K. L. Safin, E. V. Sukhanov, Iterative Algebras without Projections, *Algebra Logika*, 2003, Volume 42, Number 1, 107–122

Алгебра и логика, 42, № 1 (2003), 107—122

УДК 512.565.5

ОБ ИТЕРАТИВНЫХ АЛГЕБРАХ БЕЗ ПРОЕКЦИЙ

К. Л. САФИН, Е. В. СУХАНОВ

Введение

Совокупность всех итеративных алгебр (замкнутых классов функций k-значной логики) естественным образом разбивается на множество *клонов* (итеративных алгебр, содержащих проекции) и множество остальных алгебр, которые далее будем называть *алгебрами без проекций.* Ранее при изучении итеративных алгебр основное внимание уделялось клонам. Для этого есть несколько причин. Отметим некоторые из них.

Одной из первых проблем в теории итеративных алгебр была проблема полноты (см., напр., [1]). Ее решение тесно связано с поиском максимальных подалгебр в данной алгебре. Для алгебры всех функций И. Розенберг [2] получил полное описание множества ее максимальных подалгебр. Все они являются клонами. Можно показать, что либо все максимальные подалгебры клона являются клонами, либо этот клон имеет единственную максимальную подалгебру, являющуюся алгеброй без проекций.

П. Джевонс [3] заложил основы применения теории клонов в исследованиях, относящихся к анализу сложности алгоритмов. Здесь особую роль играют минимальные клоны и их классификация, данная в [4].

Как при изучении проблем полноты, так и в приложениях к анализу сложности алгоритмов, важную роль играет соответствие Галуа между итеративными алгебрами, с одной стороны, и некоторыми множествами пар отношений, с другой. Для клонов это соответствие выглядит значительно проще (вместо пар отношений достаточно рассматривать просто отношения). Поэтому вполне естественно, что первоначально это соответствие было построено для клонов [5, 6], и лишь затем обобщено на случай произвольных итеративных алгебр [7—9].

Клоны, возникающие во многих работах, получаются объединением некоторых алгебры без проекций и клона, в частности, простым добавлением к алгебре без проекций множества всех проекций [10—12]. Это можно объяснить тем, что многие условия, накладываемые на функции, приводят к алгебрам без проекций. Так, например, множество всех функций, чей образ содержится в некотором множестве, или множество всех функций, чей ранг не превосходит некоторого числа, являются итеративными алгебрами, но, за исключением тривиальных случаев, не могут содержать проекции.

Еще отметим, что значительную часть итеративных алгебр, определяемых через алгебраические понятия (напр., идеалы), составляют алгебры без проекций [13].

В силу вышесказанного итеративные алгебры без проекций достойны быть предметом отдельного изучения. Данная работа представляет собой попытку обозначить возможные направления и подходы в исследовании итеративных алгебр этого типа.

§ 1. Основные понятия и обозначения

Введем необходимые обозначения и определения. Далее X — конечное множество мощности k, P_X — множество всех функций нескольких переменных, определенных на X, значения которых также принадлежат X. Если F — подмножество в P_X, то $F^{(n)}$ — это n-й слой множества F, а именно: множество всех функций из F, зависящих в точности от n переменных.

С функциями из P_X можно производить различные преобразования: перестановки, отождествления, добавления фиктивных переменных, а также подстановки одних функций в другие. Подмножество A множества P_X

называется *итеративной алгеброй*, если оно замкнуто относительно всех вышеперечисленных преобразований. Формальное определение итеративной алгебры дано в [14]. Через $\langle F\rangle$ обозначается алгебра, порожденная множеством функций $F \subseteq P_X$.

Нам также потребуется определение *проекции*, т. е. функции вида $e_n^i(x_1,\ldots,x_n) = x_i$. Множество всех проекций образует итеративную алгебру, обозначаемую в дальнейшем через E_X. Если итеративная алгебра содержит проекции, ее называют *клоном*; в противном случае — *алгеброй без проекций*.

Множество всех итеративных алгебр на множестве X образует алгебраическую решетку, обозначим ее через $\mathfrak{L}_X$. В этой решетке клоны образуют интервал, обозначаемый в дальнейшем через $\mathfrak{L}_X^c$. Алгебры без проекций образуют в решетке $\mathfrak{L}_X$ порядковый идеал, который обозначим $\mathfrak{L}_X^{wp}$. Однако, как увидим в дальнейшем, $\mathfrak{L}_X^{wp}$ не является подрешеткой в $\mathfrak{L}_X$.

Объекты, в определении которых участвует основное множество X, будем обозначать символами с индексом X. Однако, в тех случаях, когда не важно, из каких элементов состоит X, а существенна лишь его мощность k, будем использовать в обозначениях индекс k. Таким образом, наряду с P_X, E_X, $\mathfrak{L}_X$ используются P_k, E_k, $\mathfrak{L}_k$.

Нам понадобится соответствие Галуа между итеративными алгебрами и объектами, которые будут введены далее. Перечислим операции над отношениями, появившимися в [5, 6]. Иногда обозначения операций совпадают с обозначениями операций итеративных алгебр, но это не приведет к неоднозначности толкования, поскольку всегда ясно, к какому объекту (функции или отношению) применяется операция.

1) Из всех операций перестановки координат отношения удобно оставить операцию циклической перестановки и операцию транспозиции, которые обозначим ζ и τ соответственно.

2) Из всех операций диагонализации удобно оставить диагонализацию по первой и второй координате, которую обозначим Δ.

3) Из всех операций проектирования оставим операцию вычеркивания первой координаты, которую обозначим pr.

4) Операцию декартова произведения, как обычно, обозначим $\times$.

5) Среди всех диагоналей (нульарных операций) оставим полное унарное отношение на множестве X, которое обозначим X.

Как показано в [5, 6], с помощью операций ζ, τ, Δ, pr, $\times$, X можно реализовать любые перестановки координат, диагонализации (отождествления координат), приписывания фиктивных координат, вычеркивания координат (проекции) и дублирования координат данного отношения, декартово произведение данных отношений, а также получить все диагонали из отношения X.

Перейдем к построению соответствия Галуа для итеративных алгебр и объектов, соответствующих итеративным алгебрам. Будем рассматривать пары отношений (R, R') одинаковой арности на множестве X такие, что $R \supseteq R'$. Множество всех данных пар обозначим R_X. Определим на нем операции ζ, τ, Δ, pr, $\times$ и X, действующие на парах отношений покомпонентно (нульарной операции X соответствует нульарная операция E — пара (X, X)). Нетрудно заметить, что перечисленные операции, определенные на отношениях, сохраняют включение, поэтому их действие на парах задано корректно. Кроме того, введем на множестве R_X отношение частичного порядка $\leq$ следующим образом: $(R, R') \leq (S, S') \Leftrightarrow R \subseteq S$ и $R' \supseteq S'$. Будем рассматривать систему $\langle R_X : \zeta, \tau, \Delta, pr, \times, E; \leq\rangle$.

Подмножество I множества R_X назовем *алгеброй пар отношений*, если

1) I — подалгебра алгебры $\langle R_X : \zeta, \tau, \Delta, pr, \times, E\rangle$;

2) I — порядковый идеал упорядоченного множества $\langle R_X :\leq\rangle$.

Будем считать известными понятия *R-матрицы типа n* и *образа R-матрицы типа n* при действии n-арной функции f (см. [5, 6]). Говорим, что функция f *сохраняет* пару (R, R'), если образ любой R-матрицы при действии функции f является набором из R'. Это отношение порождает соответствие Галуа. Замкнутые множества в P_X, отвечающие подмножествам $G \subseteq R_X$, обозначим $\mathrm{Pol}(G)$, а замкнутые множества в R_X, отвечающие подмножествам $F \subseteq P_X$, обозначим $\mathrm{Inv}(F)$ (см., напр., [4]). Справедливы [7—9] следующие утверждения:

1) подмножество $A \subseteq P_X$ замкнуто тогда и только тогда, когда оно является итеративной алгеброй;

2) подмножество $I \subseteq R_X$ замкнуто тогда и только тогда, когда оно является алгеброй пар отношений.

Рассмотрим пары вида (R, R). Пусть I — алгебра, состоящая лишь из пар такого вида. Отображение $(R, R) \mapsto R$ переводит I в некоторое множество отношений. Оно будет алгеброй отношений в смысле [5, 6]. Поэтому далее вместо $\mathrm{Pol}((R, R))$ используется $\mathrm{Pol}(R)$.

Для любой алгебры A множество всех ее одноместных функций $A^{(1)}$ является полугруппой преобразований на X. Пусть S — произвольная полугруппа преобразований на X. *Стабилизатор* полугруппы S — это множество $\mathrm{St}(S) = \{f \in P_X^{(n)} \mid n \in N$ и для любых $s_1, \ldots, s_n$ таких, что $s_i \in S$ или $s_i(x) = x$, выполняется $f(s_1(x), \ldots, s_n(x)) \in S\}$. Это понятие под названием *нормализатор* введено в [14]. Нетрудно проверить, что $\mathrm{St}(S)$ — итеративная алгебра, и что $\langle S \rangle \subseteq \mathrm{St}(S)$. Хорошо известно, что для любой итеративной алгебры A равенство $A^{(1)} = S$ выполняется тогда и только тогда, когда $\langle S \rangle \subseteq A \subseteq \mathrm{St}(S)$ (см., напр., [4, с. 74]).

§ 2. О множестве всех итеративных алгебр без проекций

Прежде чем переходить к изучению конкретных итеративных алгебр без проекций, рассмотрим свойства множества всех таких алгебр, как целого.

ПРЕДЛОЖЕНИЕ 1. 1) *Множество всех итеративных алгебр без проекций образует в решетке $\mathfrak{L}_X$ порядковый идеал, не являющийся подрешеткой.*

2) *Каждая алгебра без проекций содержится в некоторой максимальной алгебре без проекций.*

3) *Каждая максимальная алгебра без проекций имеет вид* $\mathrm{St}(S)$*, где S — полугруппа несюръективных преобразований на X.*

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. 1) Утверждение о том, что множество всех алгебр без проекций $\mathfrak{L}_X^{wp}$ образует в решетке $\mathfrak{L}_X$ порядковый идеал, является очевидным. Покажем, что $\mathfrak{L}_X^{wp}$ не является подрешеткой в $\mathfrak{L}_X$. Будем считать, что $X = \{0, 1, \dots, k-1\}$. Рассмотрим две алгебры $A = \mathrm{Pol}((\{0,1\}, \{0\}))$ и $B = \mathrm{Pol}((X, X \setminus \{1\}))$. Легко заметить, что ни A, ни B не могут содержать проекций, и поэтому $A, B \in \mathfrak{L}_X^{wp}$. Рассмотрим функции $f(x_1, x_2)$ и $g(x_1)$ такие, что

$$f(\{0,1\}, \{0,1\}) = \{0\},\ f(2,1) = 1 \text{ и } f(i,i) = i \text{ при } 2 \leqslant i \leqslant k-1,$$

$$g(0) = 0,\ g(1) = 2 \text{ и } g(i) = i \text{ при } 2 \leqslant i \leqslant k-1.$$

Ясно, что $f \in A$ и $g \in B$. Пусть теперь

$$h(x_1) = f(g(x_1), x_1) = \Delta(f * g) \in A \vee B.$$

Тогда

$$\begin{array}{lllllll} h(0) & = & f(g(0), 0) & = & f(0,0) & = & 0, \\ h(1) & = & f(g(1), 1) & = & f(2,1) & = & 1, \\ h(i) & = & f(g(i,i), i) & = & f(i,i) & = & i \text{ при } 2 \leqslant i \leqslant k-1, \end{array}$$

т. е. $h(x_1) = e_1^1$.

Таким образом, $A \vee B$ содержит проекцию и $A \vee B \notin \mathfrak{L}_X^{wp}$.

2) Следует из того, что множество $\mathfrak{L}_X^{wp}$, очевидно, удовлетворяет условию леммы Цорна.

3) Ясно, что алгебра A не содержит проекций тогда и только тогда, когда полугруппа $A^{(1)}$ не содержит тождественного преобразования. В силу замечания, сделанного в § 1, множество $\mathfrak{L}_X^{wp}$ является объединением интервалов вида $[\langle S\rangle, \mathrm{St}(S)]$, где S — полугруппа, не содержащая тождественного преобразования. Значит, максимальными алгебрами без проекций могут быть лишь алгебры вида $\mathrm{St}(S)$.

Рассмотрим теперь вопрос о том, насколько сложно устроено упорядоченное множество $\mathfrak{L}_X^{wp}$. Нетрудно понять, что, добавляя к каждой алгебре из $\mathfrak{L}_X^{wp}$ проекции, получаем вложение $\mathfrak{L}_X^{wp}$ в $\mathfrak{L}_X^c$. Таким образом, в решетке $\mathfrak{L}_X^c$ существует порядковый идеал, изоморфный $\mathfrak{L}_X^{wp}$. Следующее предложение говорит о том, что имеется также в некотором смысле обратное вложение.

ПРЕДЛОЖЕНИЕ 2. *В частично упорядоченном множестве $\mathfrak{L}_m^{wp}$ при $m > k$ существует интервал, изоморфный $\mathfrak{L}_k$ (а значит, существует также интервал, изоморфный $\mathfrak{L}_k^c$).*

Вначале сделаем одно замечание, которое понадобится в дальнейшем. Пусть $U \subseteq X$. Для каждой функции $f \in \mathrm{Pol}(U)$ можно рассматривать ее ограничение на U как функцию из P_U. Нетрудно понять, что отображение $|_U : \mathrm{Pol}(U) \to P_U$ является гомоморфизмом итеративных алгебр.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО предложения 2. Как и ранее, будем считать, что $X = \{0, 1, \ldots, k-1\}$. Рассмотрим m-элементное множество $Y = \{0, \ldots, m-1\} \supset X$ и его разбиение на k множеств $Y = \{0\} \cup \ldots \cup \{k-2\} \cup \cup \{k-1, \ldots, m-1\}$. Пусть β — соответствующее этому разбиению отношение эквивалентности, $\tilde{P}_m$ — множество функций $f \in \mathrm{Pol}(\beta)$ таких, что $\mathrm{Im} f \subseteq X$. Согласно замечанию, сделанному выше, отображение $|_X : \tilde{P}_m \to P_k$ является гомоморфизмом. Поскольку все функции из $\tilde{P}_m$ по определению сохраняют β, это отображение разнозначно; а поскольку пересечение множества X с каждым классом эквивалентности по β одноэлементно, то отображение сюръективно.

Итак, $|_X : \tilde{P}_m \to P_k$ — биекция, а значит, изоморфизм. Отсюда следует, что интервал $[\varnothing, \tilde{P}_m]$ в $\mathfrak{L}_m$ изоморфен интервалу $[\varnothing, P_k] = \mathfrak{L}_k$. Поскольку для каждой функции $f \in \tilde{P}_m$ выполняется равенство $\mathrm{Im} f = X \subset Y$, то $\tilde{P}_m$ не может содержать проекций, поэтому $\tilde{P}_m \in \mathfrak{L}_m^{wp}$. Предложение доказано.

Все сказанное выше означает, что задачи описания $\mathfrak{L}_m^{wp}$ и $\mathfrak{L}_k$ в некотором смысле одинаково сложны.

§ 3. Об итеративных алгебрах без проекций, не являющихся максимальными

Рассмотрим теперь конкретные алгебры без проекций. В силу предложения 1, интерес представляют прежде всего максимальные из таких алгебр. причем их можно полностью описать, указав полугруппы, стабилизаторы которых являются максимальными элементами в $\mathcal{L}_X^{wp}$. Рассмотрению вопросов, касающихся максимальных алгебр без проекций, и будет посвящена оставшаяся часть этой работы.

Как было отмечено во введении, перечисление всех максимальных подалгебр (предполных замкнутых классов) в P_X дает теорема Розенберга. Одним из естественных путей построения максимальных алгебр без проекций могла бы служить попытка рассмотрть аналоги максимальных подалгебр в P_X. Однако результаты, приводимые ниже, говорят о том, что связь между понятиями максимальной алгебры без проекций и максимальной подалгебры из P_X если и существует, то является достаточно нетривиальной.

Одним из наиболее естественных классов максимальных подалгебр в P_X является класс функций, монотонных относительно частичного порядка с наибольшим и наименьшим элементами на X. Ниже строятся алгебры без проекций, являющиеся аналогами алгебр монотонных функций, и в случае, когда $|X| = 3$, докажем, что они не являются максимальными алгебрами в $\mathcal{L}_X^{wp}$.

Пусть на X определен частичный порядок. Полугруппу несюръективных преобразований, монотонных относительно этого порядка, обозначим MT_X. Тогда $\mathrm{St}(MT_X)$ — алгебра без проекций, являющаяся аналогом алгебры всех функций, монотонных относительно рассматриваемого порядка на X. Через NS_X обозначается полугруппа всех несюръективных преобразований множества X.

ПРЕДЛОЖЕНИЕ 3. *Пусть трехэлементное множество* $X = \{0, 1, 2\}$ *упорядочено естественным образом. Тогда алгебра без проекций* $\mathrm{St}(MT_X)$ *не является максимальной.*

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Покажем сначала, что любая функция $f(x_1, \ldots, x_n) \in \mathrm{St}(MT_X)$ является монотонной. Пусть $\bar{a}$ и $\bar{b}$ — два n-местных набора таких, что $a_i \leq b_i$ при любом $i \in \{1, \ldots, n\}$. Рассмотрим функции $f_i(x)$ такие, что $f_i(0) = a_i$ и $f_i(1) = f_i(2) = b_i$.

Все f_i монотонны и не являются сюръективными, т. е. $f_i \in MT_X$. Тогда $g(x) = f(f_1(x), \ldots, f_n(x)) \in MT_X$, т. е. $g(x)$ монотонна. Отсюда

$g(0) \leq g(1)$; с другой стороны,

$$g(0) = f(f_1(0), \ldots, f_n(0)) = f(a_1, \ldots, a_n),$$
$$g(1) = f(f_1(1), \ldots, f_n(1)) = f(b_1, \ldots, b_n).$$

Таким образом, $\bar{a} \leq \bar{b} \Rightarrow f(\bar{a}) \leq f(\bar{b})$, и функция f монотонна.

Установим, что любая функция $f(x_1, \ldots, x_n) \in \mathrm{St}(MT_X)$ не является сюръективной. Тогда $\mathrm{St}(MT_X) \subseteq NS_X$ (поскольку легко привести пример немонотонной несюръективной функции, то это включение строгое).

Пусть $\bar{0} = (0, \ldots, 0)$ и $\bar{2} = (2, \ldots, 2)$. В силу монотонности функции f для любого n-местного набора $\bar{x}$ из того, что $\bar{0} \leq \bar{x} \leq \bar{2}$ получаем $f(\bar{0}) \leq \leq f(\bar{x}) \leq f(\bar{2})$. Поэтому, если $f(\bar{0}) > 0$ или $f(\bar{2}) < 2$, то $f \in NS_X$.

Осталось рассмотреть случай, когда $f(0) = 0$ и $f(2) = 2$. Этот случай разбивается на два.

1) Для любого n-местного набора $\bar{a}$ выполняется $f(\bar{a}) = 0$ или $f(\bar{a}) = 2$. Тогда образом функции f является множество $\{0, 2\}$, и f не будет сюръективной.

2) Найдется n-местный набор $\bar{a}$ такой, что $f(\bar{a}) = 1$. Докажем, что это невозможно. Действительно, рассмотрим функции $f_i(x)$, определенные следующим образом: $f_i(0) = 0$, $f_i(1) = a_i$ и $f_i(2) = 2$. Если $a_i = 0$ или $a_i = 2$, то f_i — монотонное несюръективное преобразование на множестве X, т. е. $f_i \in MT_X$, а если $a_i = 1$, то $f_i(x) = x$. Поскольку $f \in \mathrm{St}(MT_X)$, имеем $g(x) = f(f_1(x), \ldots, f_n(x)) \in MT_X$. Однако,

$$g(0) = f(f_1(0), \ldots, f_n(0)) = f(\bar{0}) = 0,$$
$$g(2) = f(f_1(2), \ldots, f_n(2)) = f(\bar{2}) = 2,$$
$$g(1) = f(f_1(1), \ldots, f_n(1)) = f(a_1, \ldots, a_n) = f(\bar{a}) = 1,$$

т. е. $g(x) = x$. Получили противоречие.

Таким образом, в любом случае функция f не является сюръективной, а следовательно, $\mathrm{St}(MT_X) \subset NS_X$.

§ 4. О максимальных итеративных алгебрах без проекций

Рассмотрим теперь класс алгебр, которые окажутся максимальными алгебрами без проекций. Если $\varnothing \neq U \subset X$, то множество функций, сохраняющих U, является максимальной подалгеброй в P_X. Построим соответствующую ей алгебру без проекций. Через S_X^U обозначается полугруппа, состоящая из всех несюръективных преобразований, сохраняющих U. Другими словами, $S_X^U = NS_X \cap (\mathrm{Pol}(U))^{(1)}$. Далее будем рассматривать алгебры вида $\mathrm{St}(S_X^U)$. Обозначим через $A_1(U)$ алгебру всех несюръективных функций, сохраняющих множество U ($A_1(U) = NS_X \cap \mathrm{Pol}(U)$), через $A_2(U)$ — алгебру всех функций, которые сохраняют U и ограничения которых на U не являются сюръективными ($A_2(U) = \{f \in \mathrm{Pol}(U) \mid f|_U \in \in NS_U\}$), через $A(U)$ — множество $A_1(U) \cup A_2(U)$.

ТЕОРЕМА. 1) *Если* $|U| > 1$, *то* $\mathrm{St}(S_X^U)$ *— максимальная алгебра без проекций и* $\mathrm{St}(S_X^U) = A(U)$.

2) *Если* $|U| = 1$, *то* $\mathrm{St}(S_X^U)$ *— алгебра без проекций, не являющаяся максимальной.*

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Покажем сначала, что множество $A(U)$ является алгеброй без проекций. Поскольку $A(U)$ является объединением двух алгебр, то $A(U)$ замкнуто относительно унарных операций. Значит, достаточно показать, что $A(U)$ замкнуто относительно операции $*$ суперпозиции функций. Пусть $f, g \in A(U)$. Рассмотрим следующие случаи:

$f, g \in A_1(U)$ или $f, g \in A_2(U)$; тогда $f * g \in A_1(U) \subseteq A(U)$ (поскольку $A_1(U)$ и $A_2(U)$ — алгебры);

$f \in A_1(U)$ и $g \in A_2(U)$; так как f и g сохраняют U, то $f * g$ сохраняет U; поскольку f не является сюръективной, то $f * g$ также не будет сюръективной; значит, $f * g \in A_1(U) \subseteq A(U)$;

$f \in A_2(U)$ и $g \in A_1(U)$; как было указано выше, $f * g$ сохраняет U; т. е. $(f * g)|_U = f|_U * g|_U$, и поскольку $f|_U$ не является сюръективной, $f|_U * g|_U$ также не будет сюръективной; значит, $f * g \in A_2(U) \subseteq A(U)$.

Итак, $A(U)$ — алгебра. Она не содержит проекций, поскольку их не содержат $A_1(U)$ и $A_2(U)$.

Далее план доказательства будет следующим. Сначала установим, что $A(U)$ — максимальная алгебра без проекций, если $|U| > 1$. Нетрудно понять, что $(A(U))^{(1)} = S_X^U$. Поскольку $\mathrm{St}(S_X^U)$ — максимальная алгебра с первым слоем, равным S_X^U, то $\mathrm{St}(S_X^U) \supseteq A(U)$, а значит, в силу максимальности $A(U)$, выполняется $\mathrm{St}(S_X^U) = A(U)$. Таким образом, первое утверждение теоремы будет доказано. Затем мы докажем второе, используя для этого соответствие Галуа, описанное в § 1.

Для доказательства нам потребуется несколько измененная и дополненная по формулировке лемма, которая в [1, с. 57] была названа "основной".

ЛЕММА. *Пусть* $f(x_1, \ldots, x_n)$ — *функция, принимающая не менее* l *значений.*

1) *Если* $l \geqslant 3$, *то найдется* n *подмножеств* $X_1, \ldots, X_n \subseteq X$ *таких, что на множестве* $X_1 \times \ldots \times X_n$ *функция* f *принимает* l *значений и выполняется одно из следующих условий*:

а) $1 \leqslant |X_i| < l$ *при любом* $i \in \{1, \ldots, n\}$;

б) *существует* $j \in \{1, \ldots, n\}$ *такое, что* $|X_j| = l$ *и при любом* $i \neq j$ *выполняется* $|X_i| = 1$.

2) *Если* $l = 2$, *то выполняется условие* "б".

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. 1) Если f существенно зависит хотя бы от двух своих переменных (f — существенная функция, см. [1]), то формулировка леммы совпадает с [1, лемма 4, с. 57].

Пусть f существенно зависит только от одной из своих переменных x_j. Выберем произвольно элементы $a_i \in X$ $(i \neq j)$. Тогда функция $f(x_1, \ldots, x_n) = f(a_1, \ldots, a_{j-1}, x_j, a_{j+1}, \ldots, a_n)$ принимает l значений, поэтому найдутся элементы $a_j^1, \ldots, a_j^l \in X$ такие, что $f(a_1, \ldots, a_{j-1}, a_j^s, a_{j+1}, \ldots, a_n)$ — l различных значений функции f. Положив $X_i = \{a_i\}$ при $i \neq j$ и $X_j = \{a_j^s \mid s \in \{1, \ldots, l\}\}$, получаем требуемое.

2) Согласно условию, имеются два набора $\bar{a}$ и $\bar{b}$ такие, что $f(\bar{a}) \neq f(\bar{b})$. Если $\bar{a}$ и $\bar{b}$ отличаются только в одной позиции ($a_j \neq b_j$ при некотором j, и $a_i = b_i$ при $i \neq j$), то утверждение леммы выполняется ($X_j = \{a_j, b_j\}$, $X_i = a_i$). Пусть $\bar{a}$ и $\bar{b}$ отличаются в s позициях $(s > 1)$. Построим наборы

$\bar{a}'$ и $\bar{b}'$, которые отличаются не более чем в $s-1$ позиции. Пусть $\bar{a}$ и $\bar{b}$ отличаются в позиции j. Рассмотрим набор $\bar{c}$ такой, что $c_i = a_i$ при $i \neq j$ и $c_j = b_j$. Он отличается от $\bar{a}$ в одной позиции и от $\bar{b}$ — в $s-1$ позиции. Ясно, что $f(\bar{a}) \neq f(\bar{c})$ или $f(\bar{b}) \neq f(\bar{c})$. Если $f(\bar{a}) \neq f(\bar{c})$, то положим $\bar{a}' = \bar{a}$ и $\bar{b}' = \bar{c}$, а если $f(\bar{b}) \neq f(\bar{c})$, то положим $\bar{a}' = \bar{c}$ и $\bar{b}' = \bar{b}$. Тогда $f(\bar{a}') \neq f(\bar{b}')$.

Применяя этот переход достаточное число раз, в итоге получим наборы, отличающиеся в одной позиции, на которых f принимает разные значения. Лемма доказана.

Перейдем теперь к доказательству того, что $A(U)$ — максимальная алгебра без проекций. Пусть $f \notin A(U)$. Требуется доказать, что алгебра $\langle A(U) \cup \{f\} \rangle$ содержит перестановку. Рассмотрим два возможных случая.

1) Функция $f(x_1, \ldots, x_n)$ не сохраняет множество U. Значит, найдутся элементы $u_1, \ldots, u_n \in U$ такие, что $v = f(u_1, \ldots, u_n) \notin U$. Рассмотрим $u_1, \ldots, u_n$ и v как постоянные функции. Тогда $u_1, \ldots, u_n \in A(U)$, поэтому $v \in \langle A(U) \cup \{f\} \rangle$. Положим

$$g(x_1, x_2) = \begin{cases} u, & \text{если } x_2 \neq v, \\ x_1 & \text{в противном случае,} \end{cases}$$

где u — произвольный элемент из U. Если $x_1, x_2 \in U$, то $g(x_1, x_2) = u$, т. е. g не является сюръективной на U, следовательно, $g \in A(U)$. Тогда $x_1 = g(x_1, v) \in \langle A(U) \cup \{f\} \rangle$, т. е. $\langle A(U) \cup \{f\} \rangle$ содержит проекцию x_1.

2) Функция $f(x_1, \ldots, x_n)$ сохраняет множество U. Поскольку $f \notin A(U)$, то f сюръективна на X и $f|_U$ сюръективна на U. Пусть $|U| = l$. Применим лемму к функции $f|_U$, пусть множества $U_1, \ldots, U_n \subseteq U$, удовлетворяют условию леммы. Будем считать, что $U = \{u_1, \ldots, u_n\}$ и $X \setminus U = \{a_1, \ldots, a_{k-l}\}$. По лемме функция f на множестве $U_1 \times \ldots \times U_n$ принимает все значения из U. Рассмотрим наборы $\bar{u}^1, \ldots, \bar{u}^l \in U_1 \times \ldots \times U_n$ такие, что $f(\bar{u}^i) = u_i$, где $i \in \{1, \ldots, l\}$. Так как f сюръективна на X, можно выбрать наборы $\bar{a}^1, \ldots, \bar{a}^{k-l}$, на которых f принимает оставшиеся значения $a_1, \ldots, a_{k-l}$ (т. е. $f(\bar{a}^i) = a_i$ при $i \in \{1, \ldots, k-l\}$). Возможны два варианта.

а) Пусть $1 \leqslant |U_i| < l$ при любом $i \in \{1, \ldots, n\}$. Построим функции

$f_i(x)$ такие, что $f_i(u_j) = u_i^j$ и $f_i(a_j) = a_i^j$. Рассматривая функцию $g(x) = f(f_1(x), \ldots, f_n(x))$, получаем:

$$g(u_i) = f(f_1(u_i), \ldots, f_n(u_i)) = f(u_1^i, \ldots, u_n^i) = f(\bar{u}^i) = u_i,$$
$$g(a_i) = f(f_1(a_i), \ldots, f_n(a_i)) = f(a_1^i, \ldots, a_n^i) = f(\bar{a}^i) = a_i,$$

т. е. $g(x) = x$. Поскольку $f_i(U) = \{u_i^1, \ldots, u_i^l\} \subseteq U_i \subset U$, то $f_i(x)$ не будет сюръективной на U, а значит, $g(x) \in \langle A(U) \cup \{f\}\rangle$.

б) Пусть $|U_j| = l = |U|$ и $|U_i| = 1$ при $i \neq j$. Если $\{a_j^1, \ldots, a_j^{k-l}\} \cap U \neq \varnothing$, то $\{u_j^1, \ldots, u_j^l, a_j^1, \ldots, a_j^{k-l}\} \subset X$. Построим функции $f_i(x)$ так же, как в п. "а". При $i \neq j$ имеем $|f_i(U)| = |U_i| = 1$, т. е. $f_i(x)$ не является сюръективной на U, а значит, $f_i(x) \in A(U)$. Тогда

$$f_j(X) = \{u_j^1, \ldots, u_j^l, a_j^1, \ldots, a_j^{k-l}\} \subset X,$$

т. е. $f_j(x)$ не будет сюръективной. Как в п. "а", получаем $x = g(x) \in \langle A(U) \cup \{f\}\rangle$.

Наконец, остается единственная возможность $\{a_j^1, \ldots, a_j^{k-l}\} \cap U = \varnothing$, тогда $\{a_j^1, \ldots, a_j^{k-l}\} = X \setminus U$. Кроме того, $|U_j| = |U|$, и поэтому $\{u_j^1, \ldots, u_j^l\} = U$. Из равенства этих множеств вытекает, что имеется взаимно-однозначное соответствие $\phi : X \longrightarrow \{\bar{u}^1, \ldots, \bar{u}^l, \bar{a}^1, \ldots, \bar{a}^{k-l}\}$, определенное следующим образом: набор $\phi(x)$ содержит элемент x в j-й позиции. Из определения ϕ, в частности, следует, что $\phi(U) = \{\bar{u}^1, \ldots, \bar{u}^l\}$ и $\phi(X \setminus U) = \{\bar{a}^1, \ldots, \bar{a}^{k-l}\}$.

При $i \neq j$ положим $f_i(x) = \phi(x)^i$ — i-я компонента набора $\phi(x)$. Покольку $f_i(U) = U_i$, то $f_i(x)$ не является сюръективной на U, т. е. $f_i \in A(U)$. Положим также $f_j(x) = x = \phi(x)^j$. Рассмотрим функцию:

$$g(x) = f(f_1(x), \ldots, f_n(x)) = f(\phi(x)^1, \ldots, \phi(x)^n) = f(\phi(x)).$$

Когда x пробегает все элементы из U, $\phi(x)$ пробегает все элементы из $\{\bar{u}_j^1, \ldots, \bar{u}_j^l\}$, значит, $g(U) = U$. Аналогично, когда x пробегает все элементы из $X \setminus U$, набор $\phi(x)$ пробегает все элементы из $\{\bar{a}_j^1, \ldots, \bar{a}_j^{k-l}\}$; тогда $g(X \setminus U) = X \setminus U$. Таким образом, $g(X) = X$ (g — перестановка на X), и $g \in \langle A(U) \cup \{f\}\rangle$.

Итак, $A(U)$ — максимальная алгебра без проекций. Как было сказанно выше, это доказывает первое утверждение теоремы.

Докажем второе утверждение. Для этого укажем на связь, которая существует между понятиями стабилизатора и пары отношений. Зафиксируем на множестве X какой-нибудь линейный порядок. Расположив элементы из X в этом порядке, получим набор e арности k. Пусть S — полугруппа преобразований на X. Рассмотрим пару отношений (R, R'), где $R' = \{f(e) \mid f \in S\}$, а $R = R' \cup \{e\}$. Тогда $\mathrm{St}(S) = \mathrm{Pol}(R, R')$.

Для алгебры $\mathrm{St}(S_X^{\{u\}})$ необходимо построить алгебру без проекций, строго ее содержащую. Пусть (R, R') — пара отношений, соответствующая полугруппе $S_X^{\{u\}}$ как в предыдущем абзаце. Можно считать: X упорядочено так, что в наборе e на первом месте стоит элемент u. Тогда во всех наборах из R на первом месте также стоит u. Положим $(T, T') = pr(R, R')$ (напомним, что операция pr вычеркивает первую компоненту из всех наборов в R и в R'). Ясно, что $pr(e) \in T \setminus T'$ (если $pr(e) \in T'$, то $e \in R'$ и $S_X^{\{u\}}$ содержит тождественное преобразование). Поэтому $T \supset T'$, и $\mathrm{Pol}(T, T')$ — алгебра без проекций. Докажем, что $\mathrm{Pol}(T, T') \supset \mathrm{Pol}(R, R') = \mathrm{St}(S_X^{\{u\}})$. Применяя уже построенное соответствие Галуа, получаем, что требуется доказать включение $\langle (T, T') \rangle \subset \langle (R, R') \rangle$ (здесь $\langle (T, T') \rangle$ и $\langle (R, R') \rangle$ — алгебры пар отношений, порожденные парами (T, T') и (R, R') соответственно). Очевидно, $\langle (T, T') \rangle \subseteq \langle (R, R') \rangle$. Докажем, что $\langle (T, T') \rangle \neq \langle (R, R') \rangle$.

Пусть $\langle (T, T') \rangle = \langle (R, R') \rangle$. Из пары (R, R') применением операций проектирования (вычеркиванием из наборов в R и R' всех компонент, кроме первой), можно получить пару $(\{u\}, \{u\})$, т. е. $(\{u\}, \{u\}) \in \langle (T, T') \rangle$. Приведем это к противоречию, показав, что для любой пары (Q, Q') из $\langle (T, T') \rangle$ в отношении Q' есть все наборы вида $(a, a, \ldots, a)$, где $a \in X$. Тогда во втором отношении пары $(\{u\}, \{u\})$ помимо элемента u должен содержаться любой элемент $a \in X$.

Поскольку наборы вида $(u, a, a, \ldots, a)$ находятся в R' (преобразования f, соответствующие этим наборам, не будут сюръективны и сохраняют u, т. е. $f \in S_X^{\{u\}}$), наборы $(a, a, \ldots, a) = pr(u, a, a, \ldots, a)$ содержатся в T'. Пусть пара (Q, Q') удовлетворяет требуемому условию. Тогда $\zeta(Q, Q')$,

$\tau(Q,Q')$, $\Delta(Q,Q')$, $pr(Q,Q')$ и E также удовлетворяют этому условию (операции ζ,τ,Δ,pr переводят наборы с одинаковыми компонентами в наборы такого же вида, а пара E удовлетворяет этому условию по определению). Пусть (Q,Q') и (V,V') таковы, что Q' и V' содержат требуемые наборы. Тогда $Q'\times V'$ также содержит все такие наборы (они получаются приписыванием к наборам из Q' соответствующих наборов из V'). Пусть, наконец, $(V,V') \le (Q,Q')$ и Q' содержит все требуемые наборы. Тогда V' также обладает этим свойством, поскольку $V' \supseteq Q'$.

Итак, любая пара из $\langle(T,T')\rangle$ содержит все наборы требуемого вида. Полученное противоречие показывает, что $\langle(T,T')\rangle \subset \langle(R,R')\rangle$. Значит, $\mathrm{Pol}(T,T') \supseteq \mathrm{Pol}(R,R') = \mathrm{St}(S_X^{\{u\}})$, и второе утверждение теоремы, а тем самым и теорема доказаны.

ЛИТЕРАТУРА

1. *С. В. Яблонский*, Введение в дискретную математику, изд. 2-е, перераб. и доп., М., Наука, 1986.
2. *I. G. Rosenberg*, Über die funktionale Vollständigkeit in den mehrwertigen Logiken (Struktur der Funktionen von mehreren Veränderlichen auf endlichen Mengen), Rozpr. Česk. Akad. Věd. Řada Mat. Přír. Věd., **80** (1970), 3—93.
3. *P. Jeavons*, On the algebraic structure of combinatorial problems, Theor. Comp. Sci., **200**, N 1-2 (1998), 185—204.
4. *Á. Szendrei*, Clones in universal algebra (Sémin. Math. Supér., **99**), Les Presses de l'Université de Montreal, 1986.
5. *В. Г. Боднарчук, Л. А. Калужнин, В. Н. Котов, Б. А. Ромов*, Теория Галуа для итеративных алгебр Поста. I, Кибернетика, 1969, N 3, 1—10.
6. *В. Г. Боднарчук, Л. А. Калужнин, В. Н. Котов, Б. А. Ромов*, Теория Галуа для итеративных алгебр Поста. II, Кибернетика, 1969, N 5, 1—9.
7. *W. Harnau*, Ein verallgemeinerter Relationenbegriff für die Algebra der mehrwertigen Logik, Teil I (Grundlagen), Rostocker Math. Kolloq., **28** (1985), 5—17.
8. *W. Harnau*, Ein verallgemeinerter Relationenbegriff für die Algebra der mehrwertigen Logik, Teil II (Relationenpaare), Rostocker Math. Kolloq., **31** (1987), 11—20.

9. *W. Harnau*, Ein verallgemeinerter Relationenbegriff für die Algebra der mehrwertigen Logik, Teil III (Beweis), Rostocker Math. Kolloq., **32** (1987), 15—24.
10. *A. A. Bulatov*, On the semigroup property of clones, in: Int. conf. "Semigroups and their applications, including semigroup rings" in honour of E.S.Ljapin, St. Petersburg, Russia, 1995, 8—9.
11. *J. Slupecki*, Kriterium pelnosci wielowar, tosciowych systemow logiki zdan, C. R. Séances Soc. Sci. et Lettr. Varsovie, Cl. III, **32** (1939), 102—128.
12. *Г. А. Бурле*, Классы k-значной логики, содержащие все функции одной переменной, Дискр. ан., **10** (1967), 3—7.
13. *К. Л. Сафин*, Идеалы итеративных алгебр, Сиб. матем. ж., **36**, N 6 (1995), 1384—1391.
14. *А. И. Мальцев*, Итеративные алгебры Поста, Новосибирск, 1976.

Поступило 26 января 2001 г.
Окончательный вариант 10 сентября 2002 г.

Адреса авторов:

САФИН Константин Леонидович,
РОССИЯ,
620083, г. Екатеринбург,
пр. Ленина, 51,
Уральский гос. университет,
кафедра алгебры
и дискретной математики.
Тел.: (3432) 55-75-79,
e-mail: klsafin@emts.ru

СУХАНОВ Евгений Витальевич,
РОССИЯ,
620083, г. Екатеринбург,
пр. Ленина, 51,
Уральский гос. университет,
кафедра алгебры
и дискретной математики.
Тел.: (3432) 55-75-79,
e-mail: evgeny.sukhanov@usu.ru