E. G. Emel'yanov, A class of functions that are univalent in an annulus,
Zap. Nauchn. Sem. LOMI, 1985, Volume 144, 83–93

Е.Г.Емельянов

ОБ ОДНОМ КЛАССЕ ФУНКЦИЙ, ОДНОЛИСТНЫХ В КОЛЬЦЕ

I°. В настоящей работе рассматривается класс F_1 функций $f(z)$, регулярных и однолистных в кольце $\mathcal{K}=\{z : \rho<|z|<1\}, \rho>0$, отображающих $\mathcal{K}$ в круг $\Delta=\{|w|<1\}$ и удовлетворяющих условиям: $|f(z)|=1$ для $|z|=1$, $f(z)\neq 0$ для $z\in\mathcal{K}$, $f(1)=1$.

Класс функций F, определенных только первыми двумя условиями, изучался впервые Гретшем, определившим максимум и минимум $|f(z)|$ в классе F при фиксированном $|z|=r$ [I], наибольший диаметр множества $\Gamma_f=\Delta\setminus f(\mathcal{K})$ [2], и решившим ряд других задач методом полос. Очевидно, перечисленные результаты сохраняются и для класса F_1. Известен также ряд результатов в классе F_1, в которых условие $f(1)=1$ является существенным. В большинстве случаев они были получены с помощью вариационных формул, данных в работе П.Дюрена и М.Шиффера [3](см., например, [4,5]).

Данная работа посвящена определению множества значений $\mathcal{D}(A)=\{f(A) : f\in F_1\}$ в фиксированной точке $A\in\mathcal{K}$. В работе используется вариационная формула Дюрена-Шиффера и некоторые результаты из теории модулей семейств кривых.

2°. Установим предварительно некоторые результаты, используемые в дальнейшем. Следующая лемма дает критерий, при выполнении которого граница данной области представляет собой гладкую кривую.

ЛЕММА I. Пусть L – жорданова кривая, ограничивающая конечную область $\mathcal{D}$, обладающую следующим свойством: для всякой точки $a\in L$ существует гладкая кривая ℓ_a, $a\in\ell_a$, которая разбивает окрестность $\Delta_h(a)=\{|w-a|<h\}$ на две односвязные области $\Delta_h^+(a)$ и $\Delta_h^-(a)$, причем $\mathcal{D}\cap\Delta_h(a)\subset\Delta_h^+(a)$ ($h>0$ – фиксировано и не зависит от a). Пусть направление нормали к ℓ_a в точке a, внешней по отношению к $\Delta_h^+(a)$, определяется вектором $e^{i\varphi}$, где $\varphi=\varphi(a)$ – непрерывная функция от a. Тогда L – гладкая кривая, касающаяся ℓ_a в точке a.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Фиксируем $\varepsilon>0$. Для $a\in L$ обозначим через N_a полупрямую $w=a+te^{i\varphi(a)}$, $t\geqslant 0$.

I) Покажем, что существует $\delta>0$ такое, что для любого $a\in L$ $\operatorname{dist}(a, \overline{\mathcal{D}}\cap(N_a\setminus\{a\}))\geqslant\delta$ Действительно, в противном случае можно выбрать последовательность точек $\{a_n\}$, $a_n \in L$, $a_n \to a$, такую, что для каждого $n = 1, 2, \ldots$ имеется $\delta_n > 0$, $b_n = a_n + \delta_n e^{i\varphi(a_n)} \in \overline{\mathcal{D}}$ и $\delta_n \to 0$. Очевидно, $b_n \to a$. Для фиксированного n рассмотрим область, ограниченную дугой L, проходимой от a_n к b_n в положительном направлении, и отрезком $J = \{w = a_n + te^{i\varphi(a_n)},\ 0 \leqslant t \leqslant \delta_n\}$. Легко видеть, что эта область принадлежит дополнению $\mathcal{D}^c$ области $\mathcal{D}$. Из условия леммы следует, что найдется $\rho = \rho(b_n, \varepsilon)$ такое, что

$$\overline{\mathcal{D}^c} \cap \Delta_\rho(b_n) \subset \left\{w : \left|\arg\left((w-b_n)e^{-i\varphi(b_n)}\right)\right| \leqslant \frac{\pi-\varepsilon}{2}\right\}.$$

Поскольку $J \subset \overline{\mathcal{D}}^c$, то $|\varphi(b_n) - \varphi(a_n)| > \pi/2$. Полагая $n \to \infty$, получим противоречие с непрерывностью $\varphi(a)$. Из доказательства следует, что выполняется условие:

если $r \leqslant \min\{h/2, \delta/2\}$, a, a_1, a_2 – точки L, $a_1, a_2 \in \Delta_r(a)$, то $a_1 \notin Na_2$ (I)

2) Пусть $a = a(\psi)$ – непрерывная параметризация кривой L, $\psi \in I = [0, 2\pi]$, $a(2\pi) = a(0)$, такая, что при возрастании ψ точка $a(\psi)$ движется по L в положительном направлении, $L(\alpha, \beta) = \{a(\psi) : \alpha < \psi < \beta\}$. Пусть $\psi_0 \in I$, $a_0 = a(\psi_0)$, $\varphi_0 = \varphi(a_0)$. Тогда найдутся $\psi', \psi'' \in I$, $\psi' < \psi_0 < \psi''$, такие, что $|a(\psi') - a_0| = |a(\psi'') - a_0| = \rho$, $L(\psi', \psi'') \subset \Delta_\rho(a_0)$, $\rho \leqslant \min\{r, \rho(a_0, \varepsilon)\}$, и выполняется условие

$$|\varphi(a(\psi)) - \varphi_0| < \frac{\varepsilon}{2} \quad \text{при} \quad \psi' < \psi < \psi''. \tag{2}$$

Положим $V_\varepsilon(a) = \{w : |\arg((w-a)e^{-i\varphi_0})| \leqslant \pi/2 - \varepsilon\}$, $S = \{|w - a_0| = \rho\}$.

Введем в окрестности точки a_0 координаты x, y, полагая $x(w) = \operatorname{Im}((w-a_0)e^{-i\varphi_0})$, $y(w) = -\operatorname{Re}((w-a_0)e^{-i\varphi_0})$.

Будем обозначать $x(a(\psi))$, $y(a(\psi))$ также через $x(\psi)$, $y(\psi)$.

Из условия леммы и неравенства (2) следует, что для всякой точки $a \in L$ существует $\rho = \rho(a, \varepsilon)$ такое, что

$$\overline{\mathcal{D}} \cap \Delta_\rho(a) \subset \Delta_\rho(a) \setminus V_\varepsilon(a). \tag{3}$$

3) Покажем, что $x(\psi') < 0$ и $x(\psi'') > 0$. Докажем первое неравенство. Допустим противное. Пусть $x(\tilde{\psi}) = \sup\{x(\psi) : \psi' \leqslant \psi \leqslant \psi_0\}$

$\psi' \leqslant \tilde{\psi} \leqslant \psi_0$. Кривая $L(\psi', \psi_0)$, отрезок N_{a_0} от точки a_0 до точки A пересечения N_{a_0} с окружностью S и дуга S_1 этой окружности, проходимая от точки A до точки $a(\psi')$ в положительном направлении, ограничивают область V. Кривая $L(\psi_0, \psi'')$ не может пересечь границу этой области. Из соображений ориентации ясно, что $L(\psi_0, \psi'') \subset V$. Поэтому $x(\psi'') > 0$. Если для какой-нибудь точки $a \in L(\psi', \psi_0)$ луч N_a не пересекает окружность S, или пересекает дугу S_1, то при $\psi \nearrow \psi_0$ получим противоречие с непрерывностью $\varphi(a)$, так как N_a не сможет пройти через точку $a(\psi'')$. Если для какой-нибудь точки $a \in L(\psi', \psi_0)$ луч N_a пересекает отрезок $[a_0, A]$ или дугу $S_2 \subset S_1$ с концами A и $a(\psi'')$, то получим противоречие с (I). Отсюда следует, что луч $N_a(\psi'')$ пересекает ось X в точке с отрицательной абсциссой, и, значит, это же верно для всякой N_a, если $a \in L(\psi', \psi_0)$. Из (I) и определения $\tilde{\psi}$ находим

$$L(\tilde{\psi}, \psi_0) \subset \{w : \varphi_0 - \varepsilon < \arg(w - a(\tilde{\psi})) < \varphi_0\},$$

что противоречит (3). Неравенство $x(\psi'') > 0$ доказывается аналогичным образом.

4) Покажем теперь, что $x(\psi) < 0$ для $\psi' \leqslant \psi < \psi_0$ и $x(\psi) > 0$ для $\psi_0 < \psi \leqslant \psi''$. Действительно, пусть $x(\tilde{\psi}) = 0$ и $x(\psi) < 0$ для $\psi' \leqslant \psi < \tilde{\psi}$. Тогда $y(\tilde{\psi}) > 0$ и луч $N_a(\tilde{\psi})$ пересекает ось X. Если предположить, что абсцисса точки пересечения отрицательна, то, повторяя рассуждение из 3), приходим к противоречию. Если же предположить, что она положительна, то с помощью (I) легко получаем $x(\psi'') < 0$, что противоречит 3). Второе утверждение доказывается симметрично.

5) Наконец, покажем, что функция $x(\psi)$ не убывает при $\psi' < \psi < \psi''$. Пусть сначала $\psi' < \psi < \psi_0$. Рассмотрим непрерывную функцию $\mathfrak{X}(\psi) = \sup\{x(h) : \psi' \leqslant h \leqslant \psi\}$. Если доказываемое утверждение неверно, то найдутся ψ_1, ψ_2, $\psi' < \psi_1 < \psi_2 < \psi_0$, такие, что $\bar{x} = x(\psi_1) = x(\psi_2) = \mathfrak{X}(\psi_1)$, $x(\psi) < \bar{x}$ для $\psi_1 < \psi < \psi_2$. Пусть $x(\tilde{\psi}) = \inf\{x(\psi) : \psi_1 \leqslant \psi \leqslant \psi_2\}$, $\tilde{\psi} \in (\psi_1, \psi_2)$. Кривая $L(\psi', \psi_1)$, отрезок $N_a(\psi_1)$ от точки $a(\psi_1)$ до точки B пересечения $N_a(\psi_1)$ с окружностью S и дуга S_3 этой окружности, проходимая от B к $a(\psi')$ в отрицательном направлении, ограничивают область U. Если $a_0 \in U$, то луч $N_a(\psi_1)$ пересекает ось X в точке с положительной абсциссой. Отсюда с помощью (I) легко получим, что $x(\psi'') < 0$, что противоречит 3).

Следовательно, $a_0 \notin U$ и потому

$$L(\psi_1, \psi_0) \subset \Delta \setminus \overline{U} .$$

Из (I) и определения точки $\widetilde{\psi}$ тогда получаем

$L(\psi_1, \widetilde{\psi}) \subset \{w : \varphi_0 < \arg(w - a(\widetilde{\psi})) < \varphi_0 + \varepsilon\}$, что противоречит (3). Случай $\psi_0 < \psi < \psi''$ рассматривается аналогично.

6) Поскольку функция $x(\psi)$ не может быть постоянной ни на каком промежутке $[\psi_1, \psi_2]$, то в круге $\Delta_\rho(a_0)$ кривая $L(\psi', \psi'')$ допускает представление $y = y(x)$. Из (3) следует, что $|y(\psi)/x(\psi)| < \operatorname{tg} \varepsilon$. Выбрав последовательность $\{\varepsilon_n\}$, $\varepsilon_n \searrow 0$, получим

$$\left| \frac{y(\psi)}{x(\psi)} \right| < \operatorname{tg} \varepsilon_n \quad \text{при } a(\psi) \in \Delta_{\rho_n}(a_0),\ \rho_n = \rho_n(a_0, \varepsilon). \tag{4}$$

Из (4) следует, что существует $y'(0) = 0$. Произвольность точки $a_0 \in L$ и непрерывность $\varphi(a)$ означают справедливость леммы.

3^0. Ниже потребуются следующие леммы, показывающие, что в структуре траекторий соответствующих квадратичных дифференциалов отсутствуют плотностные области.

ЛЕММА 2. Пусть $0 < |a| < 1$, $0 \leqslant \theta < 2\pi$. Дополнение объединения множества Φ_1 всех критических траекторий квадратичного дифференциала

$$Q(a, \theta, w)\, dw^2 = \frac{e^{-i\theta}(w - e^{2i\theta})\, dw^2}{w(w-1)(w-a)(1-\bar{a}w)} \tag{5}$$

и точек $a, 1/\bar{a}, 1, 0, \infty$ и $e^{2i\theta}$ до замкнутой плоскости $\overline{\mathbb{C}}$ представляет собой или объединение двух кольцевых областей $\mathcal{D}_1$ и $\mathcal{D}_2$, или одну кольцевую область $\mathcal{D}$ (в частности, $\hat{\Phi}_1 = \emptyset$).

ЛЕММА 3. Пусть $\rho < |A| < 1$, $0 \leqslant \psi < \pi$. Пусть $H_\psi(z) z^{-2} dz^2$ — положительный квадратичный дифференциал в кольце $\widetilde{\mathcal{K}} = \{\rho < |z| < \rho^{-1}\}$ имеющий в $\widetilde{\mathcal{K}}$ простые полюсы в точках $A, 1/\bar{A}$ и 1, простой нуль в точке $e^{2i\psi}$ и двойные граничные нули в точках $\rho e^{i\eta}$ и $\rho^{-1} e^{i\eta}$:

$$H_\psi(z) \frac{dz^2}{z^2} = C\, \frac{\tau(z, e^{2i\psi})\, \tau(z, \rho e^{i\eta})\, \tau(z, \rho^{-1} e^{i\eta})}{\tau(z, A)\, \tau(z, 1/\bar{A})\, \tau(z, 1)} \frac{dz^2}{z^2}, \tag{6}$$

где $C > 0$, $\tau(z, u) = \vartheta_1\left(\frac{1}{2\pi i} \log \frac{z}{u}\right)$, $\vartheta_1 = \vartheta_1(v|\tau)$ —

— эллиптическая функция с периодами I и τ, $\tau = i/\pi \log 1/\rho$ и для нулей и полюсов $H_\psi(z)z^{-2}dz^2$ выполнено одно из двух соотношений:

$$\eta = \arg A - \psi + \pi \quad \text{или} \quad \eta = \arg A - \psi. \qquad (7)$$

Тогда дополнение объединения множества Φ_2 всех критических траекторий такого дифференциала и точек A, $1/\bar{A}$, 1 и $e^{2i\psi}$ до кольца $\mathcal{K}$ представляет собой или объединение двух кольцевых областей Ω_1, Ω_2, или одну кольцевую область Ω (в частности, $\hat{\Phi}_2 = \emptyset$).

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО обеих лемм вполне аналогично и основано на симметрии траекторий рассматриваемых дифференциалов относительно единичной окружности. По поводу аналитического выражения (6) для дифференциала $H_\psi(z)z^{-2}dz^2$ см. [6].

4°. Дадим теперь необходимые определения. Пусть a и θ – параметры леммы 2. Утверждение этой леммы позволяет связать с любой такой парой чисел либо две кольцевые области D_1, D_2, либо единственную кольцевую область D. Пусть имеет место первый случай. Тогда критическая траектория γ_a, выходящая из a, имеет своей концевой точкой $1/\bar{a}$, а критическая траектория выходящая из нуля – точку ∞. Пусть $h > 0$ настолько мало, что $\Delta_h(a) = \{|w-a| < h\} \subset \Delta$ и $0 \notin \Delta_h(a)$. Пусть $\tau_u(w)$ – гомеоморфизм $\mathbb{C}$ на себя, сохраняющий единичную окружность и гомотопный тождественному отображению относительно множества $\{0, 1, \infty\}$, и пусть $T(w, s)$ – указанная гомотопия, т.е. функция $T(w,s)$ непрерывна на $\bar{\mathbb{C}} \times [0,1]$, $T(w,0) = \tau_u(w)$, $T(w,1) = w$, $T(1,s) = 1$, $T(0,s) = 0$, $T(\infty, s) = \infty$. Потребуем, чтобы выполнялось соотношение $T(a,s) \in \Delta_h(a)$ при $s \in [0,1]$. Пусть $S_u = \tau_u(\gamma_a)$, $S_0 = \tau_u(\gamma_0)$, $H_1(u)$ и $H_2(u)$ – классы локально спрямляемых кривых на $\bar{\mathbb{C}}' = \bar{\mathbb{C}} \setminus \{u, 1/\bar{u}, 1, 0, \infty\}$, гомотопных разрезам по S_u и S_0 соответственно. Пусть α_i, $i = 1,2$ – длины кривых γ_a и γ_0 в Q-метрике, где $Q dw^2$ дифференциал (5). Модуль экстремально-метрической проблемы $\mathcal{P}(\alpha_1, \alpha_2)$ для классов $H_1(u)$, $H_2(u)$ (определение см. в [7]), обозначим через $M(u)$. В случае единственной кольцевой области D одна из траекторий γ_0, γ_a имеет своей концевой точкой $w = e^{2i\theta}$, а вторая – пересекает единичную окружность. Пусть γ – последняя траектория, $S = \tau_u(\gamma)$ и $H(u)$ – класс локально-спрямляемых кривых на $\bar{\mathbb{C}}'_u$, гомотопных разрезу по S. Модуль этого класса кривых обозначим через $M(u)$.

Из теоремы 0.I в [7] следует, что экстремальная метрика, как для проблемы модуля $\mathcal{P}(\alpha_1, \alpha_2)$, так и для проблемы модуля, определяющей $\mathcal{M}(u)$, имеет вид $\rho_u(w)|dw| = k|Q(u,\tilde{\theta},w)|^{1/2}|dw|$, где $\tilde{\theta}$ – надлежащий параметр, $0 \leqslant \tilde{\theta} < 2\pi$, $k > 0$. Кроме того, для $u = a$ $\rho_a(w)|dw| = |Q(a,\theta,w)|^{1/2}|dw|$. Тем самым, в окрестности $\Delta_h(a)$ определена функция $\mathcal{M}(u) = \mathcal{M}_\theta(u)$. Как показано в [8], $\mathcal{M}_\theta(u)$ – гладкая функция аргумента u, причем для ее градиента в точке $u = a$ имеем выражение

$$2\frac{\partial}{\partial \bar{u}}\mathcal{M}_\theta(u)\Big|_{u=a} = \pi\,\frac{e^{i\theta}(\bar{a} - e^{-2i\theta})}{\bar{a}(\bar{a}-1)(1-|a|^2)}. \qquad (8)$$

5°. Сформулируем теперь решение рассматриваемой задачи.

ТЕОРЕМА. Пусть $A = |A|e^{i\lambda}, \rho < |A| < 1$, $0 \leqslant \lambda \leqslant \pi$. Множество $\mathcal{D}(A)$ определяется следующими условиями.

1) $\mathcal{D}(A)$ – односвязное множество с гладкой границей $L = \partial\mathcal{D}(A)$.

2) L пересекается с каждой окружностью $|w| = r$ не более чем в двух точках.

3) Для каждой точки $a \in L$ существует единственная функция $f_a \in F_1$, $f_a(A) = a$.

4) Континуум $\Gamma = \Delta \setminus f_a(\mathcal{K})$ представляет собой дугу на замыкании траектории квадратичного дифференциала (5), выходящей из точки $w = 0$. Параметр $\theta = \theta(a)$ в выражении (1) определяется из уравнения

$$Re^{i\theta} = |a|^2(\bar{a}-1)e^{i\varphi} + a(a-1)e^{-i\varphi}, \qquad (9)$$

где $R > 0$, $\varphi = \varphi(a)$ таково, что $e^{i\varphi}$ совпадает с направлением внешней нормали к $\mathcal{D}(A)$ в точке a. $\theta(a)$ – непрерывная функция от a.

5) Функция $f_a(z)$ удовлетворяет в кольце $\tilde{\mathcal{K}}$ дифференциальному уравнению

$$Q(a,\theta(a), f_a(z))\cdot f_a'^2(z) = k^2 H_\psi(z)/z^2, \qquad (10)$$

где $k > 0$ – постоянная, зависящая только от a, $\psi = \psi(a)$ связано с $\theta(a)$ условием $f_a(e^{2i\psi}) = e^{2i\theta}$, $H_\psi(z)z^{-2}dz^2$ – дифференциал леммы 2, и для $0 \leqslant \psi < \pi$ и $\pi \leqslant \psi < 2\pi$ имеет место соответственно первое или второе из равенств (7).

6) Каждой точке $a \in L$ соответствует единственное значение параметра ψ в (10), $0 \leqslant \psi < 2\pi$, и обратно.

7) Кривая L описывается следующими аналитическими условиями: Пусть γ – путь $z = z(t)$, $0 \leqslant t \leqslant 1$, в кольце $\mathcal{K}$, $z(0) = A$,

$z(1)=1$, и $\operatorname{Im} z(t)>0$ при $0<t<1$. Пусть γ' – путь $w=w(t)$, $0\leqslant t\leqslant 1$, в круге Δ, $w(0)=a$, $w(1)=1$, причем при $0<t<1$, $\operatorname{Im} w(t)>0$ если $\operatorname{Im} a>0$, и $\operatorname{Im} w(t)<0$ если $\operatorname{Im} a\leqslant 0$. Положим

$$\rho(\psi)=\int_0^{2\psi}\sqrt{-H_\psi(e^{i\tau})}\,d\tau,\quad q(\psi)=\frac{1}{2}\int_{2\psi}^{2\pi}\sqrt{H_\psi(e^{i\tau})}\,d\tau, \tag{II}$$

$$u(\psi)+iv(\psi)=\int_\gamma\sqrt{H_\psi(z)}\,\frac{dz}{z},$$

где ветвь корня выбрана таким образом, что $\rho\geqslant 0$, $q>0$.
Тогда система уравнений

$$\int_0^{2\theta}\sqrt{-Q(a,\theta,e^{i\tau})e^{2i\tau}}\,d\tau=k\rho(\psi),\quad \int_{2\theta}^{2\pi}\sqrt{Q(a,\theta,e^{i\tau})e^{2i\tau}}\,d\tau=2kq(\psi),$$
$$\int_{\gamma'}\sqrt{Q(a,\theta,w)}\,dw=k\big(u(\psi)+iv(\psi)\big) \tag{I2}$$

имеет единственное решение $k=k(\psi)$, $\theta=\theta(\psi)$, $a=a(\psi)$, $k>0$. При этом $a\in L$.

Обходу точкой $z=e^{i\psi}$ единичной окружности в положительном направлении соответствует обход точкой a границы $L=\partial\mathfrak{D}(A)$ в отрицательном направлении. Значениям $\psi=0$ и $\psi=\pi$ соответствуют точки a_{min} и a_{max},

$$|a_{min}|=\min_{f\in F_1}|f(A)|,\quad |a_{max}|=\max_{f\in F_1}|f(A)|.$$

8) Для любой точки $a\in L$ существует окрестность $\Delta_h(a)$ такая, что для $u\in\mathfrak{D}(A)\cap\Delta_h(a)$ справедливо неравенство

$$\mathcal{M}(u)\geqslant\mathcal{M}(a)$$

и равенство имеет место только для $u=a$ (Здесь $\mathcal{M}(u)$ – функция, определенная в п.4^0). Градиент $\mathcal{M}(u)$ в точке a указывает направление внутренней нормали к L в этой точке.

6^0. ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. а) Для описания точек границы L множества $\mathfrak{D}(A)$ воспользуемся следующим рассуждением Н.А.Лебедева (см., например, [9]). Пусть B – произвольная точка $\Delta\setminus L$. Рассмотрим задачу нахождения $d(B)=\min_{f\in F_1}|f(A)-B|$. Пусть f – экстремальная в этой задаче функция, $a=f(A)$. Тогда, очевидно, $a \in L$. Обратно, множество неособых точек кривой L, т.е. точек L, реализующих $d(B)$ для некоторого $B \in \Delta \setminus \mathfrak{D}(A)$, плотно на L.

Положим $\Gamma_f = \Delta \setminus f(\mathcal{K})$. Пусть $w_0 \in \Gamma_f$, $w_0 \neq 0$. Как показано в [3], для любого достаточно малого $\varepsilon > 0$ найдется функция $f_\varepsilon \in F_1$ вида

$$f_\varepsilon(z) = f(z)\cdot\Big\{1 + \varepsilon^2\big(1 - f(z)\big)\Big[\frac{\zeta}{w_0(f(z)-w_0)(1-w_0)} + \frac{\bar\zeta}{(1-\bar w_0 f(z))(1-\bar w_0)\bar w_0}\Big] + O(\varepsilon^3)\Big\}, \qquad (13)$$

где $\zeta = \zeta(\varepsilon)$ определяется из формулы граничной вариации Шиффера. Используя экстремальность f и применяя основную лемму метода граничных вариаций Шиффера, приходим к характеристике континуума Γ_f для неособых точек кривой L, указанной в 4).

в) Функция f по симметрии продолжима на кольцо $\mathcal{K} = \{\rho < |z| < \rho^{-1}\}$. Если $H(z) = z^2 Q(a, \theta, f(z))\cdot f'^2(z)$, то квадратичный дифференциал $H(z)z^{-2}dz^2$ положителен в указанном кольце, и его особенностями в $\tilde{\mathcal{K}}$ являются только простые полюсы в точках A, $1/\bar A$ и 1, простой нуль в точке $e^{2i\psi} = f^{-1}(e^{2i\theta})$ и два симметричных двойных нуля ρe^{ih} и $\rho^{-1}e^{ih}$. Следовательно, дифференциал $H(z)z^{-2}dz^2$ с точностью до положительного множителя совпадает с дифференциалом $H_\psi(z)z^{-2}dz$, нули и полюсы которого связаны одним из соотношений (7).

с) Пусть $\{a_n\}_{n=1}^{\infty}$, $a_n \in L$ – последовательность неособых точек кривой L, $a_n \to a$. Обозначим через θ_n, k_n и f_n соответствующие точке a_n параметры и решение уравнения (8), $f_n(A) = a_n$, $f_n(e^{2i\psi_n}) = e^{2i\theta_n}$. Поскольку семейство F_1 компактно, то, переходя к подпоследовательности, можем считать, что $f_n \to f$, $k_n \to k$, $\theta_n \to \theta$. Тогда легко видеть, что $f(A) = a$ и что f удовлетворяет уравнению (10). Тем самым, для любой точки $a \in L$ найдется функция $f \in F_1$, $f(A) = a$, удовлетворяющая уравнению (10) с некоторым значением параметра θ.

$f(\tilde{\mathcal{K}})$ – допустимая область для дифференциала $Q(a,\theta,w)\,dw^2$. Если $\varphi \in F_1$ и $\varphi(A) = a$, то $\varphi_0 f^{-1}$ – ассоциированная с этой областью допустимая функция. Из теоремы П.М. Тамразова [10] непосредственно следует, что $\varphi_0 f^{-1}(w) = w$, т.е. что каждой точке $a \in L$ соответствует единственная выносящая ее граничная функция $f_a \in F_1$. Отсюда и из предыдущего рассуждения следует также, что f_a и $\theta(a)$ непрерывно зависят от a. Итак, утверждения 3^0, 4^0, 5^0 доказаны полностью.

d) Докажем, что существует единственная точка $a \in L$, такая, что $e^{i\varphi(a)} = a/|a|$ (именно, a_{max}), и единственная точка $a \in L$ такая, что $e^{i\varphi(a)} = -a/|a|$ (именно, a_{min}). Действительно, из (9) следует, что в первом случае $\theta(a)=\pi$, а во втором - $\theta(a)=0$. В случае $\theta=\pi$ области $\mathfrak{D}_1$ и $\mathfrak{D}_2$, соответствующие паре a и $\theta(a)=\pi$ в смысле $n^\circ 4$, представляют собой круг с разрезом по отрезку $[0,a]$ и область, симметричную с указанной относительно единичной окружности. Если бы нашлись точки a_1 и a_2 , $a_1 \neq a_2$, принадлежащие L , $\theta(a_1)=\theta(a_2)=\pi$, то суперпозиция $f_{a_2} \circ f_{a_1}^{-1}$, продолжалась бы до регулярного отображения круга на себя, сохраняющего точки 0 и I и переводящего a_1 в a_2 , что невозможно. В случае $\theta = 0$ аналогично докажем, что существует не более чем одна точка $a \in L$ такая, что $\theta(a)=0$. С другой стороны, очевидно, что $\theta(a_{max})=\pi$ и $\theta(a_{min})=0$.

Если $\theta(a)=0$, то $e^{2i\psi}=f_a^{-1}(e^{2i\theta(a)})=1$. Условимся считать, что случаю $\theta=0$ соответствует $\psi=0$. Непосредственный анализ траекторий дифференциала в кольце $\tilde{K}$, соответствующего дифференциалу $Q(a,0,w)\,dw^2$ на плоскости w , показывает, что $h=\pi+\arg A$, т.е. что имеет место первое из соотношений (7). Из соображений непрерывности ясно, что указанное соотношение остается справедливым для $0 \leqslant \psi < \pi$, и что при $\psi=\pi$ оно переходит во второе из соотношений (7). Если бы нашлись точки $a_1, a_2, a_1 \neq a_2$ кривой L такие, что уравнение (IO) выполняется для f_{a_1} и f_{a_2} с одним и тем же значением ψ , то, рассматривая суперпозицию $f_{a_2} \circ f_{a_1}^{-1}$ мы, как и выше, получили бы регулярное отображение круга Δ на себя, сохраняющее точки 0,I и переводящее a_1 в a_2 , что невозможно.

Для дифференциала (6) дуга $\{e^{it}: 0<t<2\psi\}$ при $0<\psi<\pi$ служит траектория. То же верно относительно дуги $\{e^{it}: 0<t<2\theta\}$ и дифференциала (5) при $0<\theta<\pi$. Поэтому, когда ψ возрастает от 0 до π , то так же изменяется и θ . Аналогично, возрастанию ψ от π до 2π соответствует такое же возрастание θ .

Рассматривая точку $a_\ell \in L$, такую, что $\arg a_\ell = \sup\{\arg a: a \in \mathfrak{D}(A)\}$, для которой, очевидно, $e^{i\varphi(a_\ell)}=ia_\ell/|a_\ell|$, и определяя $\theta(a_\ell)$ из (9), убедимся, что $0 < \theta(a_\ell) < \pi$.

Приведенные рассуждения доказывают возможность задания кривой L посредством параметра ψ , и описывают характер зависимости $a(\psi)$, указанную в 7).

е) Из леммы 2 видно, что замыкания критических траекторий дифференциала (5), выходящих из полюсов $w=0$ и $w=a$, пересекаются с единичной окружностью. Нетрудно видеть, что круг с разрезом вдоль указанных дуг отображается регулярной ветвью функции $u=\mathcal{F}(w)=\int^{w}\sqrt{Q(a,\theta,s)}\,ds$ на шестиугольник, в плоскости и со сторонами, параллельными координатным осям. Точно так же, из леммы 3 следует, что траектория дифференциала (6), соединяющая нули ϱe^{ih} и $\varrho^{-1}e^{ih}$, и замыкание траектории, выходящей из точки $w=A$, пересекаются с единичной окружностью. Кольцо $\mathcal{K}$, разрезанное вдоль указанных траекторий, отображается регулярной ветвью функции $v=\mathcal{H}(z)=\int^{z}\sqrt{H(s)}\,s^{-1}ds$ на шестиугольник в плоскости v того же вида. Несложное но громоздкое рассуждение, на котором мы здесь не останавливаемся, показывает, что значения параметров $p(\psi)$, $q(\psi)$, $u(\psi)$ и $v(\psi)$ – однозначно определяют такой шестиугольник. Наличие решения системы (I2) означает подобие указанных шестиугольников, и позволяет построить функцию $f\in F_1$, отображающую $\mathcal{K}$ в Δ таким образом, что $f(A)=a$. Наличие двух различных решений системы (I2) позволило бы построить отображение круга Δ на себя, сохраняющее точки 0 и I и не равное тождественному, что невозможно. Тем самым, утверждение 7) доказано полностью.

f) Для доказательства утверждения 8) рассмотрим функцию $\varphi\in F_1$, $\varphi(A)=u\in\Delta_h(a)$. В случае, когда точке $a\in L$ соответствуют в смысле n^o4 две области D_1, D_2, положим $\widetilde{D}_i=\varphi_\circ f_a^{-1}(D_i)$. Тогда $\widetilde{D}_1,\widetilde{D}_2$ – допустимое семейство областей, ассоциированное с классами $H_1(u)$ и $H_2(u)$, и потому выполняется неравенство

$$\mathcal{M}(u)\geqslant\alpha_1^2 M(\widetilde{D}_1)+\alpha_2^2 M(\widetilde{D}_2)=\alpha_1^2 M(D_1)+\alpha_2^2 M(D_2)=\mathcal{M}(a).$$

В случае одной области доказательство аналогично.

i) Пусть $h>0$ настолько мало, что для всякой точки $b\in L$ круг $\Delta_h(b)\subset\Delta$ и $0\notin\Delta_h(b)$. Пусть $a\in L$ и пусть $\mathcal{M}(u)$ – гладкая функция для $u\in\Delta_h(a)$, определенная в п^{o}4. Из [8] видно, что $\operatorname{grad}\mathcal{M}(u)\neq 0$ в $\Delta_h(a)$, поэтому гладкая кривая $\ell_a=\{w\in\Delta_h(a):\mathcal{M}(w)=\mathcal{M}(a)\}$ разбивает круг $\Delta_h(a)$ на две односвязные области. Пусть $\Delta_h^+(a)$ – та из них, в которой $\mathcal{M}(w)>\mathcal{M}(a)$. На основании 8) тогда имеем $\mathcal{D}(A)\cap\Delta_h(a)\subset\Delta_h^+(a)$. Из (8) и (9) находим, что направление нормали к ℓ_a в точке a, внешней по отношению к $\Delta_h^+(a)$ – оно противоположно направлению $\operatorname{grad}\mathcal{M}(a)$ – совпадает с $e^{i\varphi(a)}$. Гладкость кривой L теперь следует из леммы I.
Теорема доказана.

Литература

1. G r o t z s c h H. Über einige Extremalprobleme der konformen Abbildung. I, II. – Ber.Verh.Sächs.Akad.Wiss.Leipzig, Math.-Phys.Kl., 1928, Bd 80, S.367-376, 497-502.
2. G r o t z s c h H. Über die Verzerring bei nichtkonformen schlichter Abbildungen mehrfach zusammenhängender schlichter Bereiche. – Ber.Verh.Sächs.Akad.Wiss.Leipzig, Math.-Phys.Kl., 1930, Bd 82, S.69-80.
3. D u r e n P.L., S c h i f f e r M. A variational method for functions schlicht in an annulus. – Arch.Rat.Mech.Anal., 1962, vol.9, N 3, p.260-272.
4. M c L a u g h l i n R. Extremalprobleme für eine Familie schlichter Funktionen. – Math.Z., 1970, Bd 118, H.3, S.320-330.
5. M c L a u g h l i n R. Some extremal problems for functions univalent in an annulus. – Math.scand., 1971, vol.28, N 1, p.129-138.
6. К у з ь м и н а Г.В. Проблема модуля для семейств классов кривых в круговом кольце. – В кн.: Аналитическая теория чисел и теория функций. 6. Зап.науч.семин.ЛОМИ, 1985, т.144, с.115-127.
7. К у з ь м и н а Г.В. Модули семейств кривых и квадратичные дифференциалы. Тр.Мат.ин-та АН СССР, 1980, т.139, 240 с.
8. Е м е л ь я н о в Е.Г. Некоторые свойства модулей семейств кривых. – В кн.: Аналитическая теория чисел и теория функций. 6. Зап.науч.семин.ЛОМИ, 1985, т.144, с.72-82.
9. Л е б е д е в Н.А. Мажорантная область для выражения $I = \log\{z^\lambda f'(z)^{1-\lambda}/f(z)^\lambda\}$ в классе S. – Вестн.ЛГУ, 1955, № 8, сер.мат.,физ.,хим.,вып.3, с.29-41.
10. Т а м р а з о в П.М. К общей теореме о коэффициентах. – Мат.сб., 1967, т.72 (114), № 1, с.59-71.