Zh. Dou, Questions of completeness for finitely generated function systems $\langle P_{k,E_2}\widetilde{\Omega}\rangle$ and $\langle P_{k,E_2},\widehat{\Omega}\rangle$,
Diskr. Mat., 1990, Volume 2, Issue 3, 128–136

Дискретная математика

том **2** выпуск **3** * **1990**

УДК 519.716

ВОПРОСЫ ПОЛНОТЫ ДЛЯ КОНЕЧНО ПОРОЖДЕННЫХ Ф. С. $\langle P_{k,E_2}, \tilde{\Omega}\rangle$ И $\langle P_{k,E_2}, \hat{\Omega}\rangle$

Ж. Доу

Исследуются конечно порожденные функциональные системы (ф. с.) $\langle P_{k,E_2}, \tilde{\Omega}\rangle$ и $\langle P_{k,E_2}, \hat{\Omega}\rangle$. Для этих ф. с. дается полное описание критериальных систем H_{e_1}, I_{e_1}, Π_{e_1,e_2}, P_{e_1,e_2}.

§ 1. Введение

Функциональные системы (ф. с.) являются одним из важнейших объектов в математической кибернетике [1]. К числу важнейших задач для ф. с. относится задача о полноте.

Пусть $\mathfrak{M}$ — некоторое непустое множество функций, Ω — некоторое множество операций. Назовем $\langle\mathfrak{M}, \Omega\rangle$ *функциональной системой*, если для $\mathfrak{M}'$, $\mathfrak{M}_1$, $\mathfrak{M}_2 \subseteq \mathfrak{M}$ выполнены следующие условия: 1) $\Omega(\mathfrak{M}') \supseteq \mathfrak{M}'$; 2) $\Omega(\Omega(\mathfrak{M}')) = \Omega(\mathfrak{M}')$; 3) если $\mathfrak{M}_1 \supseteq \mathfrak{M}_2$, то $\Omega(\mathfrak{M}_1) \supseteq \Omega(\mathfrak{M}_2)$.

Подмножество $\mathfrak{M}'$ из $\mathfrak{M}$ называется *замкнутым* в $\langle\mathfrak{M}, \Omega\rangle$, если $\Omega(\mathfrak{M}') = \mathfrak{M}'$; $\mathfrak{M}'$ называется замкнутым относительно операции ω из Ω, если $\omega(\mathfrak{M}') = \mathfrak{M}'$; $\mathfrak{M}'$ называется *полным* в $\langle\mathfrak{M}, \Omega\rangle$, если $\Omega(\mathfrak{M}') = \mathfrak{M}$. Назовем замкнутое множество $\mathfrak{M}'$ *предполным классом* ф. с. $\langle\mathfrak{M}, \Omega\rangle$, если $\mathfrak{M}' \subset \mathfrak{M}$, $\Omega(\mathfrak{M}') \neq \mathfrak{M}$, и для любой функции f из $\mathfrak{M} \setminus \mathfrak{M}'$ имеет место равенство $\Omega(\mathfrak{M}' \cup \{f\}) = \mathfrak{M}$. Назовем ф. с. $\langle\mathfrak{M}, \Omega\rangle$ *конечно порожденной*, если $\Omega(\mathfrak{M}') = \mathfrak{M}$ и $\mathfrak{M}'$ конечно.

Пусть $\Theta(\mathfrak{M})$ — система всех замкнутых подмножеств множества $\mathfrak{M}$. Подмножество θ, $\theta \subseteq \Theta(\mathfrak{M})$, называется *критериальной системой* (к. с.), если всякое множество $\mathfrak{M}'$, $\mathfrak{M}' \subseteq \mathfrak{M}$, является полным тогда и только тогда, когда для любого $\mathfrak{N}$ из θ $\mathfrak{M}' \not\subseteq \mathfrak{N}$. Как известно, критериальной системой конечно порожденной ф. с. $\langle\mathfrak{M}, \Omega\rangle$, в которой $\Omega(\varnothing) = \mathfrak{M}$, является множество всех предполных классов данной ф. с.

Пусть Ω — заданный класс Поста [2, 3]. Рассмотрим ф. с. $\langle P_2, \tilde{\Omega}\rangle$, $\langle P_2, \hat{\Omega}\rangle$, $\langle P_{k,E_2}, \tilde{\Omega}\rangle$ и $\langle P_{k,E_2}, \hat{\Omega}\rangle$, где P_2 — все функции алгебры логики; P_{k,E_2} — все функции, определенные на декартовом произведении множества E_k и принимающие значение из E_2; $E_2 = \{0, 1\}$; $E_k = \{0, 1, \ldots, k-1\}$, $k \geqslant 3$; $\tilde{\Omega}$ содержит операции g_+, g_-, π_+, π_- и все ω; $\hat{\Omega} = \tilde{\Omega} \setminus \{\pi_-\}$; где g_+ — добавление конечного числа фиктивных переменных, g_- — изъятие конечного числа фиктивных переменных, π_+ — переименование без отождествления переменных, π_- — отождествленное переименование переменных, ω — такая операция, что существует такая функция f_ω из Ω, что для любого набора функций $h_1, h_2, \ldots, h_l$ из P_2 (или из P_{k,E_2})

$$\omega(h_1, h_2, \ldots, h_l) = f_\omega(h_1, h_2, \ldots, h_l), \qquad l = 0, 1, \ldots$$

Как известно [4], ф. с. $\langle P_{k, E_2}, \tilde{\Omega}\rangle$ (или $\langle P_{k, E_2}, \hat{\Omega}\rangle$, $\langle P_2, \tilde{\Omega}\rangle$, $\langle P_2, \hat{\Omega}\rangle$) конечно порождена тогда и только тогда, когда $\Omega \in \{C_i, A_i, D_j, F_s^{\mu}, F_s^{\infty} \mid i = 1, 2, 3, 4; j = 1, 2, 3; s = 1, \ldots, 8; \mu = 2, 3, \ldots\}$. В [5] найдены критериальные системы всех конечно порожденных ф. с. $\langle P_2, \tilde{\Omega}\rangle$ и $\langle P_2, \hat{\Omega}\rangle$.

О понятии и обозначении ф. с. и классов Поста см. [1, 3].

§ 2. Гомоморфизм, кодирование и ограничение

Рассмотрим ф. с. $\langle P_{\{e_1, e_2\}, E_2}, \tilde{\Omega}\rangle$, где $P_{\{e_1, e_2\}, E_2}$ — все функции, определенные на декартовом произведении множества $\{e_1, e_2\}$ и принимающие значения из E_2; $e_1, e_2 \in E_k$, $e_1 \neq e_2$. Пусть Λ — отображение $P_{\{e_1, e_2\}, E_2}$ в P_2. Назовем отображение Λ *гомоморфизмом* ф. с. $\langle P_{\{e_1, e_2\}, E_2}, \tilde{\Omega}\rangle$ в ф. с. $\langle P_2, \tilde{\Omega}\rangle$ [6], если для любой l-местной операции ω из $\tilde{\Omega}$, $\omega \notin \{g_+, g_-, \pi_+, \pi_-\}$, и произвольных функций $f_1, f_2, \ldots, f_l$ из $P_{\{e_1, e_2\}, E_2}$

$$\omega = (\Lambda(f_1), \Lambda(f_2), \ldots, \Lambda(f_l)) = \Lambda(\omega(f_1, f_2, \ldots, f_l)).$$

Пусть μ — отображение множества $\{e_1, e_2\}$ в E_2: $\mu(e_1) = 0$, $\mu(e_2) = 1$; ψ — отображение $P_{\{e_1, e_2\}, E_2}$ в P_2. Для любой n-местной функции f из $P_{\{e_1, e_2\}, E_2}$ и некоторой n-местной функции из P_2 говорят, что $\psi(f) = \varphi$, если для любого набора $(\alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_n)$ из $\{e_1, e_2\}$

$$f(\alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_n) = \varphi(\mu(\alpha_1), \mu(\alpha_2), \ldots, \mu(\alpha_n)).$$

Нетрудно видеть, что ψ является гомоморфизмом ф. с. $\langle P_{\{e_1, e_2\}, E_2}, \tilde{\Omega}\rangle$ в ф. с. $\langle P_2, \tilde{\Omega}\rangle$ (на основе отображения μ). Если $\psi(f) = \varphi$, то назовем φ *образом* функции f относительно ψ, f — *прообразом* функции φ относительно ψ. Обозначим через $\psi(\mathfrak{M})$ множество образов всех функций из $\mathfrak{M}$ относительно ψ. Очевидно, что отображение ψ^{-1} на основе μ^{-1} также является гомоморфизмом ф. с. $\langle P_2, \tilde{\Omega}\rangle$ в ф. с. $\langle P_{\{e_1, e_2\}, E_2}, \tilde{\Omega}\rangle$, где $\mu^{-1}(0) = e_1$, $\mu^{-1}(1) = e_2$, т. е. ψ — изоморфизм между этими ф. с. В то же время ψ — изоморфизм между ф. с. $\langle P_2, \hat{\Omega}\rangle$ и $\langle P_{\{e_1, e_2\}, E_2}, \hat{\Omega}\rangle$.

Пусть $\tau =]\log_2 k[$, где $]a[$ — наименьшее целое число, не меньше a; x_i^1 — переменные, принимающие значения из E_k, $i = 1, 2, \ldots, n_1 < \infty$; x_j^2 — переменные, принимающие значения из E_2, $j = 1, 2, \ldots, n_2 < \infty$; $\sigma = \{\sigma_i(x^1) \in E_2 \mid i = 1, 2, \ldots, \tau\}$. Называем σ *кодированием* множества E_k в E_2, если разным α из E_k соответствуют различные наборы $(\sigma_1(\alpha), \sigma_2(\alpha), \ldots, \sigma_\tau(\alpha))$. Кодирование называется *правильным*, если существует множество $\{e_1, e_2 \mid e_1 \neq e_2\} \subseteq E_k$ такое, что для каждого i $(i = 1, 2, \ldots, \tau)$ $\sigma_i(e_1) = 0$, $\sigma_i(e_2) = 1$.

Пусть $\varphi(x_1^2, x_2^2, \ldots, x_{n_2}^2)$ — n_2-местная функция из P_2, $n_2 = \tau n_1$, σ — некоторое кодирование. Положим

$$\varphi(\sigma) = \varphi(\sigma_1(x_1^1), \ldots, \sigma_\tau(x_1^1), \sigma_1(x_2^1), \ldots, \sigma_\tau(x_2^1), \ldots, \sigma_1(x_{n_1}^1), \ldots, \sigma_\tau(x_{n_1}^1)).$$

Назовем $\varphi(\sigma)$ образом функции φ относительно σ, φ — прообразом функции $\varphi(\sigma)$ относительно σ. Если $\tau(n_1 - 1) < n_2 < \tau n_1$, то, дополнив функцию φ $(\tau n_1 - n_2)$ фиктивными переменными $x_{n_2+1}^r, x_{n_2+2}^2, \ldots, x_{\tau n_1}^2$, получим функцию $\varphi' = g_+(\varphi)$. Тогда считаем $\varphi'(\sigma)$ образом функции φ относительно σ. Очевидно, что

$$\forall \varphi \in P_2 \exists f \in P_{k, E_2} (f = \varphi(\sigma)); \quad \forall f \in P_{k, E_2} \exists \varphi \in P_2 (\varphi(\sigma) = f),$$

где σ — любое заданное кодирование.

Через $\mathfrak{R}(\sigma)$ обозначим множество образов всех функций из $\mathfrak{R}$ относительно σ.

Пусть $f(x_1^1, x_2^1, \ldots, x_n^1) \in P_{k, E_2}$. Когда x_i^1 $(i = 1, \ldots, n)$ принимают только значения из $\{e_1, e_2\}$, где $e_1, e_2 \in E_k$, $e_1 \neq e_2$, из функции f получаем другую функцию, которую обозначим через $f|_{\{e_1, e_2\}}$. Назовем $f|_{\{e_1, e_2\}}$ *ограничением* функции f на $\{e_1, e_2\}$. Очевидно, что

$$\bigcup_{f \in P_{k, E_2}} \{f|_{\{e_1, e_2\}}\} = P_{\{e_1, e_2\}, E_2}.$$

Через $\mathfrak{M}|_{\{e_1, e_2\}}$ обозначим множество ограничений на $\{e_1, e_2\}$ всех функций из $\mathfrak{M}$.

Очевидно, что справедливо соотношение $\forall \varphi \in P_2 \exists f \in P_{k, E_2} (\psi(f|_{\{e_1, e_2\}}) = \varphi)$.

§ 3. Вопросы полноты конечно порожденных ф. с. $\langle P_{k, E_2}, \tilde{\Omega} \rangle$

Пусть $\mathfrak{R} \subseteq P_2$. Обозначим $\mathfrak{R}$ через А, если $\forall \varphi \in \mathfrak{R} (\varphi(x, x, \ldots, x) = x)$; через В, если $\forall \varphi \in \mathfrak{R} (\varphi(x, x, \ldots, x) = 1)$; через Г, если $\forall \varphi \in \mathfrak{R} (\varphi(x, x, \ldots, x) = 0)$; через Δ, если $\forall \varphi \in \mathfrak{R} (\varphi(x, x, \ldots, x) = \bar{x})$.

Пусть $\mathfrak{M} \subseteq P_{k, E_2}$. Обозначим $\mathfrak{M}$ через H_i, если $\forall f \in \mathfrak{M} (f(i, i, \ldots, i) = 0)$; через I_i, если $\forall f \in \mathfrak{M} (f(i, i, \ldots, i) = 1)$; через Π_{ij}, если $\forall f \in \mathfrak{M} (f(i, i, \ldots, i) = f(j, j, \ldots, j))$, где $i \neq j$; через P_{ij}, если $\forall f \in \mathfrak{M} ((f(i, i, \ldots, i) \neq f(j, j, \ldots, j))$, где $i \neq j$; через Π'_{ij}, если $\forall f \in \mathfrak{M} ((f(i, i, \ldots, i) = f(j, j, \ldots, j)) \vee (f(i, i, \ldots, i = 0 \,\&\, f(j, j, \ldots, j) = 1))$, где $i \neq j$; через P^+_{ij}, если $\forall f \in \mathfrak{M} ((f(i, i, \ldots, i) \neq f(j, j, \ldots, j)) \vee (f(i, i, \ldots, i) = f(j, j, \ldots, j) = 1))$, где $i \neq j$; через P^-_{ij}, если $\forall f \in \mathfrak{M} ((f(i, i, \ldots, i) \neq f(j, j, \ldots, j)) \vee (f(i, i, \ldots, i) = f(j, j, \ldots, j) = 0))$, где $i \neq j$.

Утверждение 3.1. 1) *Все* H_i, I_i, Π_{ij}, P_{ij}, Π'_{ij}, P^+_{ij}, P^-_{ij} $(i, j = 0, 1, \ldots, k-1;\ i \neq j)$ *замкнуты относительно* g_+, g_-, π_+ *и* π_-.

2) *Пусть* σ — *правильное кодирование* E_k *в* E_2, *где* $\sigma_i(e_1) = 0$, $\sigma_i(e_2) = 1$, $i = 1, 2, \ldots, \tau$. *Тогда*

$$\begin{aligned}
&(\mathrm{A} \cup \Gamma)(\sigma) = H_{e_1}, && (\Delta \cup \Gamma)(\sigma) = H_{e_2},\\
&(\Delta \cup \mathrm{B})(\sigma) = I_{e_1}, && (\mathrm{A} \cup \mathrm{B})(\sigma) = I_{e_2},\\
&(\mathrm{B} \cup \Gamma)(\sigma) = \Pi_{e_1, e_3}, && (\mathrm{A} \cup \Delta)(\sigma) = P_{e_1, e_2},\\
&(\mathrm{A} \cup \mathrm{B} \cup \Gamma)(\sigma) = \Pi'_{e_1, e_2}, && (\Delta \cup \mathrm{B} \cup \Gamma)(\sigma) = \Pi'_{e_2, e_1},\\
&(\mathrm{A} \cup \mathrm{B} \cup \Delta)(\sigma) = P^+_{e_1, e_2}, && (\mathrm{A} \cup \Gamma \cup \Delta)(\sigma) = P^-_{e_1, e_2}.
\end{aligned}$$

Утверждение 3.2. *Пусть* $\langle P_{k, E_2}, \tilde{\Omega} \rangle$ — *конечно порожденная ф. с.*, $\mathfrak{M}$ — *множество всех одноместных функций из* P_{k, E_2}. *Тогда* $\mathfrak{M}$ *является полной системой в ф. с.* $\langle P_{k, E_2}, \tilde{\Omega} \rangle$.

Через $\Pi_k(\tilde{\Omega})$ и $\Pi'_k(\tilde{\Omega})$ обозначим множества всех предполных классов ф. с. $\langle P_2, \tilde{\Omega} \rangle$ и $\langle P_{k, E_2}, \tilde{\Omega} \rangle$ соответственно. Таким образом, доказано, что имеют место следующие утверждения.

Лемма 3.3. *Пусть* $\Omega \in \{C_i, A_i, D_j, F^2_s \mid i = 1, 2, 3, 4;\ j = 1, 2, 3;\ s = 1, \ldots, 8\}$. *Тогда*

$$\forall \mathfrak{M} \in \Pi'_k(\tilde{\Omega})\, \exists e_1, e_2 \in E_k (\psi(\mathfrak{M}|_{\{e_1, e_2\}}) \in \Pi_k(\tilde{\Omega})).$$

Лемма 3.4. *Пусть* $\Omega \in \{F^\mu_s, F^\infty_s \mid s = 1, 2, 3, 4;\ \mu = 3, 4, \ldots\}$. *Тогда*

$$\forall \mathfrak{M} \in \Pi'_k(\tilde{\Omega}) ((0 \in \mathfrak{M}) \to \exists e_1, e_2 \in E_k (\psi(\mathfrak{M}|_{\{e_1, e_2\}}) \in \Pi_k(\tilde{\Omega}))).$$

Лемма 3.5. *Пусть* $\Omega \in \{F^\mu_s, F^\infty_s \mid s = 5, 6, 7, 8;\ \mu = 3, 4, \ldots\}$. *Тогда*

$$\forall \mathfrak{M} \in \Pi'_k(\tilde{\Omega}) ((I \in \mathfrak{M}) \to \exists e_1, e_2 \in E_k (\psi(\mathfrak{M}|_{\{e_1, e_2\}}) \in \Pi_k(\tilde{\Omega}))).$$

Лемма 3.6. *Пусть* $\Omega \in \{F^\mu_s, F^\infty_s \mid s = 1, 2, 3, 4;\ \mu = 3, 4, \ldots\}$. *Тогда*

$$(P_{k, E_2} \setminus 0^- \in \Pi'_k(\tilde{\Omega}))\ \&\ (\forall \mathfrak{M} \subseteq P_{k, E_2},\ \mathfrak{M} \neq P_{k, E_2} \setminus 0^-,\ 0 \notin \mathfrak{M} (\mathfrak{M} \notin \Pi'_k(\tilde{\Omega}))),$$

где 0^- — *множество всех функций из* P_{k, E_2}, *из которых путем операции* π_- *можно получить* 0.

Лемма 3.7. *Пусть* $\Omega \in \{F_s^{\mu}, F_s^{\infty} \mid s = 5, 6, 7, 8; \mu = 3, 4, \ldots\}$. *Тогда имеет место*

$$(P_{k, E_2} \setminus 0^+ \in \Pi_k'(\tilde{\Omega}))\ \&\ (\forall \mathfrak{M} \subseteq P_{k, E_2},\ \mathfrak{M} \neq P_{k, E_2} \setminus 0^+,\ 1 \notin \mathfrak{M}\ (\mathfrak{M} \notin \Pi_k'(\tilde{\Omega}))),$$

где 0^+ — *множество всех функций из* P_{k, E_2}, *из которых путем операции* π_- *можно получить* 1.

Пусть σ — правильное кодирование. Тогда справедливы следующие утверждения.

Лемма 3.8. *Пусть* $\Omega \in \{C_i, A_i, D_j, F_s^2 \mid i = 1, 2, 3, 4; j = 1, 2, 3; s = 1, \ldots, 8\}$. *Тогда*

$$\forall \mathfrak{R} \in \Pi_k(\tilde{\Omega})\ \forall \sigma\ (\mathfrak{R}(\sigma) \in \Pi_k'(\tilde{\Omega})).$$

Лемма 3.9. *Пусть* $\Omega \in \{F_s^{\mu}, F_s^{\infty} \mid s = 1, 2, 3, 4; \mu = 3, 4, \ldots\}$. *Тогда*

$$\forall \mathfrak{R} \in \Pi_k(\tilde{\Omega})\ \forall \sigma\ ((0 \in \mathfrak{R}) \to (\mathfrak{R}(\sigma) \in \Pi_k'(\tilde{\Omega}))).$$

Лемма 3.10. *Пусть* $\Omega \in \{F_s^{\mu}, F_s^{\infty} \mid s = 5, 6, 7, 8; \mu = 3, 4, \ldots\}$. *Тогда*

$$\forall \mathfrak{R} \in \Pi_k(\tilde{\Omega})\ \forall \sigma\ ((1 \in \mathfrak{R}) \to (\mathfrak{R}(\sigma) \in \Pi_k'(\tilde{\Omega}))).$$

Лемма 3.11. *Пусть ф.с.* $\langle P_{k, E_2}, \tilde{\Omega} \rangle$ *конечно порожденная. Тогда*

$$\forall \mathfrak{M} \in \Pi_k'(\tilde{\Omega})\ (\psi(\mathfrak{M}|_{\{e_1, e_2\}}) \in \Pi_k(\tilde{\Omega}) \to \exists \sigma\ (\mathfrak{M} = (\psi(\mathfrak{M}|_{\{e_1, e_2\}}))(\sigma))).$$

С учетом результатов [5], утверждения 3.1 и леммы 3.8 справедлива

Лемма 3.12. *Пусть* $e, e_1, e_2 \in E_k$, $e_1 \neq e_2$. *Тогда*

1) $\Pi_{e_1, e_2} \in \Pi_k'(\tilde{C}_1) \cap \Pi_k'(F_4^2) \cap \Pi_k'(F_8^2)$;

2) $I_e, \Pi_{e_1, e_2} \in \Pi_k'(\tilde{C}_2) \cap \Pi_k'(\tilde{F}_5^2)$;

3) $H_e, \Pi_{e_1, e_2} \in \Pi_k'(\tilde{C}_3) \cap \Pi_k'(\tilde{F}_1^2)$;

4) $H_e, I_e, \Pi_{e_1, e_2} \in \Pi_k'(\tilde{C}_4)$;

5) $\Pi'_{e_1, e_2} \in \Pi_k'(\tilde{A}_i) \cap \Pi_k'(\tilde{F}_j^2)$, *где* $i = 1, 2, 3, 4$; $j = 2, 3, 6, 7$;

6) $\Pi_{e_1, e_2}, P_{e_1, e_2} \in \Pi_k'(\tilde{D}_3)$;

7) $H_e, I_e, \Pi_{e_1, e_2}, P_{e_1, e_2} \in \Pi_k'(\tilde{D}_1)$;

8) $\Pi'_{e_1, e_2}, P^+_{e_1, e_2}, P^-_{e_1, e_2} \in \Pi_k'(\tilde{D}_2)$;

9) $P^+_{e_1, e_2} \in \Pi_k'(\tilde{F}_i^2)$, *где* $i = 1, 2, 3, 4$;

10) $P^-_{e_1, e_2} \in \Pi_k'(\tilde{F}_i^2)$, *где* $i = 5, 6, 7, 8$.

С учетом результатов [5], утверждения 3.1, лемм 3.6—3.7, 3.9—3.10 справедлива

Лемма 3.13. *Пусть* $e, e_1, e_2 \in E_k$, $e_1 \neq e_2$, $\mu = 3, 4, \ldots$ *Тогда*

1) $H_e, \Pi_{e_1, e_2} \in \Pi_k'(\tilde{F}_1^{\mu}) \cap \Pi_k'(\tilde{F}_1^{\infty})$;

2) $\Pi_{e_1, e_2} \in \Pi_k'(\tilde{F}_i^{\mu}) \cap \Pi_k'(\tilde{F}_j^{\infty})$, *где* $i, j = 4, 8$;

3) $I_e, \Pi_{e_1, e_2} \in \Pi_k'(\tilde{F}_5^{\mu}) \cap \Pi_k'(F_5^{\infty})$;

4) $\Pi'_{e_1, e_2} \in \Pi_k'(\tilde{F}_i^{\mu}) \cap \Pi_k'(\tilde{F}_j^{\infty})$, *где* $i, j = 2, 3, 6, 7$;

5) $P_{k, E_2} \setminus 0^- \in \Pi_k'(\tilde{F}_i^{\mu}) \cap \Pi_k'(\tilde{F}_j^{\infty})$, *где* $i, j = 1, 2, 3, 4$;

6) $P_{k, E_2} \setminus 0^+ \in \Pi_k'(\tilde{F}_i^{\mu}) \cap \Pi_k'(\tilde{F}_j^{\infty})$, *где* $i, j = 5, 6, 7, 8$.

Согласно леммам 3.3—3.7, 3.11 кроме вышеуказанных классов никаких других предполных классов в ф. с. $\langle P_{k, E_2}, \tilde{\Omega} \rangle$ нет, т. е. имеет место

Теорема 3.14. *Пусть* $\Omega \in \{C_i, A_i, D_j, F_s^2, F_s^{\mu}, F_s^{\infty} \mid i = 1, 2, 3, 4; j = 1, 2, 3; s = 1, \ldots, 8; \mu = 3, 4, \ldots\}$. *Тогда критериальная система в ф.с.* $\langle P_{k, E_2}, \tilde{\Omega} \rangle$ *состоит из всех множеств в таблице* 1, *лежащих на таких строчках, где есть знак «$\ni$», соответствующий классу* Ω.

Таблица 1

	C_1	C_2	C_3	C_4	A_1, A_2 A_3, A_4	D_3	D_1	D_2	F_1^2	E_2^2 F_3^2
H_e			○	○			○		○	
I_e		○		○			○			
Π_{e_1, e_2}	○	○	○	○		○	○		○	
P_{e_1, e_2}						○	○			
Π'_{e_1, e_2}					○			○		○
$P^+_{e_1, e_2}$								○	○	○
$P^-_{e_1, e_2}$								○		
$P_{k, E_2} \setminus 0^-$										
$P_{k, E_2} \setminus 0^+$										

	F_4^2	F_5^2	F_6^2 F_7^2	F_8^2	F_1^μ F_1^∞	$F_{2,3}^\mu$ $F_{2,3}^\infty$	F_4^μ F_4^∞	F_5^μ F_5^∞	$F_{6,7}^\mu$ $F_{6,7}^\infty$	F_8^μ F_8^∞
H_e					○					
I_e		○						○		
Π_{e_1, e_2}	○	○		○	○		○	○		○
P_{e_1, e_2}										
Π'_{e_1, e_2}			○			○			○	
$P^+_{e_1, e_2}$	○									
$P^-_{e_1, e_2}$		○	○	○						
$P_{k, E_2} \setminus 0^-$					○	○	○			
$P_{k, E_2} \setminus 0^+$								○	○	○

§ 4. Вопросы полноты конечно порожденных ф. с. $\langle P_{k, E_2}, \hat{\Omega} \rangle$

Пусть $\tilde{a} = (a_1, \ldots, a_n)$ — набор значений переменных функции из P_2. Обозначим $|\tilde{a}|_1 = \sum_{i=1}^{n} a_i$, $|\tilde{a}|_0 = \sum_{i=1}^{n} \overline{a_i}$. Пусть I^2 — множество всех таких функций из P_2, которые удовлетворяют условию: для любых двух наборов $\tilde{a}$ и $\tilde{b}$ таких, что $|\tilde{a}|_1 < 2$, $|\tilde{b}|_1 < 2$, выполнено равенство $f(\tilde{a}) = f(\tilde{b})$. Обозначим через 0^2 множество всех таких функций из P_2, которые удовлетворяют условию: для любых двух наборов $\tilde{a}$ и $\tilde{b}$ таких, что $|\tilde{a}|_0 < 2$ и $|\tilde{b}|_0 < 2$, выполнено равенство $f(\tilde{a}) = f(\tilde{b})$.

Обозначим через $\tilde{a}_e$ такой набор значений переменных функции из P_{k, E_2}, который состоит только из e, $e \in E_k$. Обозначим через $\tilde{a}_{e, e_j}$ любой набор, который состоит только из e и только одного e_j (e, $e_j \in E_k$, $e \neq e_j$).

Пусть $\tau =]\log_2 k[$, $J = \{1, 2, \dots, t\}$, $\{e_1, e_2, \dots, e_t\} \subseteq E_k$, $e \in E_k$, $e \notin \{e_1, e, \dots, e_t\}$. Назовем J *рациональным*, если $t = \tau$.

Пусть $\mathfrak{M} \subseteq P_{k, E_2}$. Обозначим $\mathfrak{M}$ через $F_{e, J}$, если

$$\forall f \in \mathfrak{M} \forall j \in J \, (f(\tilde{a}_e) = f(\tilde{a}_{e, j})).$$

Называем σ кодированием 1-типа на основе e и J, если существуют e и рациональное J такие, что 1) $\sigma_i(e) = 0$, $i = 1, \dots, \tau$; 2) $j \in J$ тогда и только тогда, когда $\sigma_i(e_j) = \begin{cases} 1 & \text{при } i = j, \\ 0 & \text{при } i \neq j. \end{cases}$

Называем σ кодированием 0-*типа* на основе e и J, если существуют e и рациональное J такие, что: 1) $\sigma_i(e) = 1$, $i = 1, \dots, \tau$; 2) $j \in J$ тогда и только тогда, когда $\sigma_i(e_j) = \begin{cases} 1 & \text{при } i \neq j, \\ 0 & \text{при } i = j. \end{cases}$

Утверждение 4.1. 1) *Множества $F_{e, J}$ замкнуты относительно операций g_+, g_-, π_+.*

2) *Пусть σ — кодирование 1-типа на основе e и J. Тогда*

$$I^2(\sigma) = F_{e, J}; \quad (\mathrm{A} \cup \Gamma \cup I^2)(\sigma) = H_e \cup F_{e, J};$$
$$(\Delta \cup \mathrm{B} \cup I^2)(\sigma) = I_e \cup F_{e, J}.$$

3) *Пусть σ—кодирование 0-типа на основе e и J. Тогда*

$$0^2(\sigma) = F_{e, J}; \quad (\Delta \cup \Gamma \cup 0^2)(\sigma) = H_e \cup F_{e, J};$$
$$(\mathrm{A} \cup \mathrm{B} \cup 0^2)(\sigma) = I_e \cup F_{e, J}.$$

Через $\Pi_k(\hat{\Omega})$ и $\Pi'_k(\hat{\Omega})$ обозначим множества всех предполных классов ф. с. $\langle P_2, \hat{\Omega} \rangle$ и $\langle P_{k, E_2}, \hat{\Omega} \rangle$ соответственно. Через $\Pi^1_k(\hat{\Omega})$ и $\Pi^{1'}_k(\hat{\Omega})$ обозначим множества всех предполных классов ф. с. $\langle P_2, \hat{\Omega} \rangle$ и $\langle P_{k, E_2}, \hat{\Omega} \rangle$, замкнутых относительно операции π_-, соответственно. Через $\Pi^2_k(\hat{\Omega})$ и $\Pi^{2'}_k(\hat{\Omega})$ обозначим множества всех предполных классов ф. с. $\langle P_2, \hat{\Omega} \rangle$ и $\langle P_{k, E_2}, \hat{\Omega} \rangle$, не замкнутых относительно π_-, соответственно. Очевидно, что

$$\Pi_k(\hat{\Omega}) = \Pi^1_k(\hat{\Omega}) \cup \Pi^2_k(\hat{\Omega}), \quad \Pi'_k(\hat{\Omega}) = \Pi^{1'}_k(\hat{\Omega}) \cup \Pi^{2'}_k(\hat{\Omega}).$$

Соотношение между $\Pi_k(\hat{\Omega})$ и $\Pi'_k(\hat{\Omega})$ похоже на соотношение между $\Pi_k(\tilde{\Omega})$ и $\Pi'_k(\tilde{\Omega})$, т. е. справедливы следующие утверждения.

Лемма 4.2. *Пусть* $\Omega \in \{C_i, A_i, D_j, F^2_s \mid i = 1, 2, 3, 4; j = 1, 2, 3; s = 1, \dots, 8\}$. *Тогда*

$$\forall \mathfrak{M} \in \Pi'_k(\hat{\Omega}) \, \exists e_1, e_2 \in E_k \, (\psi(\mathfrak{M}|_{\{e_1, e_2\}}) \in \Pi_k(\hat{\Omega})).$$

Лемма 4.3. *Пусть* $\Omega \in \{F^\mu_s, F^\infty_s \mid s = 1, 2, 3, 4; \mu = 3, 4, \dots\}$. *Тогда*

$$\forall \mathfrak{M} \in \Pi'_k(\hat{\Omega}) \, ((0 \in \mathfrak{M}) \longrightarrow \exists e_1, e_2 \in E_k \, (\psi(\mathfrak{M}|_{\{e_1, e_2\}}) \in \Pi_k(\hat{\Omega}))).$$

Лемма 4.4. *Пусть* $\Omega \in \{F^\mu_s, F^\infty_s \mid s = 5, 6, 7, 8; \mu = 3, 4, \dots\}$. *Тогда* $\forall \mathfrak{M} \in \Pi'_k(\hat{\Omega}) \, ((I \in \mathfrak{M}) \to \exists e_1, e_2 \in E_k \, (\psi(\mathfrak{M}|_{\{e_1, e_2\}}) \in \Pi_k(\hat{\Omega})))$.

В следующих 4 леммах σ будет правильным кодированием.

Лемма 4.5. *Пусть* $\Omega \in \{C_i, A_i, D_j, F^2_s \mid i = 1, 2, 3, 4; j = 1, 2, 3; s = 1, \dots, 8\}$. *Тогда*

$$\forall \mathfrak{R} \in \Pi^1_k(\tilde{\Omega}) \, \forall \sigma \, (\mathfrak{R}(\sigma) \in \Pi^{1'}_k(\hat{\Omega})).$$

Лемма 4.6. *Пусть* $\Omega \in \{F^\mu_s, F^\infty_s \mid s = 1, 2, 3, 4; \mu = 3, 4, \dots\}$. *Тогда*

$$\forall \mathfrak{R} \in \Pi^1_k(\hat{\Omega}) \, \forall \sigma \, ((0 \in \mathfrak{R}) \longrightarrow (\mathfrak{R}(\sigma) \in \Pi^{1'}_k(\hat{\Omega}))).$$

Лемма 4.7. *Пусть* $\Omega \in \{F^\mu_s, F^\infty_s \mid s = 5, 6, 7, 8; \mu = 3, 4, \dots\}$. *Тогда*

$$\forall \mathfrak{R} \in \Pi'_k(\hat{\Omega}) \, \forall \sigma \, ((I \in \mathfrak{R}) \longrightarrow (\mathfrak{R}(\sigma) \in \Pi^{1'}_k(\hat{\Omega}))).$$

Лемма 4.8. *Пусть ф.с.* $\langle P_{k,E_2}, \hat{\Omega}\rangle$ *конечно порожденная. Тогда*

$$\forall \mathfrak{M} \in \Pi_k^{1'}(\hat{\Omega})\,(\psi(\mathfrak{M}|_{\{e_1,e_2\}}) \in \Pi_k(\hat{\Omega}) \to \exists \sigma\,(\mathfrak{M} = (\psi(\mathfrak{M}|_{\{e_1,e_2\}}))(\sigma))).$$

Теперь рассмотрим $\Pi_k^{2'}(\Omega)$. Пусть $0_3'$ — множество всех функций из P_{k,E_2}, равных 0; $0_2'$ — множество всех функций из P_{k,E_2}, равных 1.

Лемма 4.9. *Пусть* $\Omega \in \{F_s^\mu, F_s^\infty \mid s=1, 2, 3, 4; \mu=3, 4, \ldots\}$. *Тогда* $P_{k,E_2} \diagdown 0_3'$ *является единственным предполным классом ф.с.* $\langle P_{k,E_2}, \hat{\Omega}\rangle$, *не содержащим константу* 0.

Лемма 4.10. *Пусть* $\Omega \in \{F_s^\mu, F_s^\infty \mid s=5, 6, 7, 8; \mu=3, 4, \ldots\}$. *Тогда* $P_{k,E_2} \diagdown 0_2'$ *является единственным предполным классом ф.с.* $\langle P_{k,E_2}, \hat{\Omega}\rangle$, *не содержащим константу* 1.

Лемма 4.11. *Пусть* $\Omega \in \{C_i, D_j, F_s^\mu, F_s^\infty \mid i=1, 2, 3, 4; j=1, 3; s=1, 4, 5, 8, \mu=2, 3, \ldots\}$, σ — *любое кодирование* 1-*типа на основе* e *и* J. *Тогда*

$$I^2(\sigma) = F_{e,J} \in \Pi_k^{2'}(\hat{\Omega}).$$

Лемма 4.12. *Пусть* $\Omega \in \{C_i, D_j, F_s^\mu, F_s^\infty \mid i=1, 2, 3, 4; j=1, 3; s=1, 4, 5, 8; \mu=2, 3, \ldots\}$. σ — *любое кодирование* 0-*типа на основе* e *и* J. *Тогда*

$$0^2(\sigma) = F_{e,J} \in \Pi_k^{2'}(\hat{\Omega}).$$

Лемма 4.13. *Пусть* $\Omega \in \{A_i, D_2, F_s^\mu, F_s^\infty \mid i=1, 2, 3, 4; s=2, 3, 6, 7; \mu=2, 3, \ldots\}$; σ — *любое кодирование* 1-*типа на основе* e *и* J. *Тогда*

$$(\mathrm{A} \cup \Gamma \cup I^2)(\sigma) = H_e \cup F_{e,J} \in \Pi_k^{2'}(\hat{\Omega}),$$
$$(\Delta \cup \mathrm{B} \cup I^2)(\sigma) = I_e \cup F_{e,J} \in \Pi_k^{2'}(\hat{\Omega}).$$

Лемма 4.14. *Пусть* $\Omega \in \{A_i, D_i, F_s^\mu, F_s^e \mid i=1, 2, 3, 4; s=2, 3, 6, 7; \mu=2, 3, \ldots\}$; σ — *любое кодирование* 0-*типа на основе* e *и* J. *Тогда*

$$(\Delta \cup \Gamma \cup 0^2)(\sigma) = H_e \cup F_{e,J} \in \Pi_k^{2'}(\hat{\Omega}),$$
$$(\mathrm{A} \cup \mathrm{B} \cup 0^2)(\sigma) = I_e \cup F_{e,J} \in \Pi_k^{2'}(\hat{\Omega}).$$

Лемма 4.15. *Пусть* $\mathfrak{M} \in \Pi_k'(\hat{\Omega})$, $\mathfrak{N} = \psi(\mathfrak{M}|_{\{e,e_j\}}) \in \{I^2, \mathrm{A} \cup \Gamma \cup I^2, \Delta \cup \mathrm{B} \cup I^2\}$. *Тогда существует кодирование* σ 1-*типа на основе* e *и* J *такое, что* $\mathfrak{M} = \mathfrak{N}(\sigma)$, *где* $j \in J$.

Лемма 4.16. *Пусть* $\mathfrak{M} \in \Pi_k'(\hat{\Omega})$, $\mathfrak{N} = \psi(\mathfrak{M}|_{\{e,e_j\}}) \in (0^2, \mathrm{A} \cup \mathrm{B} \cup 0^2, \Delta \cup \Gamma \cup 0^2\}$. *Тогда существует кодирование* σ 0-*типа на основе* e *и* J *такое, что* $\mathfrak{M} = \mathfrak{N}(\sigma)$, *где* $j \in J$.

С учетом результатов [5], утверждений 3.1, 4.1 и лемм 4.5—4.7, 4.9—4.14 справедлива

Лемма 4.17. *Пусть* $e, e_1, e_2 \in E_k$, $e_1 \neq e_2$, J *рационально*, $e \neq e_j$, $j \in J$. *Тогда*:

1) Π_{e_1,e_2}, $F_{e,J} \in \Pi_k'(\hat{C}_1) \cap \Pi_k'(\hat{F}_i^\mu) \cap \Pi_k'(\hat{F}_j^\infty)$, *где* $i, j=4, 8$; $\mu=2, 3, 4, \ldots$;

2) I_e, Π_{e_1,e_2}, $F_{e,J} \in \Pi_k'(\hat{C}_2) \cap \Pi_k'(\hat{F}_5^\mu) \cap \Pi_k'(\hat{F}_5^\infty)$, *где* $\mu=2, 3, 4, \ldots$;

3) H_e, Π_{e_1,e_2}, $F_{e,J} \in \Pi_k'(\hat{C}_3) \cap \Pi_k'(\hat{F}_1^\mu) \cap \Pi_k'(\hat{F}_1^\infty)$, *где* $\mu=2, 3, 4, \ldots$;

4) H_e, I_e, Π_{e_1,e_2}, $F_{e,J} \in \Pi_k'(\hat{C}_4)$;

5) Π'_{e_1,e_2}, $H_e \cup F_{e,J}$, $I_e \cup F_{e,J} \in \Pi_k'(\hat{A}_i) \cap \Pi_k'(\hat{F}_j^\mu) \cap \Pi_k'(\hat{F}_h^\infty)$, *где* $i=1, 2, 3, 4$; $j, h=2, 3, 6, 7$; $\mu=2, 3, 4, \ldots$;

6) Π_{e_1,e_2}, P_{e_1,e_2}, $F_{e,J} \in \Pi_k'(\hat{D}_3)$;

7) H_e, I_e, Π_{e_1,e_2}, P_{e_1,e_2}, $F_{e,J} \in \Pi_k'(\hat{D}_1)$;

8) Π'_{e_1,e_2}, $P^+_{e_1,e_2}$, $P^-_{e_1,e_2}$, $H_e \cup F_{e,J}$, $I_e \cup F_{e,J} \in \Pi_k'(\hat{D}_2)$;

Таблица 2

	C_1	C_2	C_3	C_4	A_1, A_2 A_3, A_4	D_3	D_1	D_2	F_1^2	F_2^2 F_3^2
H_e			o	o			o		o	
I_e		o		o			o			
Π_{e_1, e_2}	o	o	o	o		o	o		o	
P_{e_1, e_2}						o	o			
Π_{e_1, e_2}					o			o		o
$P^+_{e_1, e_2}$								o	o	o
$P^-_{e_1, e_2}$								o		
$F_{e, J}$	o	o	o	o		o	o		o	
$H_e \cup F_{e, J}$					o			o		o
$I_e \cup F_{e, J}$					o			o		o
$P_{k, E_2} \diagdown 0_3'$										
$P_{k, E_2} \diagdown 0_2'$										

	F_4^2	F_5^2	F_6^2 F_7^2	F_8^2	F_1^μ F_1^∞	$F_{2,3}^\mu$ $F_{2,3}^\infty$	F_4^μ F_4^∞	F_5^μ F_5^∞	$F_{6,7}^\mu$ $F_{6,7}^\infty$	F_8^μ F_8^∞
H_e					o					
I_e		o						o		
Π_{e_1, e_2}	o	o		o	o		o	o		o
P_{e_1, e_2}										
Π_{e_1, e_2}			o			o			o	
$P^+_{e_1, e_2}$	o									
$P^-_{e_1, e_2}$		o	o	o						
$F_{e, J}$	o	o		o	o		o	o		o
$H_e \cup F_{e, J}$			o			o			o	
$I_e \cup F_{e, J}$			o			o			o	
$P_{k, E_2} \diagdown 0_3'$					o	o	o			
$P_{k, E_2} \diagdown 0_2'$								o	o	o

9) $P^+_{e_1, e_2} \in \Pi_k' (\hat{F}_i^2)$, *где* $i = 1, 2, 3, 4$;

10) $P^-_{e_1, e_2} \in \Pi_k' (\hat{F}_i^2)$, *где* $i = 5, 6, 7, 8$;

11) $P_{k, E_2} \diagdown 0_3' \in \Pi_k' (\hat{F}_i^\mu) \cap \Pi_k' (\hat{F}_j^\infty)$, *где* $i, j = 1, 2, 3, 4$; $\mu = 3, 4, \ldots$;

12) $P_{k, E_2} \diagdown 0_2' \in \Pi_k' (\hat{F}_i^\mu) \cap \Pi_k' (\hat{F}_j^\infty)$, *где* $i, j = 5, 6, 7, 8$; $\mu = 3, 4, \ldots$

Согласно леммам 4.2—4.4, 4.8—4.10, 4.15—4.16 кроме вышеуказанных классов никаких других предполных классов в ф. с. $\langle P_{k, E_2}, \hat{\Omega} \rangle$ нет, т. е. имеет место

Теорема 4.18. *Пусть* $\Omega \in \{C_i, A_i, D_j, F_s^2, F_s^\mu, F_s^\infty \mid i=1, 2, 3, 4; j=1, 2, 3; s=1, \ldots, 8; \mu=3, 4, \ldots\}$. *Тогда критериальная система в ф. с.* $\langle P_{k, E_2}, \hat{\Omega}\rangle$ *состоит из всех множеств в таблице* 2, *лежащих на таких строчках, где есть знак* «∘», *соответствующий классу* Ω.

Автор выражает свою глубокую признательность В. Б. Кудрявцеву за научную помощь и руководство.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. Кудрявцев В. Б. Функциональные системы.— М.: Изд-во МГУ, 1982.
2. Post E. Two-valued iterative systems of mathematical logic.— Prinston, 1941.
3. Яблонский С. В., Гаврилов Г. П. Кудрявцев В. Б. Функции алгебры логики и классы Поста.— М.: Наука, 1966.
4. Доу Ж. Конечно порожденность функциональных систем типа алгебр Поста // Методы и системы технической диагностики.— Саратов: Изд-во Сарат. ун-та, 1988.
5. Доу Ж. Вопросы полноты конечно порожденных ф. с. $\langle P_2, \tilde{\Omega}\rangle$ и $\langle P_2, \hat{\Omega}\rangle$ // Комбинаторно-алгебраические методы в прикладной математике.— Горький: Изд-во Горьковского ун-та, 1989.
6. Кон П. Универсальная алгебра.— М.: Мир, 1968.
7. Яблонский С. В. Введение в дискретную математику.— М.: Наука, 1986.

Статья поступила 22.12.89