2000. Т. 36, № 7. С. 979 — 985

УДК 519.632

МУЛЬТИПЛИКАТИВНОЕ ВЫДЕЛЕНИЕ ОСОБЕННОСТИ В СХЕМАХ МКЭ ДЛЯ ЭЛЛИПТИЧЕСКИХ ВЫРОЖДАЮЩИХСЯ УРАВНЕНИЙ

М. Р. Тимербаев

1. Введение. Известно [1], что решения вырождающихся на границе эллиптических задач в окрестности точек вырождения имеют характерную особенность типа погранслоя, которую необходимо учитывать при построении схем дискретизации. Так, в работах [2, 3] построение схем основано на специальной замене переменных (см. ниже), при которой в новых координатах строятся проекционно-сеточные схемы. Для другого класса вырождающихся уравнений в работах [4 — 8] использовалось сгущение сетки в окрестности точек вырождения. Этот часто используемый в задачах с особенностями универсальный подход в случае степени вырождения, близкой к некоторому критическому показателю, вызывает трудности алгоритмического и вычислительного характера, связанные с построением сильно сгущающейся сетки, а также с существенным ростом по сравнению с регулярным (невырожденным) случаем размера результирующей системы линейных алгебраических уравнений и с ее плохой обусловленностью.

Метод численного решения вырождающихся уравнений, излагаемый в настоящей работе, основан на идее представления в зоне погранслоя решения исходной задачи $u(x)$ в виде произведения $u(x) = \sigma(x)\varphi(x)$, где функция $\sigma(x)$ строится по коэффициентам вырождающегося дифференциального оператора и передает асимптотику решения в окрестности точек вырождения, а функция $\varphi(x)$ обладает существенно лучшими по сравнению с $u(x)$ свойствами для аппроксимации конечными элементами. Приближенное решение исходной задачи определяется в виде $u_h(x) = \sigma(x)\varphi_h(x)$, где функция $\varphi_h(x)$ является конечноэлементным приближением функции $\varphi(x)$ на квазиравномерной сетке. Важно отметить, что показатели эффективности метода такие, как точность, алгоритмичность, затраты времени и памяти, идентичны соответствующим показателям в регулярном случае.

2. Абстрактная схема метода. Пусть V — вещественное гильбертово пространство, на V задана билинейная, симметричная, непрерывная форма $a(u, v)$, удовлетворяющая условию V-эллиптичности, т.е. $a(v, v) \geq c_0|v|^2 \ \forall v \in V$, и задан линейный функционал $F \in V^*$. Тогда вариационная задача об отыскании $u \in V$, удовлетворяющего равенству

$$a(u, v) = F(v) \quad \forall v \in V, \tag{1}$$

имеет единственное решение. Пусть X — другое гильбертово пространство и $\sigma : X \to V$ — линейный непрерывный взаимно однозначный оператор, причем $V = \sigma(X)$. Тогда по теореме Банаха о гомеоморфизме оператор σ имеет непрерывный обратный и

$$|\sigma\varphi|_V \sim |\varphi|_X \quad \forall \varphi \in X \tag{2}$$

(знак $\sim$ ставится между эквивалентными величинами, т.е. оцениваемыми одна через другую с константами, не зависящими от варьируемых параметров). Определим по $a(u, v)$ билинейную форму на X формулой $a_\sigma(\varphi, \eta) = a(\sigma\varphi, \sigma\eta) \ \forall \varphi, \eta \in X$ и по $F \in V^*$ линейный непрерывный на X функционал $F_\sigma(\eta) = F(\sigma\eta)$. Тогда из (2) с очевидностью следует, что билинейная форма $a_\sigma(\varphi, \eta)$ симметрична, непрерывна на X и X-эллиптична. Следовательно, вариационная задача

$$\varphi \in X : \quad a_\sigma(\varphi, \eta) = F_\sigma(\eta) \quad \forall \eta \in X \tag{3}$$

имеет единственное решение. Ясно, что решения задач (1) и (3) связаны между собой соотношением $u = \sigma\varphi$. Другими словами, оператор σ является оператором перехода от новой переменной φ задачи (3) к старой u уравнения (1).

Пусть $X_h \subset X$ — подпространство и $V_h = \sigma(X_h)$. Определим элементы $u_h \in V_h$ и $\varphi_h \in X_h$ как решения вариационных задач (приближения по Галеркину)

$$a(u_h, v_h) = F(v_h) \quad \forall v_h \in V_h, \tag{4}$$

$$a_\sigma(\varphi_h, \eta_h) = F_\sigma(\eta_h) \quad \forall \eta_h \in X_h. \tag{5}$$

Тогда $u_h = \sigma\varphi_h$. Обозначим $\delta_V(u, V_h) = \inf\{|u - v|_V : v \in V_h\}$. Согласно лемме Сеа [9, с. 109], имеют место двусторонние оценки $|u - u_h|_V \sim \delta_V(u, V_h)$ и $|\varphi - \varphi_h|_X \sim \delta_X(\varphi, X_h)$. Из эквивалентности норм (2) следует

Теорема 1. *Для приближенных решений (4), (5) справедливы оценки* $|u - u_h|_V \sim |\varphi - \varphi_h|_X \sim \delta_X(\varphi, X_h) \sim \delta_V(u, V_h)$.

Замечание. Постоянные в оценках теоремы 1 зависят только от билинейной формы $a(u, v)$ и отображения σ.

Итак, приближенное решение u_h для задачи (1) можно трактовать двояко: как решение задачи (4) на подпространстве V_h либо как $u_h = \sigma\varphi_h$, где φ_h — решение приближенной задачи (5).

Приведем пример. В области $\Omega = (0,1) \times (0,1)$ решается уравнение

$$-\frac{\partial}{\partial x_1} x_1^\alpha a_1(x) \frac{\partial u}{\partial x_1} - \frac{\partial}{\partial x_2} a_2(x) \frac{\partial u}{\partial x_2} = f(x), \quad x \in \Omega,$$

с граничными условиями $u|_{\partial\Omega} = 0$ в предположении, что коэффициенты $a_i(x) \geq c_0 > 0$ достаточно гладкие, $f \in L_2(\Omega)$ и $0 < \alpha < 1$. Дифференциальный оператор в левой части уравнения вырождается на отрезке $\Gamma_0 = \{x \in R^2 : x_1 = 0, \ 0 \leq x_2 \leq 1\}$. Положим

$$a(u, v) = \int_\Omega \left(x_1^\alpha a_1(x) \frac{\partial u}{\partial x_1} \frac{\partial v}{\partial x_1} + a_2(x) \frac{\partial u}{\partial x_2} \frac{\partial v}{\partial x_2} \right) dx, \quad F(v) = \int_\Omega f(x) v(x)\, dx.$$

Рассматриваемая граничная задача может быть сформулирована в вариационном виде (1) на гильбертовом пространстве $V = \{v \in L_{1,\mathrm{loc}}(\Omega) : a(v, v) < \infty, \ v|_{\partial\Omega} = 0\}$ с соответствующей метрикой. Если в качестве аппроксимирующего подпространства $V_h \subset V$ взять пространство линейных конечных элементов [9, с. 56] на сетке с шагом h, то, как показано в [2], будем иметь неулучшаемую на классе правых частей $f \in L_2(\Omega)$ оценку сходимости приближений $|u - u_h|_V = O(h^{(1-\alpha)/2})$. Таким образом, непосредственное применение конечноэлементной аппроксимации задачи (1) неэффективно при степени вырождения α, близкой к критической $\alpha_1 = 1$. Определим преобразование координат $\sigma : x \in \Omega \to y = \sigma x \in \Omega$ формулой $y_1 = (1-\alpha)^{-1} x_1^{1-\alpha}$, $y_2 = x_2$. Тем же символом σ обозначим линейное отображение, ставящего каждой функции на Ω $\varphi(y)$ в соответствие функцию $u(x)$ по формуле $u(x) = \varphi(\sigma x)$, т.е. $(\sigma\varphi)(x) = \varphi(\sigma x)$. Тогда для

$$a_\sigma(\varphi, \eta) = \int_\Omega \left(\hat{a}_1(y) \frac{\partial \varphi}{\partial y_1} \frac{\partial \eta}{\partial y_1} + (1-\alpha)^\gamma y_1^\gamma \hat{a}_2(y) \frac{\partial \varphi}{\partial y_2} \frac{\partial \eta}{\partial y_2} \right) dy,$$

где $a_i = \sigma\hat{a}_i$, $\gamma = \alpha/(1-\alpha)$, как нетрудно убедиться, имеем $a_\sigma(\varphi, \eta) = a(\sigma\varphi, \sigma\eta)$. Если $X = \{\eta \in L_{1,\mathrm{loc}}(\Omega) : a_\sigma(\eta, \eta) < \infty, \ \eta|_{\partial\Omega} = 0\}$, $|\eta|_X = \sqrt{a_\sigma(\eta, \eta)}$, то оператор σ осуществляет изоморфизм пространства X на V. Пусть $X_h \subset X$ — пространство линейных конечных элементов на сетке с шагом h. В [2] показано, что для приближений (5) справедлива оценка $|\varphi - \varphi_h|_X = O(h)$. Положим $u_h = \sigma\varphi_h$. Тогда по теореме 1 $|u - u_h|_V = O(h)$.

Ниже в наших рассмотрениях роль оператора σ в соответствующих функциональных пространствах будет играть оператор умножения на фиксированную, специальным образом выбранную функцию.

3. Весовые классы функций. Аппроксимация конечными элементами функций весовых классов. Введем обозначения: $\Omega = (0,1)\times(0,1) \subset R^2$, $\rho(x) = |x_1|$ для $x = (x_1, x_2)$, $\Gamma_0 = \{0\}\times[0,1]$, $\Gamma_1 = \partial\Omega \setminus \Gamma_0$; для мультииндекса $i = (i_1, i_2)$ через $D^i u(x)$ обозначаем оператор обобщенного (в смысле распределений на Ω) дифференцирования, $L_{p,\alpha}(\Omega)$ — весовое пространство Лебега с нормой

$$u \to |\rho^{-\alpha} u|_{p,\Omega} = \Big(\int\limits_{\Omega} |\rho(x)^{-\alpha} u(x)|^p \Big)^{1/p},$$

для целого $m \geq 0$ через $W^m_{p,\alpha}(\Omega)$ обозначим весовое пространство Соболева функций с конечной полунормой

$$|\rho^{-\alpha} \nabla^m u|_{p,\Omega} = \Big(\sum_{|i|=m} \int\limits_{\Omega} |\rho(x)^{-\alpha} D^i u(x)|^p \Big)^{1/p},$$

где $|i| = i_1 + i_2$. В качестве нормы этого пространства можно взять норму $u \to |\rho^{-\alpha}\nabla^m u|_{p,\Omega} + |u|_{p,\omega}$, где $\omega \subset \Omega$ — любая подобласть, отделенная от Γ_0. Для пространств $W^m_{p,\alpha}(\Omega)$ хорошо известны [10, с. 378; 11, с. 319; 12] теоремы вложения

$$W^m_{p,\alpha}(\Omega) \subset W^k_{p,\beta}(\Omega) \quad \text{при} \quad k < m, \quad \beta \leq m - k + \alpha, \quad \beta < 1/p; \tag{6}$$

$$W^m_{p,\alpha}(\Omega) \subset C(\overline{\Omega}) \quad \text{при} \quad m + \alpha - 2/p > 0, \quad mp > 2; \tag{7}$$

$$W^1_{p,\alpha}(\Omega) \subset L_p(\partial\Omega) \quad \text{при} \quad \alpha > 1/p - 1. \tag{8}$$

Введем также пространства функций $H^m_\alpha(\Omega) = \bigcap\limits_{k=0}^{m} W^{m-k}_{2,\alpha+k}(\Omega)$ и $V_\alpha(\Omega) = \{u \in H^1_\alpha(\Omega) : u|_{\Gamma_1} = 0\}$. Тогда по определению $H^m_\alpha(\Omega) \subset H^{m-k}_{\alpha+k}(\Omega)$, $k \leq m$.

Лемма 1. *Пусть X, V — два B-пространства, непрерывно вложенные в пространство измеримых функций $L(\Omega)$, наделенное метрикой сходимости по мере. Если измеримая функция $\sigma(x)$ такова, что $\sigma\varphi \in V$ $\forall \varphi \in X$, то линейное отображение $\sigma : X \to V$, определяемое формулой $(\sigma\varphi)(x) = \sigma(x)\varphi(x)$ непрерывно из X в V. Если, кроме того, $\sigma(x) \neq 0$ п. в. и $u/\sigma \in X$ $\forall u \in V$, то $\sigma : X \to V$ осуществляет изоморфизм пространства X на пространство V.*

Доказательство. Для доказательства непрерывности линейного оператора $\sigma : X \to V$ воспользуемся теоремой о замкнутом графике. Пусть последовательность $\varphi_n \to 0$ в X и $u_n = \sigma\varphi_n \to u$ в V. Нужно показать, что $u = 0$. Из непрерывности вложения X в $L(\Omega)$ следует, что $\varphi_n(x) \to 0$ по мере на Ω. Но тогда и $u_n(x) = \sigma(x)\varphi_n(x) \to 0$ по мере на Ω. С другой стороны, из непрерывности вложения V в $L(\Omega)$ $u_n(x) \to u(x)$ по мере на Ω, откуда следует $u(x) = 0$ п. в. Непрерывность отображения $\sigma : X \to V$ установлена.

Доказательство второй части утверждения следует теперь из теоремы Банаха о гомеоморфизме, примененной к оператору σ, поскольку по условиям леммы σ взаимно однозначен и $V = \sigma(X)$. Лемма доказана.

Лемма 2. *Пусть α, β — вещественные числа. Оператор умножения на функцию $\sigma(x) = \rho(x)^\beta$ осуществляет изоморфизм пространств $H^m_\alpha(\Omega)$ на $H^m_{\alpha+\beta}(\Omega)$ и $V_\alpha(\Omega)$ на $V_{\alpha+\beta}(\Omega)$.*

Доказательство. Пусть $\varphi \in H^m_\alpha(\Omega)$, $u(x) = \sigma(x)\varphi(x)$. Для произвольного мультииндекса k, $|k| \leq m$, имеем

$$D^k u(x) = D^k(\sigma\varphi)(x) = \sum_{i+j=k} D^i\sigma(x) D^j\varphi(x).$$

Так как для $i+j=k$ $|D^i\sigma(x)| \leq c_i \rho^{\beta-|i|}$, $D^j\varphi \in L_{2,\alpha+m-|j|}(\Omega)$, то $D^i\sigma D^j\varphi \in L_{2,\alpha+m-|j|+\beta-|i|}(\Omega) = L_{2,\alpha+\beta+m-|k|}(\Omega)$, откуда для любого k, $|k| \leq m$, следует включение $D^k u \in L_{2,\alpha+\beta+m-|k|}(\Omega)$, т.е. $u \in H^m_{\alpha+\beta}(\Omega)$. Поменяв местами α и $\alpha+\beta$ и повторив те же рассуждения для функции $1/\sigma(x) = \rho(x)^{-\beta}$ убеждаемся, что для любой функции $u \in H^m_{\alpha+\beta}(\Omega)$ $\varphi = u/\sigma \in H^m_\alpha(\Omega)$. Теперь

из леммы 1 следует, что оператор умножения на $\sigma(x)$ есть изоморфизм $H^m_\alpha(\Omega)$ на $H^m_{\alpha+\beta}(\Omega)$. Поскольку умножение и деление на $\sigma(x)$ не меняет нулевое значение следа на Γ_1, то оператор σ — изоморфизм $V_\alpha(\Omega)$ на $V_{\alpha+\beta}(\Omega)$. Утверждение доказано.

Замечание. Как видно из доказательства, утверждение остается верным и для более широкого класса функций $\rho(x)$: достаточно выполнения условий $\rho(x) \sim x_1$, $\rho \in W^m_\infty(\Omega)$. Например, для $m = 1$, зафиксировав $\delta > 0$, можно взять функцию $\rho(x) = \min(x_1/\delta, 1)$ класса $W^1_\infty(\Omega)$.

Лемма 3. *Равенство* $H^1_\alpha(\Omega) = W^1_{2,\alpha}(\Omega)$ *имеет место при* $\alpha < -1/2$ *и* $H^1_\alpha(\Omega) = \{u \in \in W^1_{2,\alpha}(\Omega) : u|_{\Gamma_0} = 0\}$, *если* $\alpha > -1/2$.

Доказательство. По определению $H^1_\alpha(\Omega) \subset W^1_{2,\alpha}(\Omega)$. Если $\alpha < -1/2$, то в силу вложения (6) $W^1_{2,\alpha}(\Omega) \subset L_{2,\alpha+1}(\Omega)$, откуда следует равенство $H^1_\alpha(\Omega) = W^1_{2,\alpha}(\Omega)$.

Пусть $\alpha > -1/2$ и $u \in H^1_\alpha(\Omega) = W^1_{2,\alpha}(\Omega) \bigcap L_{2,\alpha+1}(\Omega)$. По теореме вложения (8) существует след $\varphi(x_2) = u(0, x_2)$ класса $L_2(0,1)$. С другой стороны, для $\delta > 0$

$$\delta^{-1} \int_0^\delta |u(x_1, x_2)|\, dx_1 = \delta^{-1} \int_0^\delta x_1^{1+\alpha} |x_1^{-1-\alpha} u(x_1, x_2)|\, dx_1 \le$$

$$\le \delta^{-1} \Big(\int_0^\delta x_1^{2+2\alpha}\, dx_1 \Big)^{1/2} \Big(\int_0^\delta |x_1^{-1-\alpha} u(x_1, x_2)|^2\, dx_1 \Big)^{1/2} \le$$

$$\le \delta^{1/2+\alpha} (3 + 2\alpha)^{-1/2} \Big(\int_0^\delta |x_1^{-1-\alpha} u(x_1, x_2)|^2\, dx_1 \Big)^{1/2} \to 0$$

при $\delta \to 0$ при п. в. x_2, так как по условию $1/2 + \alpha > 0$ и последний интеграл конечен при п. в. x_2, поскольку

$$\int_0^1 \Big(\int_0^\delta |x_1^{-1-\alpha} u(x_1, x_2)|^2\, dx_1 \Big)^{1/2} dx_2 \le \Big(\int_\Omega |x_1^{-1-\alpha} u(x_1, x_2)|^2\, dx_1\, dx_2 \Big)^{1/2} < \infty.$$

Отсюда заключаем, что $\varphi(x_2) = 0$ п. в.

Обратно, пусть при $\alpha > -1/2$ $u \in W^1_{2,\alpha}(\Omega)$ и $u|_{\Gamma_0} = 0$. Тогда $u(x_1, x_2) = \int_0^{x_1} \dfrac{\partial u(z, x_2)}{\partial z}\, dz$. По неравенству Харди [13]

$$\int_\Omega |x_1^{-1-\alpha} u(x)|^2\, dx \le \Big(\frac{2}{1 + 2\alpha} \Big)^2 \int_\Omega |x_1^{-\alpha} D^{(1,0)} u(x)|^2\, dx < \infty, \tag{9}$$

откуда следует, что $u \in L_{2,\alpha+1}(\Omega)$. Таким образом, $u \in H^1_\alpha(\Omega)$ и лемма доказана.

Как усиленный вариант неравенства Фридрихса можно трактовать следующее утверждение.

Лемма 4. *Пусть* $V = V_\alpha(\Omega)$, *если* $\alpha < -1/2$, *и* $V = H^1_\alpha(\Omega)$, *если* $\alpha > -1/2$. *Существует постоянная* $c > 0$ *такая, что* $|\rho^{-\alpha-1} u|_{2,\Omega} \le c |\rho^{-\alpha} \nabla u|_{2,\Omega}$ $\forall u \in V$. *Таким образом, на пространстве* $V_\alpha(\Omega)$ *полунорма* $|\rho^{-\alpha} \nabla u|_{2,\Omega}$ *является нормой, эквивалентной норме* $H^1_\alpha(\Omega)$.

Доказательство в случае $\alpha < -1/2$ имеется в [14], а при $\alpha > -1/2$ требуемая оценка содержится в неравенстве Харди (9).

Рассмотрим теперь вопросы, связанные с конечноэлементными приближениями функций из весовых классов. Пусть $m \ge 1$ — натуральное число и (T_h) обозначает регулярное семейство триангуляций области Ω на прямоугольные или треугольные лагранжевы конечные элементы типа (m) [9, с. 58]. Определим для элемента $K \in T_h$, $h_K = \operatorname{diam}(K)$, $\rho_K = \max\{\rho(x) : x \in K\}$, $r_K = \min\{\rho(x) : x \in K\}$, P_K — пространство полиномов $Q_m(K)$ или $P_m(K)$ соответственно для прямоугольного или треугольного элемента и ω_K — множество узлов элемента K. Регулярность семейства триангуляций означает, что h_K может быть оценено сверху

с некоторой постоянной через длину наименьшей стороны элемента K; для треугольных элементов это равносильно условию Зламала [15] невырождения углов треугольников $K \in T_h$. Отметим также [14], что для регулярного семейства триангуляций существует постоянная $c > 0$ такая, что для $K \in T_h$, $K \bigcap \Gamma_0 = \varnothing$ выполняется неравенство $\rho_K \le c r_K$. Через X_h^m обозначим пространство конечных элементов, ассоциированное с триангуляцией T_h, т.е. $X_h^m = \{u \in C(\overline{\Omega}) : u|_K \in P_K \ \ \forall K \in T_h\}$. Для каждого узла z сетки $\omega_h = \bigcup\limits_{K \in T_h} \omega_K$ условиями $e_z \in X_h^m$, $e_z(z) = 1$, $e_z(z') = 0 \ \ \forall z' \in \omega_h$, $z' \ne z$, определяется единственная функция $e_z(x)$ канонического базиса пространства X_h^m.

Введем оператор I_h X_h^m-интерполяции для функций пространства $W_{2,\beta}^{m+1}(\Omega)$ следующим образом: для $u \in W_{2,\beta}^{m+1}(\Omega)$ при $\beta > -m$ положим

$$I_h u(x) = \sum_{z \in \omega_h} u(z) e_z(x),$$

а при $\beta \le -m$

$$I_h u(x) = \sum_{z \in \omega_h \setminus \Gamma_0} u(z) e_z(x).$$

Определяемый таким образом оператор I_h определен корректно, так как в случае $\beta > -m$ в силу (7) имеет место вложение $W_{2,\beta}^{m+1}(\Omega) \subset C(\overline{\Omega})$, а в случае $\beta \le -m$ — вложение $W_{2,\beta}^{m+1}(\Omega) \subset C(\overline{\Omega} \setminus \Gamma_0)$.

Теорема 2. *Пусть $m + \beta - \alpha > 0$. Тогда имеют место оценки на $K \in T_h$*

1) при $\beta > -m$ либо при $\beta \le -m$ и $K \bigcap \Gamma_0 = \varnothing$ $|\rho^{-\alpha} \nabla (u - I_h u)|_{2,K} \le c h_K^m \rho_K^{\beta - \alpha} |\rho^{-\beta} \nabla^{m+1} u|_{2,K}$;

2) при $\beta \le -m$ и $K \bigcap \Gamma_0 \ne \varnothing$ $|\rho^{-\alpha} \nabla (u - I_h u)|_{2,K} \le c h_K^{m+\beta-\alpha} (|\rho^{-\beta} \nabla^{m+1} u|_{2,K} + |\rho^{-\beta-m} \nabla u|_{2,K})$.

Доказательство. Утверждение 1) следует из работы [14]. Для доказательства утверждения 2) сделаем замену переменных $\hat{x} = x/h_K$, переводящую точки элемента K в $\hat{K}$, и обозначим: $u_h(x) = I_h u(x)$, $\hat{u}(\hat{x}) = u(h_K \hat{x})$. Поскольку оператор $\hat{u} \in W_{2,\beta}^{m+1}(\hat{K}) \to \hat{u}_h \in W_{2,\alpha}^1(\hat{K})$ ограничен и $W_{2,\beta}^m(\hat{K}) \subset L_{2,\beta+m}(\hat{K})$, то $|\rho^{-\alpha} \nabla (u - u_h)|_{2,K} = h_K^{-\alpha} |\hat{x}_1^{-\alpha} \nabla (\hat{u} - \hat{u}_h)|_{2,\hat{K}} \le c h_K^{-\alpha} (|\hat{x}_1^{-\beta} \nabla^{m+1} \hat{u}|_{2,\hat{K}} + |\hat{x}_1^{-\beta-m} \nabla \hat{u}|_{2,\hat{K}}) = c h_K^{m+\beta-\alpha} (|\rho^{-\beta} \nabla^{m+1} u|_{2,K} + |\rho^{-\beta-m} \nabla u|_{2,K})$. Теорема доказана.

Далее предполагается, что $h_K \sim h = \max\{h_K : K \in T_h\}$, т.е. семейство триангуляций квазиравномерно.

Теорема 3. *Пусть $m + \beta - \alpha > 0$ и $\theta = \min(m, m + \beta - \alpha)$. Имеют место оценки $|\rho^{-\alpha} \nabla (u - I_h u)|_{2,\Omega} \le c h^\theta |\rho^{-\beta} \nabla^{m+1} u|_{2,\Omega}$ при $\beta > -m$; $|\rho^{-\alpha} \nabla (u - I_h u)|_{2,\Omega} \le c h^\theta (|\rho^{-\beta} \nabla^{m+1} u|_{2,\Omega} + |\rho^{-\beta-m} \nabla u|_{2,\Omega})$ при $\beta \le -m$.*

Доказательство. Рассмотрим, например, второй случай $\beta \le -m$. Тогда для любого элемента $K \in T_h$, как следует из теоремы 2, имеем

$$|\rho^{-\alpha} \nabla (u - I_h u)|_{2,K} \le c \max(h^{m+\beta-\alpha}, h^m \rho_K^{\beta-\alpha}) (|\rho^{-\beta} \nabla^{m+1} u|_{2,K} + |\rho^{-\beta-m} \nabla u|_{2,K}).$$

Поскольку $h \le c \rho_K \le c$, то $\max(h^{m+\beta-\alpha}, h^m \rho_K^{\beta-\alpha}) \le c h^\theta$. Таким образом, $|\rho^{-\alpha} \nabla (u - I_h u)|_{2,K} \le c h^\theta (|\rho^{-\beta} \nabla^{m+1} u|_{2,K} + |\rho^{-\beta-m} \nabla u|_{2,K})$. Возводя последнее неравенство в квадрат и суммируя по $K \in T_h$, получим требуемую оценку.

4. Постановка задачи, ее эквивалентные формулировки и аппроксимация конечными элементами. В области $\Omega = (0,1) \times (0,1)$ рассматривается уравнение

$$-\frac{\partial}{\partial x_1} x_1^\alpha a_1(x) \frac{\partial u}{\partial x_1} - \frac{\partial}{\partial x_2} x_1^\alpha a_2(x) \frac{\partial u}{\partial x_2} + a_0(x) u(x) = f(x)$$

с граничными условиями $u|_{\partial\Omega} = 0$.

Относительно входных данных предполагается, что $-1 < \alpha < 1$, коэффициенты $a_i(x)$ достаточно гладкие, $a_i(x) \ge c_0 > 0$, $a_0(x) \ge 0$, правая часть $f \in L_{2,\beta}(\Omega)$ с $\beta \in (-0{,}5; 0{,}5)$. Решение $u(x)$ граничной задачи может быть найдено вариационным методом (1) на пространстве $V = V_{-\alpha/2}(\Omega)$ с билинейной симметричной формой

$$a(u,v) = \int\limits_\Omega \left(x_1^\alpha a_1(x) \frac{\partial u}{\partial x_1} \frac{\partial v}{\partial x_1} + x_1^\alpha a_2(x) \frac{\partial u}{\partial x_2} \frac{\partial v}{\partial x_2} + a_0(x) u v \right) dx$$

и линейным функционалом

$$F(v) = \int_\Omega f(x)v(x)\,dx.$$

Условия на коэффициенты в силу лемм 3, 4 обеспечивают ограниченность $a(u,v)$ и эллиптичность на V. Так как $V \subset L_{2,1-\alpha/2}(\Omega)$, то $L_{2,\alpha/2-1}(\Omega) \subset V^*$ и при $\beta \in (-0{,}5; 0{,}5)$ имеем $\alpha/2-1 < -1/2 < \beta$, так что включение $f \in L_{2,\beta}(\Omega) \subset L_{2,\alpha/2-1}$ влечет за собой непрерывность функционала F на V.

Зафиксируем $\delta \in (0,1]$ и положим $\rho_\delta(x) = \min(x_1/\delta, 1)$, $\rho(x) = x_1$, $\Omega_\delta = \{x \in \Omega : x_1 > \delta\}$, $\Delta_\delta = \Omega \setminus \Omega_\delta$. Обозначим для целого $i \geq 0$ $\sigma_i(x) = \rho_\delta(x)^{i-\alpha}$ и $X_i = V_{\alpha/2-i}(\Omega)$. По лемме 2 оператор σ_i умножения на функцию $\sigma_i(x)$ осуществляет изоморфизм пространства X_i на V. По схеме п. 2 можем рассмотреть эквивалентные вариационные задачи на пространствах X_i, $i = 0, 1, \ldots$, $\varphi_i \in X_i$: $a_i(\varphi_i, \eta) = F_i(\eta)$ $\forall \eta \in X_i$ с $a_i(\varphi, \eta) = a(\sigma_i\varphi, \sigma_i\eta)$, $F_i(\eta) = F(\sigma_i\eta)$, решения которых связаны с решением исходной задачи равенствами $u(x) = \sigma_i(x)\varphi_i(x)$, в частности $\varphi_i(x) = u(x)$ при $x \in \Omega_\delta$. Отметим, что решение φ_0 обращается в нуль на линии вырождения, в то время как для определения φ_i при $i \geq 1$ условия на Γ_0 не ставятся.

Теорема 4. *Для решений* φ_i, $i = 0, 1$, *имеют место оценки*

$$|\rho^{i-\beta}\nabla^2\varphi_i|_{2,\Delta_\delta} + |\rho^{i-\beta}\nabla^2\varphi_i|_{2,\Omega_\delta} \leq c|\rho^{-\beta}f|_{2,\Omega}.$$

Доказательство этого утверждения довольно громоздко и мы его здесь не приводим. Оценка решений φ_i через правую часть примечательна тем, что не зависит от степени вырождения коэффициентов α и чувствительна к гладкости $f(x)$ в окрестности Γ_0, чего нельзя сказать о решении исходной задачи $u(x)$, которое имеет асимптотику $O(x_1^{1-\alpha})$ при $x_1 \to 0$ даже на классе гладких правых частей, скажем, при $f \in C_0^\infty(\Omega)$.

Определим аппроксимирующие пространства, положив $X_{i,h} = X_i \bigcap X_h^1$ и $V_{i,h} = \sigma_i(X_{i,h})$, причем общая граница S подобластей Δ_δ и Ω_δ является объединением сторон некоторых элементов триангуляции T_h, и построим приближения $\varphi_{i,h} \in X_{i,h}$: $a_i(\varphi_{i,h}, \eta) = F_i(\eta)$ $\forall \eta \in X_{i,h}$, $u_{i,h}(x) = \sigma_i(x)\varphi_{i,h}(x)$. Отметим, что при $x \in \omega_h \bigcap \Gamma_0$ ставится условие $\varphi_{0,h}|_{\Gamma_0} = 0$, а для определения $\varphi_{i,h}$, $i \geq 1$, значения в узлах на Γ_0 определяются из результирующей системы уравнений МКЭ.

Теорема 5. *При* $i = 0, 1$ *имеет место сходимость в метрике энергетического пространства* $|\rho^{\alpha/2}\nabla(u - u_{i,h})|_{2,\Omega} \leq ch^\theta|\rho^{-\beta}f|_{2,\Omega}$, *где* $\theta = \max(1, 1+\beta-\alpha/2)$, *и в весовом* L_2 $|\rho^{\alpha/2}(u - u_{i,h})|_{2,\Omega} \leq ch^{1+\theta}|\rho^{-\beta}f|_{2,\Omega}$. *В частности, если* $f \in L_\infty(\Omega)$, *то* $|\rho^{\alpha/2}(u - u_{i,h})|_{2,\Omega} + h|\rho^{\alpha/2}\nabla(u - u_{i,h})|_{2,\Omega} \leq ch^2|f|_{\infty,\Omega}$.

Доказательство. Используя теоремы 1, 3, 4, оценим: $|u - u_{i,h}|_V \leq c_1|\varphi_i - \varphi_{i,h}|_{X_i} \leq c_2\delta_{X_i}(\varphi_i, X_{i,h}) \leq |\rho^{i-\alpha/2}\nabla(\varphi_i - I_h\varphi_i)|_{2,\Omega}ch^\theta|\rho^{-\beta}f|_{2,\Omega}$.

Для получения второй оценки используем прием Обэна — Нитше [9, с. 139]. Положим $f_i = \rho^\alpha(u - u_{i,h})$. Тогда для $\gamma = 1 + \alpha/2$ $f_i \in L_{2,\gamma}(\Omega) \subset L_{2,\alpha/2-1}(\Omega) \subset V^*$. Пусть w_i обозначает решение вариационной задачи $w_i \in V$: $a(w_i, v) = \int_\Omega f_i(x)v(x)\,dx$ и $w_{i,h} \in V_{i,h}$ — его аппроксимация. Тогда по доказанному имеем $|\rho^{\alpha/2}(u - u_{i,h})|^2_{2,\Omega} = a(w_i, u - u_{i,h}) = a(w_i - w_{i,h}, u - u_{i,h}) \leq c_1|w_i - w_{i,h}|_V|u - u_{i,h}|_V \leq c_2h^{1+\theta}|\rho^{-\beta}f|_{2,\Omega}|\rho^{-\alpha/2}f_i|_{2,\Omega} = c_2h^{1+\theta}|\rho^{-\beta}f|_{2,\Omega}|\rho^{\alpha/2}(u_i - u_{i,h})|_{2,\Omega}$, откуда вытекает вторая оценка теоремы.

В случае $f \in L_\infty(\Omega)$ требуемая оценка получается в силу того, что при $\alpha < 1$ имеем $L_\infty(\Omega) \subset L_{2,\alpha/2}(\Omega)$. Теорема доказана.

Работа выполнена при финансовой поддержке Российского фонда фундаментальных исследований (код проекта 98 — 01 — 00260).

Литература

1. *Смирнов М. М.* Вырождающиеся эллиптические и гиперболические уравнения. М., 1966.

2. *Гусман Ю. А., Оганесян Л. А.* // Журн. вычислит. математики и мат. физики. 1965. Т. 5, № 2. С. 351 — 357.

3. *Катрахов В. В., Катрахова А. А.* // Докл. АН СССР. 1984. Т. 279, № 4. С. 799 — 802.

4. *Рукавишникова Е. И.* О порядке сходимости метода конечных элементов для эллиптической краевой задачи с вырождением. Владивосток, 1987. С. 26 — 52.

5. *Ляшко А. Д., Тимербаев М. Р.* // Дифференц. уравнения. 1993. Т.29, № 7. С. 1210 — 1215.

6. *Тимербаев М. Р., Ляшко А. Д.* // Дифференц. уравнения. 1994. Т.30, № 7. С. 1239 — 1243.

7. *Тимербаев М. Р.* // Изв. вузов. Математика. 1994. № 9. С. 78 — 86.

8. *Карчевский М. М., Ляшко А. Д., Тимербаев М. Р.* // Дифференц. уравнения. 1999. Т.35, № 2. С. 232 — 237.

9. *Сьярле Ф.* Метод конечных элементов для эллиптических задач. М., 1980.

10. *Никольский С. М.* Приближение функций многих переменных и теоремы вложения. 2-е изд., перераб. М., 1977.

11. *Трибель Х.* Теория интерполяции. Функциональные пространства. Дифференциальные операторы. М., 1980.

12. *Тимербаев М. Р.* // Изв. вузов. Математика. 1991. № 9. С. 56 — 60.

13. *Харди Г., Литтлвуд Дж. Е., Полиа Г.* Неравенства. М., 1948.

14. *Тимербаев М. Р.* // Изв. вузов. Математика. 1992. № 10. С. 54 — 60.

15. *Zlamal M.* // Numer. Math. 1968. N 12. P. 394 — 402.

Казанский государственный университет
им. В. И. Ульянова-Ленина

Поступила в редакцию
1 марта 2000 г.