ЧЕБЫШЕВСКИЙ СБОРНИК
Том 21. Выпуск 3.

УДК 517.5 DOI 10.22405/2226-8383-2020-21-3-250-261

Наилучшие квадратурные формулы вычисления криволинейных интегралов для некоторых классов функций и кривых

М. Ш. Шабозов, М. К. Абдукаримзода

Мирганд Шабозович Шабозов — доктор физико-математических наук, профессор, академик НАН Таджикистана, Таджикский национальный университет (г. Душанбе).
e-mail: shabozov@mail.ru
Муслими Кароматулло Абдукаримзода — аспирант, Таджикский национальный университет (г. Душанбе).
e-mail: m.abdukarimzoda@mail.ru

Аннотация

Для приближённого вычисления криволинейного интеграла

$$J(f;\Gamma) := \int\limits_{\Gamma} f(x_1, x_2, \ldots, x_m)dt$$

в случае, когда кривая Γ задаётся параметрическими уравнениями

$$x_1 = \varphi_1(t), x_2 = \varphi_2(t), \cdots, x_m = \varphi_m(t), 0 \le t \le L,$$

вводится в рассмотрение квадратурная формула

$$J(f;\Gamma) \approx := \sum_{k=1}^{N} p_k\, f\Big(\varphi_1(t_k),\, \varphi_2(t_k), \ldots,\, \varphi_m(t_k)\Big),$$

где $P = \{p_k\}_{k=1}^N$ и $T := \{t_k : 0 \le t_1 < t_2 < \ldots < t_N \le L\}$– произвольные векторы коэффициентов и узлов. Пусть $H^{\omega_1,\ldots,\omega_m}[0, L]$ – множество кривых Γ, у которых координатные функции $\varphi_i(t) \in H^{\omega_i}[0, L]$ $(i = \overline{1, m})$, где $\omega_i(t)$ $(i = \overline{1, m})$ – заданные модули непрерывности, $\mathfrak{M}_\rho^{\omega,p}$ – класс функций $f(M)$, определённых в точках $M \in \Gamma$, таких, что для любых двух точек $M' = M(x'_1, x'_2, \ldots, x'_m)$, $M'' = M(x''_1, x''_2, \ldots, x''_m)$, принадлежащих кривой $\Gamma \in H^{\omega_1,\ldots,\omega_m}[0, L]$, они удовлетворяют условию

$$\Big|f(M') - f(M'')\Big| \leqslant \omega(\rho_p(M', M'')),$$

где

$$\rho_p(M', M'') = \left\{\sum_{i=1}^{m} |x'_i - x''_i|^p\right\}^{1/p},\ 1 \le p \le \infty,$$

$\omega(t)$– заданный модуль непрерывности. Доказано, что среди всех квадратурных формул указанного вида наилучшей для класса функций $\mathfrak{M}_\rho^{\omega,p}$ и класса кривых $H^{\omega_1,\ldots,\omega_m}[0, L]$ является формула средних прямоугольников.

Вычислена точная оценка погрешности наилучшей квадратурной формулы для всех рассматриваемых классов функций и кривых и дано обобщение для более общих классов функций.

Ключевые слова: криволинейный интеграл, квадратурная формула, погрешность, формула прямоугольников, формула трапеций, узлы.

Библиография: 8 названий.

Для цитирования:
М. Ш. Шабозов, М. К. Абдукаримзода. Наилучшие квадратурные формулы вычисления криволинейных интегралов для некоторых классов функций и кривых // Чебышевский сборник, 2020, т. 21, вып. 3, с. 250–261.

CHEBYSHEVSKII SBORNIK
Vol. 21. No. 3.

UDC 517.5 DOI 10.22405/2226-8383-2020-21-3-250-261

Best quadrature formulas calculation of curvilinear integrals for some classes of functions and currves

M. Sh. Shabozov, M. K. Abdukarimzoda

Mirgand Shabozovich Shabozov — doctor of physical and mathematical sciences, professor, academician of the National Academy of Sciences of Tajikistan, Tajik National University (Dushanbe).
e-mail: shabozov@mail.ru
Muslimi Karomatullo Abdukarimzoda — graduate student, Tajik National University (Dushanbe).
e-mail: m.abdukarimzoda@mail.ru

Abstract

For an approximate calculation of a curvilinear integral

$$J(f;\Gamma) := \int\limits_{\Gamma} f(x_1, x_2, \ldots, x_m)dt$$

when the curve Γ is given by parametric equations

$$x_1 = \varphi_1(t), x_2 = \varphi_2(t), \ldots, x_m = \varphi_m(t), 0 \le t \le L$$

the quadrature formula is entered into consideration

$$J(f;\Gamma) :\approx \sum_{k=1}^{N} p_k\, f\Big(\varphi_1(t_k),\, \varphi_2(t_k), \ldots,\, \varphi_m(t_k)\Big),$$

where $P = \{p_k\}_{k=1}^{N}$ and $T := \{t_k : 0 \le t_1 < t_2 < \cdots < t_N \le L\}$– are arbitrary vector coefficients and nodes. Let $H^{\omega_1,\ldots,\omega_m}[0, L]$– sets of curves Γ, whose coordinate functions $\varphi_i(t) \in H^{\omega_i}[0, L]$ $(i = \overline{1,m})$, where $\omega_i(t)$ $(i = \overline{1,m})$– are given moduli of continuity $\mathfrak{M}_{\rho}^{\omega,p}$– functions class $f(M)$, defined in point $M \in \Gamma$, such for any two points $M' = M(x_1', x_2', \ldots, x_m')$, $M'' = M(x_1'', x_2'', \ldots, x_m'')$ belonging to a curve $\Gamma \in H^{\omega_1,\ldots,\omega_m}[0, L]$ satsify the condition

$$\Big|f(M') - f(M'')\Big| \leqslant \omega(\rho_p(M', M'')),$$

where

$$\rho_p(M', M'') = \left\{\sum_{i=1}^{m} |x_i' - x_i''|^p\right\}^{1/p},\ 1 \le p \le \infty,$$

$\omega(t)$– given moduls of continuity. It is proved that among all quadrature formulas of the above from, the best for a class of functions $\mathfrak{M}_{\rho}^{\omega,p}$ and a class of curves $H^{\omega_1,\ldots,\omega_m}[0, 1]$, is the formula of average rectangles.

The exact error estimate of the best quadrature formula is calculated for all the functional classes under consideration and the curves are given a generalization for more general classes of functions.

Keywords: curvilinear integral, quadrature formula, error, rectangle formula, functions class, nodes.

Bibliography: 8 titles.

For citation:
M. Sh. Shabozov, M. K. Abdukarimzoda, 2020, "Best quadrature formulas calculation of curvilinear integrals for some classes of functions and currves" , *Chebyshevskii sbornik*, vol. 21, no. 3, pp. 250–261.

1. Введение

Экстремальная задача отыскания наилучшей для заданного класса функций квадратурной формулы является одной из актуальных задач вычислительной математики. Наиболее важные результаты, полученные по экстремальным задачам теории квадратур до конца прошлого столетия, приведены в дополнении Н.П.Корнейчука к монографии С.М.Никольского [1], последнее издание которой вышло в 1988 году. В дополнении отмечается, что по экстремальным задачам теории квадратур получен ряд существенных окончательных результатов для различных классов функций, а также отмечается, что до настоящего времени немало задач для некоторых важных интегралов ещё не решено. Это замечание, в частности, относится к задаче отыскания оптимальных квадратурных формул для криволинейных интегралов. Для указанных интегралов задача отыскания наилучших квадратурных формул находится на начальной стадии. Некоторые результаты в этом направлении получены совсем недавно в [2]–[6]. В данной статье рассматривается задача о приближённом вычислении криволинейного интеграла первого рода для классов функций и классов пространственных кривых, задаваемых модулями непрерывности.

2. Постановка экстремальной задачи

Пусть функция $f(M) = f(x_1, x_2, \ldots, x_m)$ определена и интегрируема вдоль кривой $\Gamma \subset R^m$ и

$$J(f;\Gamma) := \int\limits_{\Gamma} f(M)dt = \int\limits_{\Gamma} f(x_1, x_2, \ldots, x_m)dt. \tag{1}$$

Предположим, что на кривой Γ установлено положительное направление так, что положение точки $M = M(x_1, x_2, \ldots, x_m)$ на кривой может быть определено длиной дуги $t = \smile{AM}$, отсчитываемой от начальной точки A. Тогда кривая Γ параметрически выразится уравнениями

$$x_1 = \varphi_1(t),\, x_2 = \varphi_2(t),\, \ldots,\, x_m = \varphi_m(t),\ (0 \leqslant t \leqslant L), \tag{2}$$

а функция $f(x_1, x_2, \ldots, x_m)$, заданная в точках кривой, сведётся к сложной функции $f(\varphi_1(t), \varphi_2(t), \ldots, \varphi_m(t))$ от переменной t. Хорошо известно, что в этом случае интеграл (1) запишется в виде следующего определённого интеграла

$$J(f;\Gamma) = \int\limits_0^L f(\varphi_1(t),\, \varphi_2(t), \ldots,\, \varphi_m(t))\, dt. \tag{3}$$

Всякая квадратурная формула

$$J(f;\Gamma) \approx \mathcal{L}_N(f;\Gamma;P,T) := \sum_{k=1}^{N} p_k\, f\Big(\varphi_1(t_k),\, \varphi_2(t_k), \ldots,\, \varphi_m(t_k)\Big) \tag{4}$$

для приближённого вычисления интеграла (3) задаётся векторами коэффициентов $P = \{p_k\}_{k=1}^{N}$ и узлов

$$T = \{t_k:\ 0 \leqslant t_1 < \ldots < t_N \leqslant L\},$$

где $p_1, p_2, \ldots, p_N$ – произвольные действительные числа.

Погрешность квадратурной формулы (4) обозначим

$$\Big|R_N(f;\Gamma)\Big| := \Big|R_N(f;\Gamma;P,T)\Big| = \Big|J(f;\Gamma) - \mathcal{L}_N(f;\Gamma;P,T)\Big|.$$

Если $\mathfrak{M}$ – некоторый класс функций $\{f(\varphi_1(t), \varphi_2(t), \ldots, \varphi_m(t))\}$, определённых в точках кривой Γ и интегрируемых как сложные функции параметра t на отрезке $[0, L]$, то за величину, характеризующую точную оценку погрешности, примем верхнюю грань

$$R_N(\mathfrak{M};\Gamma;P,T) = \sup\left\{ \Big|R_N(f;\Gamma;P,T)\Big| :\ f \in \mathfrak{M}\right\}.$$

Пусть $\mathfrak{N}(L)$ – класс кривых Γ, заданных параметрическими уравнениями (2). Наибольшую погрешность квадратурной формулы (4) всего класса функций $\mathfrak{M}$ на классе кривых $\mathfrak{N}(L)$ обозначим

$$R_N(\mathfrak{M};\mathfrak{N}(L);P,T) = \sup\Big\{R_N(\mathfrak{M};\Gamma;P,T) :\ \Gamma \subset \mathfrak{N}(L)\Big\}.$$

Для того чтобы получить оптимальную квадратурную формулу на классах функций $\mathfrak{M}$ и кривых $\mathfrak{N}(L)$, потребуем, чтобы формула (4) была точна для функции $f(\varphi_1(t), \varphi_2(t), \ldots, \varphi_m(t)) = \mathrm{const}$, то есть чтобы выполнялось условие

$$\int_0^L dt = \sum_{k=1}^{N} p_k = L.$$

Через $\mathcal{A}$ обозначим множество векторов коэффициентов и узлов (P, T), для которых квадратурная формула (4) имеет смысл. Нижнюю грань

$$\mathcal{E}_N(\mathfrak{M}, \mathfrak{N}(L)) = \inf_{(P,T)}\{R_N(\mathfrak{M};\mathfrak{N}(L), P, T), (P,T) \in \mathcal{A}\}, \tag{5}$$

по аналогии с определением из монографии [1], будем называть оптимальной оценкой погрешности квадратурной формулы (4) на классах функций $\mathfrak{M}$ и кривых $\mathfrak{N}(L)$. Если существует вектор $(P^0, T^0) \in \mathcal{A}$, для которого

$$\mathcal{E}_N(\mathfrak{M}, \mathfrak{N}(L)) = R_N(\mathfrak{M};\mathfrak{N}(L), P^0, T^0),$$

то указанный вектор определяет наилучшую квадратурную формулу вида (4) в смысле С.М.Никольского [1] на классах функций $\mathfrak{M}$ и кривых $\mathfrak{N}(L)$.

Здесь исследуется квадратурная формула (4) с произвольными векторами коэффициентами $P = \{p_k\}_{k=1}^{N}$ и узлами

$$T = \{t_k\}_{k=1}^{N} :\ 0 \leqslant t_1 < t_2 \ldots < t_N \leqslant L.$$

3. Классы функций и кривых

Обозначим через $H^{\omega} := H^{\omega}[0,L]$ – множество функций $\varphi(t) \in C[0,L]$, удовлетворяющих условию

$$|\varphi(t') - \varphi(t'')| \leqslant \omega\left(|t'-t''|\right), \ t', t'' \in [0,L],$$

где $\omega(\delta)$ – заданный модуль непрерывности, то есть непрерывная функция, удовлетворяющая соотношениям $0 \leqslant \omega(t'') - \omega(t') \leqslant \omega(t''-t'), 0 \leqslant t' \leqslant t'' \leqslant L$, $\omega(0) = 0$.

Через $H^{\,\omega_1,\ldots,\omega_m}[0,L]$ обозначим класс гладких кривых $\Gamma \subset R^m$, заданных параметрическими уравнениями (2), у которых координатные функции $\varphi_i(t) \in H^{\omega_i}[0,L], \ i=\overline{1,m}$.

В евклидовом пространстве R^m для любых двух точек $M' = M(x_1', x_2', \ldots, x_m')$, $M'' = M(x_1'', x_2'', \ldots, x_m'')$ введём в рассмотрение следующее l_p $(1 \leqslant p \leqslant \infty)$-расстояние

$$\rho_p(M', M'') = \left\{\sum_{i=1}^{m} |x_i' - x_i''|^p\right\}^{1/p}, \ 1 \leq p < \infty,$$

$$\rho_\infty(M', M'') = \max_{1 \leq i \leq m} |x_i' - x_i''|.$$

Через $\mathfrak{M}_\rho^{\omega,p}$ $(1 \leqslant p \leqslant \infty)$ обозначим класс функций $f(M) = f(x_1, \ldots, x_m)$, определённых на кривых $\Gamma \subset H^{\,\omega_1,\ldots,\omega_m}$ и для любых двух точек $M', M'' \in \Gamma$ удовлетворяющих условию

$$\Big|f(M') - f(M'')\Big| \leqslant \omega(\rho_p(M', M'')).$$

Таким образом, будем писать $f(M) \in \mathfrak{M}_\rho^{\omega,p}$, если для любых двух точек $M', M'' \in \Gamma \subset H^{\,\omega_1,\ldots,\omega_m}$ и $t', t'' \in [0,L]$ выполняется неравенство

$$\Big|f(M') - f(M'')\Big| \leqslant \omega\left(\left\{\sum_{i=1}^{m} |x_i' - x_i''|^p\right\}^{1/p}\right) =$$

$$= \omega\left(\left\{\sum_{i=1}^{m}\Big|\varphi_i(t') - \varphi_i(t'')\Big|^p\right\}^{1/p}\right) \leqslant \omega\left(\left\{\sum_{i=1}^{m} \omega_i^p\left(|t'-t''|\right)\right\}^{1/p}\right).$$

4. Основной результат

Сформулируем основной результат работы.

Теорема 1. *Среди всех квадратурных формул вида (4) с произвольными векторами-коэффициентами и узлами (P,T), $P = \{p_k\}_{k=1}^N$, $T = \{t_k\}_{k=1}^N : \ 0 \leqslant t_1 < t_2 < \ldots < t_N \leqslant L$ наилучшей для класса функций $\mathfrak{M}_\rho^{\omega,p}$ $(1 \leqslant p \leqslant \infty)$ и класса кривых $H^{\,\omega_1,\ldots,\omega_m}$ является формула средних прямоугольников*

$$\int_0^L f\left(\varphi_1(t), \ldots, \varphi_m(t)\right) dt =$$

$$= \frac{L}{N}\sum_{k=1}^{N} f\left(\varphi_1\left(\frac{2k-1}{2N}L\right), \ldots, \varphi_m\left(\frac{2k-1}{2N}L\right)\right) + R_N(f;\Gamma). \tag{6}$$

При этом для погрешности наилучшей формулы (6) на классах функций $\mathfrak{M}_\rho^{\omega,p}$ *и кривых* $H^{\,\omega_1,\dots,\omega_m}$ *справедлива точная оценка*

$$\mathcal{E}_N\left(\mathfrak{M}_\rho^{\omega,p}; H^{\,\omega_1,\dots,\omega_m}\right) = (2N)\int\limits_0^{L/(2N)} \omega\left(\left\{\sum_{i=1}^m \omega_i^p(t)\right\}^{1/p}\right) dt. \tag{7}$$

Для доказательства теоремы 1 нам понадобятся следующие утверждения.

Лемма A [7, с.177]. *Пусть в области* $D \in R^m$ *фиксирована произвольная система точек* $M_1, M_2, ..., M_\nu$ *и функция* $g(M)$ *определена равенством*

$$g(M) = \min_{1\leqslant j\leqslant \nu} \varphi[\rho(M, M_j)], \quad M \in D,$$

где $\varphi(t)$ *– неубывающая и полуаддитивная, то есть удовлетворяющая соотношениям*

$$0 \leqslant \varphi(t_2) - \varphi(t_1) \leqslant \varphi(t_2 - t_1), \quad 0 \leqslant t_1 \leqslant t_2 \leqslant \theta$$

(θ *– диаметр области* D*) функция, а* $\rho(M, M_j)$ *– расстояние между точками* M *и* M_j*. Тогда для любых точек* M' *и* M'' *из* D *имеет место неравенство*

$$|g(M') - g(M'')| \leqslant \varphi[\rho(M', M'')].$$

Следующее утверждение является следствием леммы 8.2.9 из [7, с.369-370], доказательство которой несложно проводится по той же схеме.

Лемма. *Пусть* $\psi_i(t)$ $(i = \overline{1,m})$ *– неубывающие и неотрицательные для* $0 \leqslant t \leqslant L$ *функции и при фиксированном* $N = 1, 2, \dots$ *вектору*

$$T = \{t_k :\ 0 \leqslant t_1 < t_2 < \ldots < t_N \leqslant L\}$$

сопоставлена функция

$$\Phi_{1,p}(T, t) = \min_{1\leqslant k\leqslant N}\left\{\sum_{i=1}^m \psi_i^p(|t - t_k|)\right\}^{1/p},\ 0 \leqslant t \leqslant L,\ 1 \leqslant p \leqslant \infty.$$

Тогда выполняется неравенство

$$\int\limits_0^L \Phi_{1,p}(T, t)dt \geqslant \int\limits_0^L \Phi_{1,p}(T_0, t)dt, \tag{8}$$

где вектор T_0 *определяется координатами* $\tau_k = (2k-1)L/(2N), (k = \overline{1,N})$.

Доказательство теоремы 1. Оценку снизу получим хорошо известным методом Н.П.Корнейчука [8]. Пусть (P, T) – произвольный вектор коэффициентов и узлов, для которых имеет смысл формула (4). Через $\mathfrak{M}_{\rho,T}^{\omega,p}$ обозначим множество функций $f(M) \in \mathfrak{M}_\rho^{\omega,p}$, определённых вдоль кривой $\Gamma \subset H^{\,\omega_1,\dots,\omega_m}$, которые в узлах вектора $T = \{t_k\}_{k=1}^N$ обращаются в нуль: $f(\varphi_1(t_k), \dots, \varphi_m(t_k)) = 0$, $k = \overline{1,N}$. В силу того, что $\mathfrak{M}_{\rho,T}^{\omega,p} \subset \mathfrak{M}_\rho^{\omega,p}$, имеем:

$$R_N\left(\mathfrak{M}_\rho^{\omega,p}; H^{\,\omega_1,\dots,\omega_m}; P, T\right) \geqslant R_N\left(\mathfrak{M}_{\rho,T}^{\omega,p}; H^{\,\omega_1,\dots,\omega_m}; P, T\right).$$

Полагая

$$\mathcal{E}_N\left(\mathfrak{M}_{\rho,T}^{\omega,p}; H^{\,\omega_1,\dots,\omega_m}\right) = \inf\left\{R_N\left(\mathfrak{M}_{\rho,T}^{\omega,p}; H^{\,\omega_1,\dots,\omega_m}; P, T\right) :\ (P, T) \in \mathcal{A}\right\}$$

и учитывая, что для всех функций $f(M)\in\mathfrak{M}^{\omega,p}_{\rho,T}$ квадратурная сумма справа в (6) равна нулю, будем иметь

$$\mathcal{E}_N\left(\mathfrak{M}^{\omega,p}_{\rho};H^{\,\omega_1,\ldots,\omega_m}\right)\geqslant\mathcal{E}_N\left(\mathfrak{M}^{\omega,p}_{\rho,T};H^{\,\omega_1,\ldots,\omega_m}\right)=$$

$$=\inf_{(P,T)\in\mathcal{A}}\ \sup_{f\in\mathfrak{M}^{\omega,p}_{\rho,T}}\ \sup_{\Gamma\subset H^{\,\omega_1,\ldots,\omega_m}}\left|\int\limits_0^L f\left(\varphi_1(t),\,\ldots,\,\varphi_m(t)\right)dt\right|, \tag{9}$$

причём правая часть неравенства (9) от коэффициентов $\{p_k\}_{k=1}^N$ не зависит. Фиксируем произвольный вектор узлов

$$T=\{t_k\}_{k=1}^N\ \ (0\leqslant t_1<t_2<\ldots<t_N\leqslant L)$$

и определим кривую Γ_0 параметрическими уравнениями

$$x_i:=\varphi_i(t)=\min_k\,\omega_i\Big(|t-t_k|\Big),\ i=\overline{1,m}.$$

Легко проверить, что $\varphi_i(t)\in H^{\omega_i}[0,L]$ $i=\overline{1,m}$, а значит кривая $\Gamma_0\subset H^{\,\omega_1,\,\ldots,\omega_m}$. Если теперь функция $f(M)\in\mathfrak{M}^{\omega,p}_{\rho,T},$ то в точках $M^{(k)}=M(\varphi_1(t_k),\,\varphi_2(t_k),\ldots,\,\varphi_m(t_k))\in\Gamma$ имеем $f(M^{(k)})\equiv 0,\ k=\overline{1,N}$, а потому

$$\Big|f(M)\Big|=\Big|f(M)-f(M^{(k)})\Big|\leqslant$$

$$\leqslant\omega\left(\left\{\sum_{i=1}^m\Big|\varphi_i(t)-\varphi_i(t_k)\Big|^p\right\}^{1/p}\right)\leqslant\omega\left(\left\{\sum_{i=1}^m\omega_i^p\left(|t-t_k|\right)\right\}^{1/p}\right),$$

и следовательно, в силу непрерывности ω, имеем

$$f(M)\leqslant\min_{t_k}\omega\left(\left\{\sum_{i=1}^m\Big|\varphi_i(t)-\varphi_i(t_k)\Big|^p\right\}^{1/p}\right)=\omega\left(\min_{t_k}\left\{\sum_{i=1}^m\Big|\varphi_i(t)-\varphi_i(t_k)\Big|^p\right\}^{1/p}\right)=$$

$$=f_{P,T}\left(\varphi_1(t),\varphi_2(t),\cdots,\varphi_m(t)\right):=f_{P,T}(M). \tag{10}$$

Функцию $f_{p,T}(M)$, определённую в правой части неравенства (10), в силу расположения узлов t_k $(t_k<t_{k+1}),\ k=\overline{1,N-1}$, а также монотонности $\omega_i(\delta),\ i=\overline{1,m}$, можно записать в виде

$$f_{p,T}(M)=\omega\left(\left\{\sum_{i=1}^m\omega_i^p\left(\min_k|t-t_k|\right)\right\}^{1/p}\right).$$

Докажем, что функция $f_{p,T}(M)\in\mathfrak{M}^{\omega,p}_{\rho,T}$. Действительно, если $t',t''\in[0,L]$, то для любых узлов $t_k\in[0,L]$, применяя лемму А, получаем

$$\Big|f_{p,T}(M')-f_{p,T}(M'')\Big|=\rho\Big(f_{p,T}(M'),f_{p,T}(M'')\Big)=$$

$$=\left|\omega\left(\left\{\sum_{i=1}^m\omega_i^p\left(\min_k|t'-t_k|\right)\right\}^{1/p}\right)-\omega\left(\left\{\sum_{i=1}^m\omega_i^p\left(\min_k|t''-t_k|\right)\right\}^{1/p}\right)\right|\leqslant$$

$$\leqslant\omega\left(\left|\left\{\sum_{i=1}^m\omega_i^p\left(\min_k|t'-t_k|\right)\right\}^{1/p}-\left\{\sum_{i=1}^m\omega_i^p\left(\min_k|t''-t_k|\right)\right\}^{1/p}\right|\right)\leqslant$$

$$\leqslant \omega\left(\left\{\sum_{i=1}^{m}\left|\omega_i\left(\min_k|t'-t_k|\right)-\omega_i\left(\min_k|t''-t_k|\right)\right|^p\right\}^{1/p}\right)\leqslant$$

$$\leqslant \omega\left(\left\{\sum_{i=1}^{m}\omega_i^p\left(|t'-t''|\right)\right\}^{1/p}\right),$$

и так как, кроме того $f_{p,T}(M^{(k)})=0,\ k=\overline{1,N}$, то $f_{p,T}(M)\in\mathfrak{M}^{\omega,p}_{\rho,T}$. Это с учётом (10) приводит к соотношению

$$\sup_{f\in\mathfrak{M}^{\omega,p}_{\rho,T}}\ \sup_{\Gamma\subset H^{\omega_1,\ldots,\omega_m}}\left|R_N(f;\Gamma;P,T)\right|=$$

$$=\sup_{f\in\mathfrak{M}^{\omega,p}_{\rho,T}}\ \sup_{\Gamma\subset H^{\omega_1,\ldots,\omega_m}}\left|\int_0^L f\left(\varphi_1(t),\,\ldots,\,\varphi_m(t)\right)dt\right|=$$

$$=\int_0^L f_{p,T}(\varphi_1(t),\,\ldots,\,\varphi_m(t))dt:=\int_0^L\omega\left(\left\{\sum_{i=1}^{m}\omega_i^p\left(\min_k|t-t_k|\right)\right\}^{1/p}\right)dt. \tag{11}$$

Пусть $T_0=\left\{\tau_k^0:\ \tau_k^0=(2k-1)L/(2N),\ k=\overline{1,N}\right\}$. Тогда из неравенства (8) и вышеприведённой леммы сразу следует, что при всех $1\le p\le\infty$

$$\int_0^L\omega\left(\left\{\sum_{i=1}^{m}\omega_i^p\left(\min_k|t-t_k|\right)\right\}^{1/p}\right)dt=\int_0^L f_{p,T}(\varphi_1(t),\,\ldots,\,\varphi_m(t))dt\geqslant$$

$$\geqslant\int_0^L f_{p,T_0}(\varphi_1(t),\,\ldots,\,\varphi_m(t))dt=\int_0^L\omega\left(\left\{\sum_{i=1}^{m}\omega_i^p\left(|t-\tau_k|\right)\right\}^{1/p}\right)dt=$$

$$=\sum_{k=1}^{N}\int_{(k-1)L/N}^{kL/N}\omega\left(\left\{\sum_{i=1}^{m}\omega_i^p\left(\left|t-\frac{(2k-1)L}{2N}\right|\right)\right\}^{1/p}\right)dt=$$

$$=\sum_{k=1}^{N}\left\{\int_{(k-1)L/N}^{(2k-1)L/(2N)}\omega\left(\left\{\sum_{i=1}^{m}\omega_i^p\left(\frac{(2k-1)L}{2N}-t\right)\right\}^{1/p}\right)dt+\right.$$

$$\left.+\int_{(2k-1)L/(2N)}^{kL/N}\omega\left(\left\{\sum_{i=1}^{m}\omega_i^p\left(t-\frac{(2k-1)L}{2N}\right)\right\}^{1/p}\right)dt\right\}=$$

$$=2\sum_{k=1}^{N}\int_0^{L/(2N)}\omega\left(\left\{\sum_{i=1}^{m}\omega_i^p(t)\right\}^{1/p}\right)dt=2N\int_0^{L/(2N)}\omega\left(\left\{\sum_{i=1}^{m}\omega_i^p(t)\right\}^{1/p}\right)dt. \tag{12}$$

Таким образом, с учётом (11) и (12), имеем оценку снизу

$$\mathcal{E}_N\left(\mathfrak{M}^{\omega,p}_{\rho};H^{\omega_1,\ldots,\omega_m}\right)\geqslant\mathcal{E}_N\left(\mathfrak{M}^{\omega,p}_{\rho,T};H^{\omega_1,\ldots,\omega_m}\right)=\inf_{(P,T)}\int_0^L f_{p,T}(\varphi_1(t),\,\ldots,\,\varphi_m(t))dt=$$

$$= \int\limits_0^L f_{p,T_1}(\varphi_1(t),\,\dots,\,\varphi_m(t))dt = 2N\int\limits_0^{L/(2N)}\omega\left(\left\{\sum_{i=1}^m \omega_i^p(t)\right\}^{1/p}\right)dt. \tag{13}$$

Чтобы получить оценку сверху, равную правой части (13), зададим квадратурную формулу (4) векторами коэффициентов

$$P_0 = \{p_k:\ p_k = L/N\}_{k=1}^N \tag{14}$$

и узлов

$$T_0 = \left\{\tau_k^0:\ \tau_k^0 = (2k-1)L/(2N),\ k=\overline{1,N}\right\}. \tag{15}$$

Тогда для произвольной функции $f(M)\in\mathfrak{M}_\rho^{\omega,p}$ и любой кривой $\Gamma\subset H^{\,\omega_1,\dots,\omega_m}$ будем иметь

$$\Big|R_N(f;\Gamma;P_1,T_1)\Big| =$$

$$= \left|\int\limits_0^L f\left(\varphi_1(t),\,\dots,\,\varphi_m(t)\right)dt - \frac{L}{N}\sum_{k=1}^N f\left(\varphi_1\left(\frac{2k-1}{2N}L\right),\dots,\varphi_m\left(\frac{2k-1}{2N}L\right)\right)\right| \leqslant$$

$$\leqslant \sum_{k=1}^N \int\limits_{(k-1)L/N}^{kL/N}\left|f\left(\varphi_1(t),\,\dots,\varphi_m(t)\right) - f\left(\varphi_1\left(\frac{2k-1}{2N}L\right),\dots,\varphi_m\left(\frac{2k-1}{2N}L\right)\right)\right|dt \leqslant$$

$$\leqslant \sum_{k=1}^N \int\limits_{(k-1)L/N}^{kL/N}\omega\left(\left\{\sum_{i=1}^m \omega_i^p\left(\left|t-\frac{(2k-1)L}{2N}\right|\right)\right\}^{1/p}\right)dt = 2N\int\limits_0^{L/(2N)}\omega\left(\left\{\sum_{i=1}^m\omega_i^p(t)\right\}^{1/p}\right)dt. \tag{16}$$

Сравнивая неравенства (13) и (16), получаем требуемое равенство (7), чем и завершаем доказательство теоремы 1.

Из доказанной теоремы 1 вытекает ряд следствий.

Следствие 1. *В условиях теоремы 1 при* $\omega(t)=t^\alpha$ $(0<\alpha\le 1)$ *имеет место равенство*

$$\mathcal{E}_N\left(\mathfrak{M}_\rho^{\alpha,p};H^{\,\omega_1,\dots,\omega_m}\right) = (2N)\int\limits_0^{L/(2N)}\left\{\sum_{i=1}^m\omega_i^p(t)\right\}^{\alpha/p}dt. \tag{17}$$

В частности, из (17) при $\alpha=1$, *вытекает результат из [6]. Если же в (17) полагать* $\omega_i(t)=\overline{\omega}(t)$, $(i=\overline{1,m})$, *где* $\overline{\omega}(t)$, *заданный модуль непрерывности, то будем иметь*

$$\mathcal{E}_N\left(\mathfrak{M}_\rho^{\alpha,p};H^{\,\overline{\omega}}\right) = (2N)\sqrt[p]{m^\alpha}\int\limits_0^{L/(2N)}(\overline{\omega}(t))^\alpha\,dt.$$

При $\alpha=1$ и $p=2$, отсюда вытекает результат [3].

Следствие 2. *Если в условиях теоремы 1 полагать* $\omega_i(t)=t^{\alpha_i}$ $(0<\alpha_i\le 1, i=\overline{1,m})$, *то имеем:*

$$\mathcal{E}_N\left(\mathfrak{M}_\rho^{\omega,p};H^{\,\alpha_1,\alpha_2\dots,\alpha_m}\right) = (2N)\int\limits_0^{L/(2N)}\omega\left(\left\{\sum_{i=1}^m t^{\alpha_i p}\right\}^{1/p}\right)dt. \tag{18}$$

В частности, полагая в (18) $\omega(t)=t$, *получаем*

$$\mathcal{E}_N\left(\mathfrak{M}_\rho^{1,p};H^{\,1,1,\dots,1}\right) = \frac{L^2\cdot\sqrt[p]{m}}{4N}.$$

Отметим, что утверждение теоремы 1 справедливо на более широких классах функций и кривых, чем классы $\mathfrak{M}_{2,\rho}^{\omega,p}$ и $H^{\,\omega_1,\dots,\omega_m}$. В самом деле, пусть $\mathfrak{M}_{2,\rho}^{\omega,p}$ – класс функций $f(\varphi_1(t),\cdots,\varphi_m(t))$, определённых на кривых $\Gamma\subset H^{\,\omega_1,\dots,\omega_m}$, удовлетворяющих для точек $t,t\pm\tau\in[0,L]$ условию

$$\Big|f\left(\varphi_1(t+\tau),\varphi_2(t+\tau),\cdots,\varphi_m(t+\tau)\right)+f\left(\varphi_1(t-\tau),\varphi_2(t-\tau),\cdots,\varphi_m(t-\tau)\right)-$$

$$-2f(\varphi_1(t),\varphi_2(t),\cdots,\varphi_m(t))\Big|\le 2\omega\left(\left\{\sum_{i=1}^{m}\omega_i^p(|t|)\right\}^{1/p}\right),\ 1\le p\le\infty. \tag{19}$$

Для квадратурной формулы, заданной векторами коэффициентов (14) и узлов (15), погрешность формулы представима в виде

$$R_N(f;\Gamma;P_0,T_0)=J(f,\Gamma)-L_N(f;\Gamma;P_0,T_0)=$$

$$=\sum_{k=1}^{N}\int\limits_{0}^{L/(2N)}\left[f(\varphi_1(\tau_k^0\pm\tau),\cdots,\varphi_m(\tau_k^0\pm\tau))-2f(\varphi_1(\tau_k^0),\cdots,\varphi_m(\tau_k^0)\right]d\tau. \tag{20}$$

Из соотношения (20) с учётом неравенства (19) следует оценка сверху

$$\mathcal{E}_N\left(\mathfrak{M}_{2,\rho}^{\omega,p};H^{\,\omega_1,\omega_2\dots,\omega_m}\right)\le R_N\left(\mathfrak{M}_{2,\rho}^{\omega,p};P^0,T^0\right)=2N\int\limits_{0}^{L/(2N)}\omega\left(\left\{\sum_{i=1}^{m}\omega_i^p(t)\right\}^{1/p}\right)dt,$$

а учитывая включение $\mathfrak{M}_{2,\rho}^{\omega,p}\supset\mathfrak{M}_{\rho}^{\omega,p}$, справедливое для любой кривой $\Gamma\subset H^{\,\omega_1,\dots,\omega_m}$, приходим к неравенству

$$\mathcal{E}_N\left(\mathfrak{M}_{2,\rho}^{\omega,p};H^{\,\omega_1,\omega_2\dots,\omega_m}\right)\ge R_N\left(\mathfrak{M}_{2,\rho}^{\omega,p};P^0,T^0\right)=2N\int\limits_{0}^{L/(2N)}\omega\left(\left\{\sum_{i=1}^{m}\omega_i^p(t)\right\}^{1/p}\right)dt.$$

Из двух последних неравенств получаем

$$\mathcal{E}_N\Big(\mathfrak{M}_{2,\rho}^{\omega,p};H^{\omega_1,\dots\omega_m}\Big)=\mathcal{E}_N\Big(\mathfrak{M}_{\rho}^{\omega,p};H^{\omega_1,\dots\omega_m}\Big)=2N\int\limits_{0}^{L/(2N)}\omega\left(\left\{\sum_{i=1}^{m}\omega_i^p(t)\right\}^{1/p}\right)dt.$$

Таким образом доказана следующая

Теорема 2. *Среди всех квадратурных формул вида (4) с произвольными векторами коэффициентов и узлов (P,T) наилучшей для классов $\mathfrak{M}_{\rho}^{\omega,p}$, $\mathfrak{M}_{2,\rho}^{\omega,p}$ и кривых $H^{\omega_1,\dots\omega_m}$ является формула средних прямоугольников (6). При этом для погрешности формулы (6) на указанных классах функций и кривых справедливо равенство*

$$\mathcal{E}_N\Big(\mathfrak{M}_{2,\rho}^{\omega,p};H^{\omega_1,\dots\omega_m}\Big)=\mathcal{E}_N\Big(\mathfrak{M}_{\rho}^{\omega,p};H^{\omega_1,\dots\omega_m}\Big), \tag{21}$$

где значение правой части равенства (21) определено в правой части соотношения (7).

СПИСОК ЦИТИРОВАННОЙ ЛИТЕРАТУРЫ

1. Никольский С.М. *Квадратурные формулы* // Изв. АН СССР, сер. матем., 1952, № 16, с. 181–196.
2. Вакарчук С.Б. *Оптимальная формула численного интегрирования криволинейного интеграла первого рода для некоторых классов функций и кривых* // Укр. матем. журнал, 1986, т.38, № 5, с.643-645.
3. Шабозов М.Ш., Мирпоччоев Ф.М. *Оптимизация приближённого интегрирования криволинейного интеграла первого рода для некоторых классов функций и кривых* // ДАН РТ, 2010, т.53, № 6, с.415-419.
4. Тухлиев К. *Наилучшие квадратурные формулы приближённого вычисления криволинейного интеграла первого рода для некоторых классов функций и кривых* // Известия Тульского госуниверситета. Естественные науки, 2013, вып.2, ч.1, с.50-57.
5. Тухлиев К. *Оптимальные квадратурные формулы приближенного вычисления криволинейного интеграла первого рода для некоторых классов функций и кривых* // Моделирование и анализ информационных систем, 2013, т.20, № 3, с.121-129.
6. Шабозов М.Ш. *О наилучших квадратурных формулах для вычисления криволинейных интегралов на некоторых классах функций и кривых* // Матем. заметки, 2014, т.96, № 7, с.637-640.
7. Корнейчук Н.П. *Точные константы в теории приближения* // М.: Наука, 1987, 424с.
8. Корнейчук Н.П. *Наилучшие кубатурные формулы для некоторых классов функций многих переменных* // Матем. заметки, 1968, т.3, № 5, с. 565–576.

REFERENCES

1. Nikol'skiy S.M. 1952, *"Quadrature formulas"*, Izv. AN USSR. Series mat., № 16, p. 181-196 (in Russian).
2. Vakarchuk S.B. 1986, *"Optimal formula for the numerical integration of curvilinear integral of the first kind for some classes of functions and curves"*, Ukr. mat. zhurnal, t.38, № 5, p. 643-645 (in Russian).
3. Shabozov M.Sh., Mirpochchoev F.M. 2010, *"Optimizing approximate integration of curvilinear integral of the first type for some classes functions and curves"*, DAN RT, v.53, № 6, p.415-419. (in Russian).
4. Tukhliev K. 2013, *"The best quadrature formulas for the approximate calculation of a curvilinear integral of the first kind for some classes of functions and curve"*, News of Tula State University. natural Sciences, issue. no 2, p.50-57 (in Russian).
5. Tukhliev K. 2013, *"Optimal quadrature formulas for the approximate calculation of a curvilinear integral of the first kind for some classes of functions and curve"*, Simulation and analysis of information systems, t.20, №3, p.121-129 (in Russian).
6. Shabozov M.Sh. 2014, *"About the best quadrature formulas for calculation of curvilinear integral in some classes functions and curves"*, Mat. Notes, v.96, № 7, pp.637-640 (in Russian).

7. Korneichuk N.P. 1987, *"Exact constant in theory approximations"*, M.: Nauka, 424 p. (in Russian).

8. Korneichuk N.P. 1968, *"Best cubature formulas for some classes of functions of many variables"*, Mat. Notes, vol. 3, № 5, pp. 565-576 (in Russian).

Получено 21.02.2020 г.
Принято в печать 22.10.2020 г.