В. Ю. Попов, Марковские свойства бернсайдовских многообразий полугрупп, *Алгебра и логика*, 2003, том 42, номер 1, 94–106

https://www.mathnet.ru/al19

Алгебра и логика, 42, № 1 (2003), 94—106

УДК 512:519.4

МАРКОВСКИЕ СВОЙСТВА БЕРНСАЙДОВСКИХ МНОГООБРАЗИЙ ПОЛУГРУПП

В. Ю. ПОПОВ

Свойство алгебраических систем из класса $\mathbf{K}$ называется *инвариантным*, если оно, будучи выполнено в некоторой системе $\mathcal{A}$ из класса $\mathbb{K}$, выполняется также во всех изоморфных ей системах. *Проблема распознавания* данного свойства $\mathbb{A}$ класса алгебраических систем $\mathbf{K}$ состоит в построении алгоритма, распознающего по любой конечно определенной в $\mathbf{K}$ системе, выполняется ли в ней данное свойство. Инвариантное свойство $\mathbb{A}$ класса алгебраических систем $\mathbf{K}$ называется *марковским*, если существуют две конечно определенные в $\mathbf{K}$ системы, одна из которых обладает свойством $\mathbb{A}$, а другая не вложима изоморфно ни в какую конечно определенную в $\mathbf{K}$ систему со свойством $\mathbb{A}$ (см. [1]).

Алгоритмическая нераспознаваемость марковских свойств полугрупп доказана в [2]. В [3, 4] доказано несколько теорем о неразрешимости проблем распознавания различных инвариантных свойств класса групп. Алгоритмическая нераспознаваемость марковских свойств групп доказана в [5—7]. Для ассоциативных алгебр и алгебр Ли нераспознаваемость марковских свойств показана в [8, 9] соответственно. В [10] установлено, что проблема распознавания произвольного марковского свойства $\mathbb{A}$, выполняющегося для некоторой конечно определенной группы с n образующими, неразрешима в классе конечно определенных групп с $n+1$ образующим. Кроме того, известно [11], что марковские свойства конечно определенных полугрупп нераспознаваемы для конечно определенных полугрупп с 2 образующими.

В свете результата из [2] естественно ставить вопрос о распознаваемости марковских свойств наиболее интересных классов полугрупп. Доказательство алгоритмической нераспознаваемости марковских свойств полугрупп получено в [12], инволютированных и инверсных полугрупп — в [13]. Одним из важнейших классов полугрупп являются бернсайдовские полугруппы. Следуя [14, 3.3.4], многообразие полугрупп, заданное тождеством $x^m = x^{m+n}$, будем называть *бернсайдовским многообразием* полугрупп индекса m и периода n. Проблема Бернсайда о периодических группах [15] породила целое направление, посвященное изучению периодических, не локально конечных групп. Этому направлению, его связям с тождествами и многообразиями посвящена книга [16]. Проблема Бернсайда стимулировала исследования в смежных областях, в частности, в теории полугрупп, см., например, [17—20].

Обозначим через $\mathfrak{B}_{r_1,r_2}$ многообразие полугрупп, заданное тождеством $x^{r_1} = x^{r_2}$, где r_1 и r_2 — натуральные числа такие, что $r_1 > r_2 \geqslant 2$.

ТЕОРЕМА. *Любое марковское свойство конечно определенных полугрупп многообразия $\mathfrak{B}_{r_1,r_2}$, которым обладает одноэлементная полугруппа, является алгоритмически нераспознаваемым.*

Как и в [14], *проблемой конечности* называется вопрос о существовании алгоритма, определяющего по произвольной конечно определенной в многообразии $\mathfrak{X}$ полугруппе, является ли она конечной, а *проблемой тривиальности* — вопрос о существовании алгоритма, определяющего по произвольной конечно определенной в $\mathfrak{X}$ полугруппе, является ли она одноэлементной. Свойства полугрупп "быть конечной" и "быть одноэлементной" являются марковскими, этими свойствами обладает одноэлементная полугруппа, поэтому из теоремы вытекает утвердительный ответ на [14, вопр. 3.10]. А именно, справедливо

СЛЕДСТВИЕ. *В многообразии $\mathfrak{B}_{r_1,r_2}$ проблема тривиальности (конечности) неразрешима.*

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО теоремы. Пусть $\mathbb{A}$ — некоторое марковское свойство полугрупп многообразия $\mathfrak{B}_{r_1,r_2}$, которым обладает одноэлементная полугруппа. Рассмотрим следующие три алфавита

$$\mathfrak{U} = \{a_1, a_2, \ldots, a_m\}, \mathfrak{V} = \{b_1, b_2, \ldots, b_n\},\ \mathfrak{X} = \{x\}.$$

Пусть

$$S_1 \rightleftharpoons \langle a_1, a_2, \ldots, a_m \parallel u_{i1} = u_{i2},\ i \in I\rangle —$$

конечно определенная в $\mathfrak{B}_{r_1,r_2}$ полугруппа, не вложимая ни в какую конечно определенную в $\mathfrak{B}_{r_1,r_2}$ полугруппу со свойством $\mathbb{A}$;

$$S_2 \rightleftharpoons \langle b_1, b_2, \ldots, b_n \parallel v_{j1} = v_{j2}, j \in J\rangle —$$

конечно определенная в $\mathfrak{B}_{r_1,r_2}$ полугруппа с неразрешимой проблемой равенства. Полугруппа S_2 получается несложной модификацией конструкции полугруппы $S(M, \phi)$ из [14, 7.2.5] (см., напр., [21]).

Пусть u и v — произвольные элементы из S_2. Обозначим через $S_{u,v}$ полугруппу с множеством образующих $\mathfrak{U} \cup \mathfrak{V} \cup \mathfrak{X}$, заданную в $\mathfrak{B}_{r_1,r_2}$ объединением следующих двух систем определяющих соотношений:

$$\begin{aligned}\{a_t c a_t = a_t \mid 1 \leqslant t \leqslant m\} \cup \{b_t c b_t = b_t \mid 1 \leqslant t \leqslant n\}\\ \cup\{cuc = c\} \cup \{cvc = 0\};\end{aligned} \tag{1}$$

$$\{u_{i1} = u_{i2} \mid i \in I\} \cup \{v_{j1} = v_{j2} \mid j \in J\}. \tag{2}$$

Через F будем обозначать свободную полугруппу с множеством свободных образующих $\mathfrak{U} \cup \mathfrak{V} \cup \mathfrak{X}$.

Предположим, что в полугруппе S_2 имеет место соотношение $u = v$. Тогда из (1) очевидным образом выводится следующее множество соотношений:

$$\{a_t = 0 \mid 1 \leqslant t \leqslant m\} \cup \{b_t = 0 \mid 1 \leqslant t \leqslant n\} \cup \{c = 0\}.$$

Следовательно, если в S_2 имеет место $u = v$, то $S_{u,v}$ изоморфна одноэлементной полугруппе. Отсюда, поскольку свойство $\mathbb{A}$ инвариантно и в силу того, что $\mathbb{A}$ — марковское свойство, которым обладает одноэлементная полугруппа, полугруппа $S_{u,v}$ будет удовлетворять свойству $\mathbb{A}$.

Предположим теперь, что в S_2 имеет место $u \neq v$. Обозначим через S_3 подполугруппу полугруппы $S_{u,v}$, порожденную множеством $\mathfrak{U}$. Покажем, что S_1 и S_3 изоморфны. Для этого достаточно показать, что для любых слов W_1 и W_2 в алфавите $\mathfrak{U}$ равенство $W_1 = W_2$ выполняется в полугруппе S_1 тогда и только тогда, когда это равенство выполняется в S_3. Заметим, что по построению полугруппа S_3 удовлетворяет всем определяющим соотношениям полугруппы S_1. Поэтому, если равенство $W_1 = W_2$ выполняется в S_1, оно выполняется и в S_3. Предположим теперь, что равенство $W_1 = W_2$ выполняется в полугруппе S_3. Тогда существует цепочка равенств

$$W_1 = U_1 = U_2 = \cdots = U_r = W_2 \qquad (3)$$

такая, что каждое последующее слово в этой цепочке получается из предыдущего применением одного из определяющих соотношений полугруппы $S_{u,v}$ или тождества $x^{r_1} = x^{r_2}$. Предположим, что ни одно из слов $U_1, U_2, \ldots, U_r$ не содержит вхождений образующих из множества $\mathfrak{V}$. Тогда ни одно из слов $U_1, U_2, \ldots, U_r$ не содержит вхождений образующих из множества $\mathfrak{X}$. Следовательно, слова $U_1, U_2, \ldots, U_r$ записываются в алфавите $\mathfrak{U}$. Поэтому в (3) использовались только определяющие соотношения $\{u_{i1} = u_{i2} \mid i \in I\}$ и тождество $x^{r_1} = x^{r_2}$. Таким образом, цепочка (3) является выводом соотношения $W_1 = W_2$ в полугруппе S_1, что и требовалось.

Покажем, что если равенство $W_1 = W_2$ выполняется в полугруппе S_3, то существует цепочка (3), в которой ни одно из слов $U_1, U_2, \ldots, U_r$ не содержит образующих из множества $\mathfrak{V}$. Предположим противное. Тогда для любой цепочки вида (3) по крайней мере в одном из слов $U_1, U_2, \ldots, U_r$ есть вхождение образующих из множества $\mathfrak{V}$. Для произвольного слова W обозначим через $\ell(W)$ количество максимальных подслов слова W над алфавитом $\mathfrak{V}$. Рассмотрим цепочку (3) такую, что число $L = \max\{\ell(U_1), \ell(U_2), \ldots, \ell(U_r)\}$ и количество слов U_i, для которых $L = \ell(U_i)$, минимальны.

ЛЕММА 1. *Пусть w — слово в алфавите $\mathfrak{U}$. Если в полугруппе $S_{u,v}$ выполняется равенство $w = w'$, где w' — слово в алфавите $\mathfrak{U} \cup \mathfrak{V} \cup \mathfrak{X}$, то слово w' либо записывается в алфавите $\mathfrak{U}$, либо представимо в виде*

$U_1cU_2c\dots U_qcU_{q+1}$, где $U_1, U_2, \dots, U_{q+1}$ — непустые слова, удовлетворяющие следующим условиям:

1) $U_1, U_2, \dots, U_q, U_{q+1}$ — слова в алфавите $\mathfrak{U} \cup \mathfrak{V}$;

2) если для некоторого i, $1 \leqslant i \leqslant q+1$, слово U_i содержит букву из $\mathfrak{U}$, то все буквы слова U_i принадлежат $\mathfrak{U}$;

3) если для некоторого i, $1 \leqslant i \leqslant q+1$, слово U_i содержит букву из $\mathfrak{V}$, то все буквы слова U_i принадлежат $\mathfrak{V}$.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Достаточно показать, что применение тождества $x^{r_1} = x^{r_2}$ или какого-либо соотношения полугруппы $S_{u,v}$ к слову вида $U_1cU_2c\dots U_qcU_{q+1}$ сохраняет вид слова.

Допустим, что слово $U_1cU_2c\dots U_qcU_{q+1}$ содержит подслово x^{r_1} или x^{r_2}. Если для некоторого i существуют (возможно, пустые) слова U_i', U_i'' такие, что $U_i = U_i'x^{r_1}U_i''$ или $U_i = U_i'x^{r_2}U_i''$, то слово

$$U_1cU_2c\dots U_{i-1}cU_i'x^{\alpha}U_i''cU_{i+1}cU_{i+2}c\dots U_qcU_{q+1}$$

удовлетворяет тем же условиям, что и $U_1cU_2c\dots U_qcU_{q+1}$. Поэтому в дальнейшем будем предполагать, что в слове x содержится буква c. Из определения слова $U_1cU_2c\dots U_qcU_{q+1}$, и условия $r_1 > r_2 \geqslant 2$ вытекает, что $x = V_1cU_ic\dots U_{i+p}cV_2$, где V_1 — подслово слова U_{i-1}, V_2 — подслово слова U_{i+p+1}, причем по крайней мере одно из них непусто. Поскольку $r_1 > r_2 \geqslant 2$, слово $U_1cU_2c\dots U_qcU_{q+1}$ содержит подслово V_2V_1. Поэтому слова V_1 и V_2 оба состоят из букв либо алфавита $\mathfrak{U}$, либо алфавита $\mathfrak{V}$. Отсюда, если в слове $U_1cU_2c\dots U_qcU_{q+1}$ заменить подслово вида $(V_1cU_ic\dots U_{i+p}cV_2)^{r_1}$ на подслово вида $(V_1cU_ic\dots U_{i+p}cV_2)^{r_2}$ или наоборот, получим слово, удовлетворяющее условиям леммы.

Соотношения полугруппы $S_{u,v}$ рассмотриваются по той же схеме. Лемма доказана.

ЛЕММА 2. *Пусть w — слово в алфавите $\mathfrak{U}$. Равенство $w = 0$ выполняется в полугруппе $S_{u,v}$ в том и только в том случае, если равенство $u = v$ выполняется в полугруппе S_2.*

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Предположим, что $w = 0$ выполняется в $S_{u,v}$. Тогда существует цепочка равенств вида $w = u_1 = u_2 = \dots = u_r$ такая, что каждое последующее слово получается из предыдущего применением одного из соотношений (1), (2) или тождества $x^{r_1} = x^{r_2}$; для любого $1 \leqslant i \leqslant$ $\leqslant r-1$ слово u_i не содержит подслова 0; слово u_r содержит подслово 0. Без ограничения общности можно считать, что число r минимально, число L минимально для цепочек длины r, количество слов u_i, для которых $L = \ell(u_i)$, минимально для цепочек длины r с числом L. Из определения цепочки $w = u_1 = u_2 = \cdots = u_r$ вытекает, что для некоторых слов u'_{r-1}, u''_{r-1} имеет место следующая система равенств: $u_{r-1} = u'_{r-1}cvcu''_{r-1}$, $u_r =$ $= u'_{r-1}0u''_{r-1}$.

В силу леммы 1 слово u_i, $1 \leqslant i \leqslant r-1$, представимо в виде $U_1^i c U_2^i c \ldots U_q^i c U_{q+1}^i$, где $U_1^i, U_2^i, \ldots, U_{q+1}^i$ — слова, удовлетворяющие условиям леммы 1.

Очевидно, найдется s такое, что для любого i, $1 \leqslant i \leqslant s-1$, имеют место неравенства $\ell(u_i) \leqslant \ell(u_s)$ и $\ell(u_s) > \ell(u_{s+1})$ или $s = r-1$.

Рассмотрим случай, когда $s = r-1$. Если $\ell(u_s) > \ell(u_{s+1})$, рассуждения аналогичны. Очевидно, что слово u_{r-1} получается из слова u_{r-2} либо при помощи соотношения из (2), либо тождества $x^{r_1} = x^{r_2}$, либо соотношения из множества

$$\{a_t c a_t = a_t \mid 1 \leqslant t \leqslant m\} \cup \{b_t c b_t = b_t \mid 1 \leqslant t \leqslant n\} \cup \{cuc = c\} \qquad (4)$$

справа налево.

Допустим, что $\ell(u_{r-2}) < \ell(u_{r-1})$. Тогда слово u_{r-1} получается из слова u_{r-2} либо применением тождества $x^{r_1} = x^{r_2}$, либо соотношения из (4) справа налево. С учетом предположения $\ell(u_{r-2}) < \ell(u_{r-1})$, слово u_{r-1} содержит подслово cvc тогда и только тогда, когда слово u_{r-2} содержит подслово cvc или слова u, v графически равны. Слово u_{r-2} не содержит подслова cvc, поскольку это противоречит предположению о минимальности числа r. Следовательно, слова u и v графически равны.

Допустим теперь, что $\ell(u_{r-2}) = \ell(u_{r-1})$. Найдется число s такое, что $\ell(u_{s-1}) < \ell(u_s)$ и $\ell(u_s) = \ell(u_{s+1}) = \cdots = \ell(u_{r-1})$. Из последнего соотношения вытекает, что цепочка равенств $u_s = u_{s+1} = \cdots = u_{r-1}$ получается при помощи соотношений из (2) или тождества $x^{r_1} = x^{r_2}$. Если для некоторого

i, $s \leqslant i \leqslant r-2$, слово u_{i+1} получается из слова u_i применением тождества $x^{r_1} = x^{r_2}$, то x — слово в алфавите $\mathfrak{U}$ или в алфавите $\mathfrak{V}$. Поэтому цепочка $u_s = u_{s+1} = \dots = u_{r-1}$ представима в виде

$$U_1^s c U_2^s c \dots U_q^s c U_{q+1}^s = U_1^{s+1} c U_2^{s+1} c \dots U_q^{s+1} c U_{q+1}^{s+1} = \dots \\ = U_1^{r-1} c U_2^{r-1} c \dots U_q^{r-1} c U_{q+1}^{r-1}. \tag{5}$$

Ясно, что выполнимость цепочки (5) в $S_{u,v}$ равносильна выполнимости следующих цепочек

$$U_1^s = U_1^{s+1} = \dots = U_1^{r-1}, U_2^s = U_2^{s+1} = \dots = U_2^{r-1}, \dots, \\ U_{q+1}^s = U_{q+1}^{s+1} = \dots = U_{q+1}^{r-1} \tag{6}$$

в S_1 и S_2.

Непосредственно из определения цепочки $u_s = u_{s+1} = \dots = u_{r-1}$ следует, что в (6) для любого i существует единственное j такое, что слово U_j^i отличается от слова U_j^{i-1}. Так как $u_{r-1} = u'_{r-1} cvc u''_{r-1}$, для некоторого j_0 имеет место равенство $U_{j_0}^{r-1} = v$.

Предположим, что для некоторых $i_1 < i_2$ слова $U_{j_0}^{i_1}$ и $U_{j_0}^{i_2}$ равны. Легко понять, что в этом случае цепочка (5) равносильна цепочке

$$U_1^s c U_2^s c \dots U_q^s c U_{q+1}^s = U_1^{s+1} c U_2^{s+1} c \dots U_q^{s+1} c U_{q+1}^{s+1} = \dots \\ = U_1^{i_1-1} c U_2^{i_1-1} c \dots U_q^{i_1-1} c U_{q+1}^{i_1-1} \\ = U_1^{i_1} c U_2^{i_1} c \dots U_{j_0-1}^{i_1} c U_{j_0}^{i_2} c U_{j_0+1}^{i_1} c U_{j_0+2}^{i_1} c \dots U_q^{i_1} c U_{q+1}^{i_1} \\ = U_1^{i_1+1} c U_2^{i_1+1} c \dots U_{j_0-1}^{i_1+1} c U_{j_0}^{i_2+1} c U_{j_0+1}^{i_1+1} c U_{j_0+2}^{i_1+1} c \dots U_q^{i_1+1} c U_{q+1}^{i_1+1} = \dots \\ = U_1^{i_1+r-i_2-1} c U_2^{i_1+r-i_2-1} c \dots U_{j_0-1}^{i_1+r-i_2-1} c U_{j_0}^{r-1} c U_{j_0+1}^{i_1+r-i_2-1} c U_{j_0+2}^{i_1+r-i_2-1} c \dots \\ \dots U_q^{i_1+r-i_2-1} c U_{q+1}^{i_1+r-i_2-1} \\ = U_1^{i_1+r-i_2} c U_2^{i_1+r-i_2} c \dots U_{j_0-1}^{i_1+r-i_2} c U_{j_0}^{r-1} c U_{j_0+1}^{i_1+r-i_2} c U_{j_0+2}^{i_1+r-i_2} c \dots \\ \dots U_q^{i_1+r-i_2} c U_{q+1}^{i_1+r-i_2} = \dots = U_1^{r-1} c U_2^{r-1} c \dots U_q^{r-1} c U_{q+1}^{r-1}. \tag{7}$$

Очевидно, что в (7) подслово cvc содержится во всех словах, начиная с номера i_1+r-i_2-1. Это противоречит предположению о минимальности числа r. Следовательно, для любых i_1, i_2 ($i_1 < i_2$) слова $U_{j_0}^{i_1}$ и $U_{j_0}^{i_2}$ различны.

Рассмотрим равенство $u_{s-1} = u_s$. Так как $\ell(u_{s-1}) < \ell(u_s)$, слово u_s получается из слова u_{s-1} применением справа налево тождества $x^{r_1} = x^{r_2}$ или одного из соотношений (4). Рассмотрим только последний случай. Тождество $x^{r_1} = x^{r_2}$ рассматривается аналогично.

Если слово u_s получается из слова u_{s-1} применением справа налево одного из соотношений $a_t c a_t = a_t$, $b_t c b_t = b_t$, то для некоторого j имеет место следующая система равенств: $U_j^{s-1} = V_j^s z V_{j+1}^s$, $V_j^s z = U_j^s$, $zV_{j+1}^s = U_{j+1}^s$, $U_i^{s-1} = U_i^s$, $U_l^{s-1} = U_{l+1}^s$, где $1 \leqslant i < j$, $j < l \leqslant q$, $z \in \{a_t, b_t\}$. При этом u_{s-1} можно представить в виде $U_1^{s-1} c U_2^{s-1} c \dots U_{q-1}^{s-1} c U_q^{s-1}$. В этом случае цепочка $u_{s-1} = u_s = \dots = u_{r-1}$ равносильна цепочке, начинающейся с $U_1^{s-1} c U_2^{s-1} c \dots U_{q-1}^{s-1} c U_q^{s-1}$, в которой первые $r-2-s$ равенств получаются последовательной заменой $U_{j_0}^s$ на $U_{j_0}^{s+1}$, $U_{j_0}^{s+1}$ на $U_{j_0}^{s+2}$ и т. д., а последнее равенство — применением одного из соотношений $a_t c a_t = a_t$, $b_t c b_t = b_t$. Это противоречит предположению о том, что количество слов u_i, для которых $L = \ell(u_i)$, минимально для цепочек длины r с числом L.

Если u_s получается из u_{s-1} применением справа налево соотношения $cuc = c$, то либо $u = U_{j_0}^s = U_{j_0}^{s+1} = \dots = U_{j_0}^{r-2} = v$ — вывод соотношения $u = v$ в S_2, либо, как и в случае соотношений $a_t c a_t = a_t$, $b_t c b_t = b_t$, существует цепочка равенств, в которой количество слов u_i, для которых $L = \ell(u_i)$, будет меньше, чем в исходной цепочке. Лемма доказана.

Из леммы 2 вытекает, что какое-либо слово в цепочке (3) содержит подслово 0 лишь в том случае, когда $u = v$, а согласно предположению $u \neq v$. Поэтому в дальнейшем можно считать, что ни одно слово в цепочке (3) не содержит подслова 0.

Предположим, что $\ell(U_s) = L$ и, кроме того, для любого i, $1 \leqslant i \leqslant s-1$, имеет место $\ell(U_i) < \ell(U_s)$; для любого j, $s \leqslant j \leqslant s+t$, имеет место $\ell(U_j) = \ell(U_s)$ и $\ell(U_{s+t+1}) < \ell(U_s)$. Для любых слов U и V, если V получается из U применением соотношения из (1), имеем $\ell(U) = \ell(V) \pm 2$. В силу того, что для любого j, $s \leqslant j \leqslant s+t$, имеет место $\ell(U_j) = \ell(U_s)$, при получении цепочки $U_s = U_{s+1} = \dots = U_{s+t}$ использовались только соотношения из (2) или тождество $x^{r_1} = x^{r_2}$. Тогда для любого i, $s \leqslant i \leqslant s+t$, слово U_i имеет вид $U_1^i c U_2^i c \dots U_q^i c U_{q+1}^i$, где $U_1^i, U_2^i, \dots, U_q^i, U_{q+1}^i$ —

непустые слова в алфавите $\mathfrak{U}\cup\mathfrak{V}$. Кроме того, по лемме 1 для любых i и j слово U_j^i состоит из букв либо только алфавита $\mathfrak{U}$, либо только алфавита $\mathfrak{V}$; если для некоторого i слово U_j^i состоит из букв алфавита $\mathfrak{U}$ ($\mathfrak{V}$), то и для всех остальных значений $i \in \{s, s+1, \dots, s+t\}$ слово U_j^i состоит из букв алфавита $\mathfrak{U}$ ($\mathfrak{V}$). Отсюда и в силу того, что цепочка $U_s = U_{s+1} = \dots = U_{s+t}$ получается при помощи соотношений из (2) и тождества $x^{r_1} = x^{r_2}$, вытекает, что соотношение $U_s = U_{s+1} = \dots = U_{s+t}$ выполняется в $S_{u,v}$ тогда и только тогда, когда в S_1 и S_2 выполняются следующие цепочки:

$$U_1^s = U_1^{s+1} = \dots = U_1^{s+t}, U_2^s = U_2^{s+1} = \dots = U_2^{s+t}, \dots,$$

$$U_{q+1}^s = U_{q+1}^{s+1} = \dots = U_{q+1}^{s+t}.$$

В силу того же факта справедливо следующее: если для некоторых i и j имеет место соотношение $F \models U_j^i \neq U_j^{i+1}$, то для любого $l \neq j$ имеет место $F \models U_l^i = U_l^{i+1}$. Поскольку для любого $i \in \{1, 2, \dots, s-1\}$ имеет место неравенство $\ell(U_i) < \ell(U_s)$ и ни одно слово в цепочке $W_1 = U_1 = U_2 = \dots = U_r = W_2$ не содержит подслова 0, слово U_s получается из U_{s-1} применением справа налево одного из соотношений, взятых из (4) или при помощи тождества $x^{r_1} = x^{r_2}$. Так как для любого $j \in \{s, s+1, \dots, s+t\}$ справедливо $\ell(U_j) = \ell(U_s)$ и $\ell(U_{s+t+1}) < \ell(U_s)$, слово U_{s+t+1} получается из U_{s+t} применением слева направо одного из соотношений, взятых из (4), или при помощи тождества $x^{r_1} = x^{r_2}$. Следовательно, слова $U_1^s c U_2^s c \dots U_q^s c U_{q+1}^s$ и $U_1^{s+t} c U_2^{s+t} c \dots U_q^{s+t} c U_{q+1}^{s+t}$ содержат подслова, принадлежащие множеству $\{a_i c a_i, b_j c b_j, cuc \mid 1 \leqslant i \leqslant m,\ 1 \leqslant j \leqslant n\}$, или подслова вида x^{r_1}.

Рассмотрим только случай, когда слово U_s получается из U_{s-1} применением справа налево соотношения $a_t c a_t = a_t$, слово U_{s+t+1} — из U_{s+t} применением слева направо соотношения $cuc = c$. Остальные 15 случаев рассматриваются по той же схеме.

Так как U_s получается из U_{s-1} применением справа налево соотношения $a_t c a_t = a_t$, найдется натуральное число i_0 такое, что $U_{i_0}^{s-1} = V_{i_0}^{s-1} a_t W_{i_0}^{s-1}, U_i^{s-1} = U_i^s, U_j^{s-1} = U_{j+1}^s, U_{i_0}^s = V_{i_0}^{s-1} a_t, U_{i_0+1}^s = a_t W_{i_0}^{s-1}$, $i_0 < j \leqslant q$, $1 \leqslant i < i_0$. При этом $U_{s-1} = U_1^{s-1} c U_2^{s-1} c \dots U_{q-1}^{s-1} c U_q^{s-1}$, $U_s = U_1^s c U_2^s c \dots U_q^s c U_{q+1}^s$. Так как U_{s+t+1} получается из U_{s+t} применением слева направо соотношения $cuc = c$, найдется натуральное число j_0 такое, что $U_{j_0}^{s+t} = u$, $U_i^{s+t} = U_i^{s+t+1}$, $U_{j+1}^{s+t} = U_j^{s+t+1}$, $j_0 \leqslant j \leqslant q$, $1 \leqslant i < j_0$. При этом $U_{s+t} = U_1^{s+t} c U_2^{s+t} c \ldots U_q^{s+t} c U_{q+1}^{s+t}$, $U_{s+t+1} = U_1^{s+t+1} c U_2^{s+t+1} c \ldots U_{q-1}^{s+t+1} c U_q^{s+t+1}$.

В силу того, что $U_{i_0}^s = V_{i_0}^{s-1} a_t, U_{i_0+1}^s = a_t W_{i_0}^{s-1}, U_{j_0}^{s+t} = u$, выполняется одно из следующих двух неравенств: $j_0 < i_0$, $j_0 > i_0 + 1$. Пусть для определенности имеет место соотношение $j_0 < i_0$.

Заметим, что по определению цепочки (3) для любого l, $s+1 \leqslant l \leqslant s+t$, выполняется одно из следующих четырех условий:

1) слова $U_{i_0}^{l-1}$ и $U_{i_0}^l$, $U_{i_0+1}^{l-1}$ и $U_{i_0+1}^l$ попарно графически равны;

2) слова $U_{j_0}^{l-1}$ и $U_{j_0}^l$, $U_{i_0+1}^{l-1}$ и $U_{i_0+1}^l$ попарно графически равны;

3) слова $U_{j_0}^{l-1}$ и $U_{j_0}^l$, $U_{i_0}^{l-1}$ и $U_{i_0}^l$ попарно графически равны;

4) слова $U_{j_0}^{l-1}$ и $U_{j_0}^l$, $U_{i_0}^{l-1}$ и $U_{i_0}^l$, $U_{i_0+1}^{l-1}$ и $U_{i_0+1}^l$ попарно графически равны.

Предположим, что для любого l, $s+1 \leqslant l \leqslant s+t$, слова $U_{j_0}^{l-1}$ и $U_{j_0}^l$ различны; из сказанного выше вытекает, что слова $U_{i_0}^{l-1}$ и $U_{i_0}^l$, $U_{i_0+1}^{l-1}$ и $U_{i_0+1}^l$ попарно графически равны. Следовательно, цепочка (3) равносильна цепочке

$$\begin{gathered}
W_1 = U_1 = U_2 = \cdots = U_{s-2} = U_{s-1} \\
= U_1^s c U_2^s c \ldots U_{j_0-1}^s c U_{j_0}^{s+1} c U_{j_0+1}^s c U_{j_0+2}^s c \ldots \\
\ldots U_{i_0-1}^s c V_{i_0}^{s-1} a_t W_{i_0}^{s-1} c U_{i_0+2}^s c U_{i_0+3}^s c \ldots U_q^s c U_{q+1}^s \\
= U_1^s c U_2^s c \ldots U_{j_0-1}^s c U_{j_0}^{s+2} c U_{j_0+1}^s c U_{j_0+2}^s c \ldots \\
\ldots U_{i_0-1}^s c V_{i_0}^{s-1} a_t W_{i_0}^{s-1} c U_{i_0+2}^s c U_{i_0+3}^s c \ldots U_q^s c U_{q+1}^s = \ldots \\
= U_1^s c U_2^s c \ldots U_{j_0-1}^s c U_{j_0}^{s+t} c U_{j_0+1}^s c U_{j_0+2}^s c \ldots \\
\ldots U_{i_0-1}^s c V_{i_0}^{s-1} a_t W_{i_0}^{s-1} c U_{i_0+2}^s c U_{i_0+3}^s c \ldots U_q^s c U_{q+1}^s \\
= U_1^s c U_2^s c \ldots U_{j_0-1}^s c U_{j_0+1}^s c U_{j_0+2}^s c \ldots \\
\ldots U_{i_0-1}^s c V_{i_0}^{s-1} a_t W_{i_0}^{s-1} c U_{i_0+2}^s c U_{i_0+3}^s c \ldots U_q^s c U_{q+1}^s \\
= U_1^s c U_2^s c \ldots U_{j_0-1}^s c U_{j_0+1}^s c U_{j_0+2}^s c \ldots \\
\ldots U_{i_0-1}^s c V_{i_0}^{s-1} a_t c a_t W_{i_0}^{s-1} c U_{i_0+2}^s c U_{i_0+3}^s c \ldots U_q^s c U_{q+1}^s \\
= U_{s+t+2} = U_{s+t+3} = \cdots = U_r = W_2,
\end{gathered}$$

получаем противоречие с тем, что количество слов u_i, для которых $L = \ell(u_i)$, минимально для цепочек длины r с числом L.

Предположим теперь, что для некоторого l_0, $s+1 \leqslant l_0 \leqslant s+t$, слова $U_{j_0}^{l_0-1}$ и $U_{j_0}^{l_0}$ графически равны. Без ограничения общности, можно считать, что l_0 — максимальное число с таким условием. Так как $U_{j_0}^{l_0-1}$ и $U_{j_0}^{l_0}$ графически равны, существует, причем единственное, k такое, что $U_k^{l_0-1}$ и $U_k^{l_0}$ различны. Пусть для определенности $k > j_0$. В этом случае цепочка (3) равносильна цепочке:

$$
\begin{gathered}
W_1 = U_1 = U_2 = \cdots = U_{l_0-2} = U_{l_0-1} \\
= U_1^{l_0} c U_2^{l_0} c \ldots U_{j_0-1}^{l_0} c U_{j_0}^{l_0+1} c U_{j_0+1}^{l_0} c U_{j_0+2}^{l_0} c \ldots \\
\cdots U_{k-1}^{l_0} c U_k^{l_0-1} c U_{k+1}^{l_0} c U_{k+2}^{l_0} c \ldots U_q^{l_0} c U_{q+1}^{l_0} \\
= U_1^{l_0} c U_2^{l_0} c \ldots U_{j_0-1}^{l_0} c U_{j_0}^{l_0+2} c U_{j_0+1}^{l_0} c U_{j_0+2}^{l_0} c \ldots \\
\ldots U_{k-1}^{l_0} c U_k^{l_0-1} c U_{k+1}^{l_0} c U_{k+2}^{l_0} c \ldots U_q^{l_0} c U_{q+1}^{l_0} = \ldots \\
= U_1^{l_0} c U_2^{l_0} c \ldots U_{j_0-1}^{l_0} c U_{j_0}^{s+t} c U_{j_0+1}^{l_0} c U_{j_0+2}^{l_0} c \ldots \\
\ldots U_{k-1}^{l_0} c U_k^{l_0-1} c U_{k+1}^{l_0} c U_{k+2}^{l_0} c \ldots U_q^{l_0} c U_{q+1}^{l_0} \\
= U_1^{l_0} c U_2^{l_0} c \ldots U_{j_0-1}^{l_0} c U_{j_0+1}^{l_0} c U_{j_0+2}^{l_0} c \ldots U_{k-1}^{l_0} c U_k^{l_0-1} c U_{k+1}^{l_0} c U_{k+2}^{l_0} c \ldots U_q^{l_0} c U_{q+1}^{l_0} \\
= U_1^{l_0} c U_2^{l_0} c \ldots U_{j_0-1}^{l_0} c U_{j_0+1}^{l_0} c U_{j_0+2}^{l_0} c \ldots U_{k-1}^{l_0} c U_k^{l_0} c U_{k+1}^{l_0} c U_{k+2}^{l_0} c \ldots U_q^{l_0} c U_{q+1}^{l_0} \\
= U_{s+t+2} = U_{s+t+3} = \cdots = U_r = W_2,
\end{gathered}
$$

получаем противоречие с тем, что количество слов u_i, для которых $L = \ell(u_i)$, минимально для цепочек длины r с числом L.

Таким образом, получили противоречие с тем, что для любой цепочки вида $W_1 = U_1 = U_2 = \cdots = U_r = W_2$ по крайней мере одно из слов $U_1, U_2, \ldots, U_r$ содержит вхождение образующих из множества $\mathfrak{V}$. Отсюда, если равенство $W_1 = W_2$ выполняется в S_3, то оно выполняется и в S_1. Следовательно, полугруппы S_1 и S_3 изоморфны. Поскольку S_1 не обладает свойством $\mathbb{A}$, $\mathbb{A}$ — инвариантное свойство и S_1 не вложима в конечно определенную полугруппу со свойством $\mathbb{A}$, S_3 тоже не обладает свойством $\mathbb{A}$ и не вложима в конечно определенную полугруппу со свойством $\mathbb{A}$. Так как S_3 — подполугруппа в $S_{u,v}$, полугруппа $S_{u,v}$ не обладает свойством $\mathbb{A}$.

Итак, $S_{u,v}$ обладает свойством $\mathbb{A}$ тогда и только тогда, когда в S_2

выполняется равенство $u = v$. Отсюда, в силу неразрешимости проблемы равенства в полугруппе S_2, вытекает требуемое. Теорема доказана.

В заключение автор благодарит проф. Ю. М. Важенина за руководство работой.

ЛИТЕРАТУРА

1. *С. И. Адян, В. Г. Дурнев*, Алгоритмические проблемы для групп и полугрупп, Успехи матем. наук, **55**, N 2 (2000), 3–95.
2. *А. А. Марков*, Теория алгорифмов, Труды матем. ин-та АН СССР, **42** (1954), 1—376.
3. *С. И. Адян*, Алгоритмическая неразрешимость проблем распознавания некоторых свойств групп, Докл. АН СССР, **103**, N 4 (1955), 533—535.
4. *С. И. Адян*, Неразрешимость некоторых алгоритмических проблем теории групп, Труды ММО, **5** (1957), 231—298.
5. *С. И. Адян*, Конечно-определенные группы и алгоритмы, Докл. АН СССР, **117**, N 1 (1957), 9—12.
6. *С. И. Адян*, Об алгоритмических проблемах и эффективно-полных классах групп, Докл. АН СССР, **123**, N 1 (1958), 13—16.
7. *M. O. Rabin*, Recursive unsolvability of group theoretic problems, Ann. Math., **67**, N 1 (1958), 172—194.
8. *Л. А. Бокуть*, Неразрешимость некоторых алгоритмических проблем для ассоциативных колец, Алгебра и логика, **9**, N 2 (1970), 137—144.
9. *Л. А. Бокуть*, Неразрешимость некоторых алгоритмических проблем для алгебр Ли, Алгебра и логика, **13**, N 2 (1974), 145—152.
10. *Р. Д. Павлов*, К проблеме распознавания групповых свойств, Матем. заметки, **10**, N 2 (1971), 169—180.
11. *Г. С. Цейтин*, Относительно проблемы распознавания свойств ассоциативных исчислений, Докл. АН СССР, **107**, N 2 (1956), 209—212.
12. *J. W. Addison*, One some points of the theory of recursive functions, Dissertation, Univ. Wisconsin, 1954.
13. *Ю. М. Важенин*, Об алгоритмической нераспознаваемости марковских свойств для некоторых классов полугрупп, Второй Всесоюз. симп. теории полугрупп, Свердловск, 1978, 14.

14. *O. G. Kharlampovich, M. V. Sapir*, Algorithmic problems in varieties, Int. J. Algebra Comput., **5**, N 4-5 (1995), 379—602.
15. *W. Burnside*, On an unsettled question in the theory of discontinuous groups, Q. J. Pure Appl. Math., **33** (1902), 230—237.
16. *С. И. Адян*, Проблема Бернсайда и тождества в группах, М., Наука, 1975.
17. *М. В. Сапир*, Проблемы бернсайдовского типа и конечная базируемость в многообразиях полугрупп, Изв. АН СССР, сер. матем., **51**, N 2 (1987), 319—340.
18. *A. de Luca, S. Varricchio*, On a conjecture of Brown, Semigroup Forum, **46**, N 1 (1993), 116—119.
19. *V. S. Guba*, The word problem for relatively free Burnside semigroup satisfying $T^m = T^{m+n}$, with $m \geq 4$ or $m = 3, n = 1$, Int. J. Algebra Comput., **3**, N 2 (1993), 125—140.
20. *V. S. Guba*, The word problem for relatively free semigroup satisfying $T^m = T^{m+n}$, $m \geq 3$, Int. J. Algebra Comput., **3**, N 3 (1993), 335—347.
21. *В. Ю. Попов*, Об эквациональных теориях классов конечных полугрупп, Алгебра и логика, **40**, N 1 (2001), 97—116.

Поступило 18 января 2001 г.

Адрес автора

ПОПОВ Владимир Юрьевич,

РОССИЯ,

620077, г. Екатеринбург,

ул. Маршала Жукова, д. 11, кв. 6.