F_\alpha^{-1} [p(t, \xi, \eta) F_\alpha F_{x \rightarrow \xi} [v(x, t)]] .$$

Здесь $D_x^\tau = i^{|\tau|} \partial_{x_1}^{\tau_1} \partial_{x_2}^{\tau_2} \dots \partial_{x_{n-1}}^{\tau_{n-1}}$, $F_{x \rightarrow \xi} (F_{\xi \rightarrow x}^{-1})$ — прямое (обратное) преобразование Фурье, переводящее переменную $x \in R^{n-1}$ в двойственную переменную $\xi \in R^{n-1}$.

Определение 1. Будем говорить, что символ $p(t, \xi, \eta)$ вырождающегося псевдодифференциального оператора $P^{(\sigma)}(t, D_x, D_{\alpha,t})$ принадлежит классу символов $S_{\alpha,\rho,\delta}^\sigma(\Omega)$, где $\Omega \subset \bar{R}_+^1$, $\sigma \in R^1$, $0 \leq \delta < \rho \leq 1$, если функция $p(t, \xi, \eta)$ является бесконечно дифференцируемой по переменным $t \in \Omega$ и $\eta \in R^1$. Причем при всех $j = 0, 1, 2, \dots$, $l = 0, 1, 2, \dots$ справедливы оценки

$$|(\alpha(t)\partial_t)^j \partial_\eta^l \lambda(t, \xi, \eta)| \leq c_{jl} (1 + |\xi| + |\eta|)^{\sigma - \rho l + \delta j}$$

с константами $c_{jl} > 0$, не зависящими от $\xi \in R^{n-1}$, $\eta \in R^1$, $t \in K$, где $K \subset \Omega$ — произвольный отрезок.

Условие 1. Существует число $\mu \in (0,1]$ такое, что $|\alpha'(t)\alpha^{-\mu}(t)| \leq c < \infty$ при всех $t \in [0, +\infty)$. Кроме того, $\alpha(t) \in C^{s_1}[0, +\infty)$ для некоторого $s_1 \geq 2N - |\sigma|$, где

$$N \geq \max_{0 \leq p_1 \leq l} \left\{ 2p_1 + \frac{l - p_1 + \frac{3}{2}}{\nu} + 1, \sigma + 1, \sigma + \frac{l}{2} \right\}, \quad l = 1, 2, \dots,$$

σ — некоторое действительное число.

Условие 1'. Выполнено условие 1 при $\sigma = s + q$, $l = 1, 2, \dots, [s/q]$, где $q > 1$, $s \geq 0$ — действительные числа.

Можно показать, что указанное выше число μ существует, если $\alpha(+0) = \alpha'(+0) = 0$.

Определение 2. Пространство $H_{s,\alpha}(R_+^n)$ (s — действительное число) состоит из всех функций $v(x, t) \in L_2(R_+^n)$, для которых конечна норма

$$\|v\|_{s,\alpha}^2 = \int_{R^n} (1 + |\xi|^2 + \eta^2)^s \left| F_\alpha F_{x \rightarrow \xi} [v(x, t)] \right|^2 d\xi d\eta.$$

Определение 3. Пространство $H_{s,\alpha,q}(R_+^n)$ ($s \geq 0$, $q > 1$) состоит из всех функций $v(x, t) \in H_{s,\alpha}(R_+^n)$, для которых конечна норма

$$\|v\|_{s,\alpha,q,\lambda} = \left\{ \sum_{l=0}^{[s/q]} \left\| F_{\xi \rightarrow x}^{-1} F_\alpha^{-1} \left[(1 + |\xi|^2 + \eta^2)^{\frac{s-ql}{2}} F_\alpha F_{x \rightarrow \xi} [\partial_t^l v] \right] \right\|_{L_2(R_+^n)}^2 \right\}^{\frac{1}{2}}.$$

Здесь $[s/q]$ — целая часть числа s/q .

В R_+^n рассмотрим задачу

$$\begin{aligned} P^{(q)}(t, D_x, D_{\alpha,t}) v(x, t) - \partial_t v(x, t) &= F(x, t), \\ v(x, t)|_{t=0} &= G(x). \end{aligned} \quad (1)$$

Предположим, что символ $p(t, \xi, \eta)$ весового псевдодифференциального оператора $P^{(q)}(t, D_x, D_{\alpha,t})$ удовлетворяют следующему условию.

Условие 2. Символ $p(t, \xi, \eta)$ принадлежит классу $S_{\alpha,\rho,\delta}^q(\Omega)$, где $\Omega \subset \bar{R}_+^1$, $0 \leq \delta < \rho \leq 1$, $q > 1$ — действительное число, $\Omega \subset \bar{R}_+^1$. Причем с некоторой константой $c > 0$, не зависящей от $t \in \Omega$, $\xi \in R^{n-1}$, $\eta \in R^1$, $|\xi| + |\eta| > 0$, справедливы оценки

$$-\operatorname{Re} p(t, \xi, \eta) \geq c(1 + |\xi| + |\eta|)^q \quad \text{при всех } t \in \Omega, \xi \in R^{n-1}, \eta \in R^1.$$

Доказана

Теорема. Пусть $s \geq 0$, $q > 1$ — действительные числа, выполнено условие 1'. Пусть функция $p(t, \xi, \eta)$ удовлетворяет условию 2. Тогда для любого решения $v(x, t) \in H_{s+q,\alpha,q}(R_+^n)$ задачи (1) справедлива априорная оценка

$$\|v\|_{s+q,\alpha,q} \leq c \left(\|F\|_{s,\alpha,q} + \|G\|_{s+\frac{1}{2}q} + \|v\|_{L_2(R_+^n)} \right)$$

с постоянной $c > 0$, не зависящей от v , F , G .

ЛИТЕРАТУРА

- [1] Баев А.Д. *Вырождающиеся эллиптические уравнения высокого порядка и связанные с ними псевдодифференциальные операторы*, Докл. Академии наук, **265** (5), 1044–1046 (1982).
- [2] Баев А.Д. *Об общих краевых задачах в полупространстве для вырождающихся эллиптических уравнений высокого порядка*, Докл. Академии наук, **422** (6), 727–728 (2008).
- [3] Левендорский С.З. *Краевые задачи в полупространстве для квазиэллиптических псевдодифференциальных операторов, вырождающихся на границе*, Матем. сб., **111** (153), 483–501 (1980).
- [4] Баев А.Д., Ковалевский Р.А. *Краевые задачи для одного класса вырождающихся псевдодифференциальных уравнений*, Докл. Академии наук, **461** (1), 7–9 (2016).
- [5] Баев А.Д., Ковалевский Р.А., Кобылинский П.А. *О вырождающихся эллиптических уравнениях высокого порядка и псевдодифференциальных операторах с вырождением*, Докл. Академии наук, **471** (4), 387–390 (2016).
- [6] Баев А.Д., Садчиков П.В. *Корректность некоторых краевых задач, моделирующих процессы с вырождением*, Научно-технические ведомости СПбГПУ. Физ.-матем. науки, **4** (88), 50–56 (2009).
- [7] Баев А.Д., Работинская Н.И. *О некоторых свойствах одного класса вырождающихся псевдодифференциальных операторов*, Докл. Академии наук, **477** (1), 7–10 (2017).

Александр Дмитриевич Баев

Воронежский государственный университет,
Университетская пл., д. 1, г. Воронеж, 394018, Россия,
e-mail: alexsandrbaev@mail.ru

Дмитрий Александрович Чечин
Воронежский государственный университет,
Университетская пл., д. 1, г. Воронеж, 394018, Россия,
e-mail: alexsandrbaev@mail.ru

Сергей Александрович Шабров
Воронежский государственный университет,
Университетская пл., д. 1, г. Воронеж, 394018, Россия,
e-mail: shaspoteha@mail.ru

Наталья Ивановна Работинская
Воронежский государственный университет,
Университетская пл., д. 1, г. Воронеж, 394018, Россия,
e-mail: rabotinskaya@math.vsu.ru

Наталья Александровна Бабайцева
Воронежский государственный университет,
Университетская пл., д. 1, г. Воронеж, 394018, Россия,
e-mail: babaytseva.nata.73@mail.ru

A.D. Baev, D.A. Chechin, S.A. Shabrov, N.I. Robotinskaya, and N.A. Babaitseva

A priori estimation of solutions of a boundary problem for a pseudodifferential equation with degeneration

Abstract. In this paper, we obtain a coercive a priori estimation of solutions to the boundary value problem in a half-space for a degenerate pseudodifferential equation. The left part of the equation is the sum of the pseudo-differential operator with degeneracy, constructed by a special integral transformation, and the differentiation operator. A priori estimation is obtained in special weight spaces of the type of S. L. Sobolev spaces, the norms in which are constructed using a special integral transformation.

Keywords: a priori estimation, degenerate equation, pseudo-differential operator with degeneration, S. L. Sobolev weight spaces.

Alexander Dmitrievich Baev

Voronezh State University,
1 Universitetskaya sq., Voronezh, 394018 Russia,
e-mail: alexsandrbaev@mail.ru

Dmitry Alexandrovich Chechin
Voronezh State University,
1 Universitetskaya sq., Voronezh, 394018 Russia,
e-mail: alexsandrbaev@mail.ru

Sergey Alexandrovich Shabrov
Voronezh State University,
1 Universitetskaya sq., Voronezh, 394018 Russia,
e-mail: shaspoteha@mail.ru

Natalya Ivanovna Robotinskaya
Voronezh State University,
1 Universitetskaya sq., Voronezh, 394018 Russia,
e-mail: robotinskaya@math.vsu.ru

Natalia Alexandrovna Babaitseva
Voronezh State University,
1 Universitetskaya sq., Voronezh, 394018 Russia,
e-mail: babaytseva.nata.73@mail.ru