D. A. Kovtonyuk, V. I. Ryazanov, Prime ends and the Orlicz–Sobolev classes,
Algebra i Analiz, 2015, Volume 27, Issue 5, 81–116

https://www.mathnet.ru/eng/aa1456

Алгебра и анализ
Том 27 (2015), №5

ПРОСТЫЕ КОНЦЫ И КЛАССЫ ОРЛИЧА–СОБОЛЕВА

© Д. А. КОВТОНЮК, В. И. РЯЗАНОВ

Получено каноническое представление простых концов в регулярных пространственных областях и изучено граничное поведение так называемых нижних Q-гомеоморфизмов, которые являются естественным обобщением квазиконформных отображений. В частности, найден ряд эффективных условий на функцию Q для непрерывного и гомеоморфного продолжения указанных отображений на границу по простым концам. На этой основе развита теория граничного поведения отображений классов Соболева и Орлича–Соболева, а также конечно билипшицевых отображений, которые являются далеко идущим обобщением хорошо известных классов изометрий и квазиизометрий.

§1. Введение

Проблема граничного поведения является одной из основных тем в теории квазиконформных отображений и их обобщений. В последние годы интенсивно изучаются различные классы отображений с конечным искажением, которые естественным образом обобщают конформные, квазиконформные и квазирегулярные отображения (см. ссылки в монографиях [35, 37, 50]). Как и ранее, основным геометрическим методом в современной теории отображений остается метод модулей (см., например, монографии [35, 50, 56, 63, 73, 74, 75]).

С точки зрения теории конформных отображений было признано неудовлетворительным рассматривать отдельные точки границы односвязной области как примитивную составляющую границы. Действительно, по теореме Римана любая такая область может быть конформно отображена на единичный круг. При этом точки единичной окружности соответствуют так называемым простым концам области.

Термин ,,простой конец“ восходит к Каратеодори [29], который стал инициатором систематического изучения структуры границ односвязных

Ключевые слова: простые концы, регулярные области, граничное поведение, отображения с конечным искажением, нижние Q-гомеоморфизмы, кольцевые Q-гомеоморфизмы, классы Орлича–Соболева, конечно билипшицевы отображения.

областей на плоскости. Его подход был топологическим и опирался на понятия подобластей, разрезов и т. п., которые определены в данной области. Конформная инвариантность простых концов была доказана в одной из фундаментальных теорем Каратеодори.

Линделёф [47] обошел эту трудность, определяя простые концы области с привязкой к конформному отображению единичного круга на область, а именно в терминах множества неопределенности или предельного множества. Однако его метод избегает явного анализа топологической структуры области.

Также заслуживают внимания две другие схемы определения простых концов. Мазуркевич [53] ввел метрику $\rho_\pi(z_1, z_2)$, которая эквивалентна евклидовой метрике в области в том смысле, что $\rho_\pi(z_j, z_0) \to 0$ тогда и только тогда, когда $|z_j - z_0| \to 0$ для любой последовательности $\{z_j\}$ точек области. Граница области, соответствующая ρ_π, т. е. пополнение области по метрике им ρ_π, является пространством, которое может быть отождествлено с множеством простых концов по Каратеодори.

Наконец, Урсел и Янг [72] ввели простые концы плоской области, используя понятие классов эквивалентных путей, которые сходятся к границе области.

В пространстве теория простых концов также интенсивно развивалась (см., например, [3, 23, 32, 41, 54, 55]). Зорич впервые применил теорию простых концов к пространственным квазиконформным отображениям (см. [5]–[7]). Мы определяем простые концы через сечения областей и привлекаем еще одно условие в терминах модулей, следуя Някки (см. [55], ср. также емкостный подход в работе [3]), и развиваем теорию граничного поведения более общих пространственных отображений. Историю вопроса и дальнейшие ссылки можно найти также в работах [26, 31, 55].

Здесь мы часто применяем обозначения I, $\bar{I}$, $\mathbb{R}$, $\overline{\mathbb{R}}$, $\mathbb{R}^+$, $\overline{\mathbb{R}^+}$ и $\overline{\mathbb{R}^n}$ для $[1,\infty)$, $[1,\infty]$, $(-\infty,\infty)$, $[-\infty,\infty]$, $[0,\infty)$, $[0,\infty]$ и $\mathbb{R}^n\cup\{\infty\}$ соответственно, и D — для области в $\mathbb{R}^n$. Также в $\overline{\mathbb{R}^n}$ используем **сферическую (хордальную) метрику** $h(x,y) = |\pi(x) - \pi(y)|$, где π — стереографическая проекция $\overline{\mathbb{R}^n}$ на сферу $S^n(\frac{1}{2}e_{n+1}, \frac{1}{2})$ в $\mathbb{R}^{n+1}$, т. е.

$$h(x,y) = \frac{|x-y|}{\sqrt{1+|x|^2}\sqrt{1+|y|^2}}, \quad x \neq \infty \neq y, \quad h(x,\infty) = \frac{1}{\sqrt{1+|x|^2}},$$

и **сферический (хордальный) диаметр** для множеств E в $\overline{\mathbb{R}^n}$:

$$h(E) = \sup_{x,y\in E} h(x,y).$$

Пусть ω — открытое множество в $\mathbb{R}^k$, $k = 1, \ldots, n-1$. Непрерывное отображение $\sigma : \omega \to \overline{\mathbb{R}^n}$ называется **k-мерной поверхностью** в $\overline{\mathbb{R}^n}$, $(n-1)$-мерная поверхность σ в $\overline{\mathbb{R}^n}$ называется просто **поверхностью**. Поверхность $\sigma : \omega \to D$ называется **жордановой поверхностью** в D, если $\sigma(z_1) \neq \sigma(z_2)$ при $z_1 \neq z_2$. Далее мы иногда будем использовать σ для обозначения всего образа $\sigma(\omega) \subseteq \overline{\mathbb{R}^n}$ при отображении σ, и $\overline{\sigma}$ вместо $\overline{\sigma(\omega)}$ в $\overline{\mathbb{R}^n}$, и $\partial\sigma$ вместо $\overline{\sigma(\omega)} \setminus \sigma(\omega)$. Жорданова поверхность σ в D называется **разрезом** области D, если σ разделяет D, т. е. $D \setminus \sigma$ имеет больше одной компоненты, $\partial\sigma \cap D = \varnothing$ и $\partial\sigma \cap \partial D \neq \varnothing$.

Последовательность $\sigma_1, \sigma_2, \ldots, \sigma_m, \ldots$ разрезов области D называется **цепью**, если

(i) $\overline{\sigma_i} \cap \overline{\sigma_j} = \varnothing$ для всех $i \neq j$, $i, j = 1, 2, \ldots$;

(ii) σ_{m-1} и σ_{m+1} содержатся в различных компонентах $D \setminus \sigma_m$ для всех $m > 1$;

(iii) $\cap\, d_m = \varnothing$, где d_m — компонента $D \setminus \sigma_m$, содержащая σ_{m+1}.

Наконец, будем называть цепь разрезов $\{\sigma_m\}$ **регулярной**, если

(iv) $h(\sigma_m) \to 0$ при $m \to \infty$.

Согласно определению цепь разрезов $\{\sigma_m\}$ определяет цепь областей $d_m \subset D$ таких, что $\partial\, d_m \cap D \subseteq \sigma_m$ и $d_1 \supset d_2 \supset \ldots \supset d_m \supset \ldots$ Две цепи разрезов $\{\sigma_m\}$ и $\{\sigma'_k\}$ называются **эквивалентными**, если для каждого $m = 1, 2, \ldots$ область d_m содержит все области d'_k, за исключением конечного числа, и для каждого $k = 1, 2, \ldots$ область d'_k также содержит все области d_m, за исключением конечного числа. **Конец** области D — это класс эквивалентных цепей разрезов D.

Пусть K — конец области D в $\overline{\mathbb{R}^n}$, $\{\sigma_m\}$ и $\{\sigma'_m\}$ — две цепи в K, d_m и d'_m — области, соответствующие σ_m и σ'_m. Тогда

$$\bigcap_{m=1}^{\infty} \overline{d_m} \subseteq \bigcap_{m=1}^{\infty} \overline{d'_m} \subset \bigcap_{m=1}^{\infty} \overline{d_m}$$

и, таким образом,

$$\bigcap_{m=1}^{\infty} \overline{d_m} = \bigcap_{m=1}^{\infty} \overline{d'_m},$$

т. е. множество

$$I(K) = \bigcap_{m=1}^{\infty} \overline{d_m}$$

зависит только от K и не зависит от выбора цепи разрезов $\{\sigma_m\}$. Множество $I(K)$ называется **телом конца** K.

Хорошо известно, что $I(K)$ является континуумом, т. е. связным компактным множеством (см., например, I(9.12) в [76]). Кроме того, ввиду условиий (ii) и (iii) имеем, что

$$I(K) = \bigcap_{m=1}^{\infty} (\partial d_m \cap \partial D) = \partial D \ \cap \ \bigcap_{m=1}^{\infty} \partial d_m.$$

Таким образом, получаем следующее утверждение.

Предложение 1. *Для каждого конца K области D в $\overline{\mathbb{R}^n}$*

$$I(K) \subseteq \partial D. \tag{1}$$

Далее, как обычно, для множеств A, B и C в $\overline{\mathbb{R}^n}$, $\Delta(A, B; C)$ обозначает семейство всех путей, соединяющих A и B в C.

Следуя [55], будем говорить, что конец K является **простым концом**, если K содержит цепь разрезов $\{\sigma_m\}$ такую, что

$$\lim_{m\to\infty} M(\Delta(C, \sigma_m; D)) = 0 \tag{2}$$

для некоторого континуума C в D, где M — модуль семейства $\Delta(C, \sigma_m; D)$ (см. следующий параграф).

Если конец K содержит по крайней мере одну регулярную цепь, то K будем называть **регулярным**. Как легко видеть, из леммы 1 следует, что каждый регулярный конец является простым.

§2. Нижние и кольцевые Q-гомеоморфизмы

Класс нижних Q-гомеоморфизмов был введен в статье [11], см. также статью [12] и монографию [50], и мотивирован кольцевым определением квазиконформных отображений по Герингу, см. [33]. Теория нижних Q-гомеоморфизмов нашла интересные приложения в теории уравнений Бельтрами на плоскости и в теории отображений классов Соболева и Орлича–Соболева в пространстве (см., например, [9, 12, 13, 42, 43, 46, 50, 64]).

Ключевую роль в нашем исследовании играют модули семейств поверхностей. Пусть ω — открытое множество в $\overline{\mathbb{R}^k}$, $k = 1, \ldots, n-1$. Напомним, что непрерывное отображение $S : \omega \to \mathbb{R}^n$ называется **k-мерной поверхностью** в $\mathbb{R}^n$. Число прообразов

$$N(S, y) = \operatorname{card} S^{-1}(y) = \operatorname{card} \{x \in \omega : S(x) = y\}, \quad y \in \mathbb{R}^n, \tag{3}$$

называется **функцией кратности** поверхности S. Известно, что она полунепрерывна снизу, т. е.

$$N(S, y) \geqslant \liminf_{m\to\infty} N(S, y_m)$$

для каждой последовательности $y_m \in \mathbb{R}^n$, $m = 1, 2, \ldots$, такой, что $y_m \to y \in \mathbb{R}^n$ при $m \to \infty$ (см., например, [60, с. 160]). Таким образом, функция $N(S, y)$ является борелевой и, следовательно, измерима относительно каждой хаусдорфовой меры H^k (см., например, [20, теоремы II(3.5) и II(7.4)]).

Напомним, что k-мерная хаусдорфова площадь в $\mathbb{R}^n$ (или просто **площадь**), ассоциированная с поверхностью $S : \omega \to \mathbb{R}^n$, определяется равенством

$$\mathcal{A}_S(B) = \mathcal{A}_S^k(B) := \int\limits_B N(S, y)\ dH^k y \tag{4}$$

для каждого борелевого множества $B \subseteq \mathbb{R}^n$ и, более общо, для произвольного множества, измеримого относительно H^k в $\mathbb{R}^n$ (ср. 3.2.1 в [24] и 9.2 в [50]).

Если $\varrho : \mathbb{R}^n \to \overline{\mathbb{R}^+}$ борелева функция, то **интеграл по** S определяется равенством

$$\int\limits_S \varrho\, d\mathcal{A} := \int\limits_{\mathbb{R}^n} \varrho(y)\, N(S, y)\ dH^k y. \tag{5}$$

Для заданного семейства Γ k-мерных поверхностей S борелева функция $\varrho : \mathbb{R}^n \to [0, \infty]$ называется **допустимой** для Γ, сокр. $\varrho \in \operatorname{adm}\Gamma$, если

$$\int\limits_S \varrho^k\, d\mathcal{A} \geqslant 1 \tag{6}$$

для всех $S \in \Gamma$. **Модулем** семейства Γ называется следующая величина:

$$M(\Gamma) = \inf_{\varrho \in \operatorname{adm}\Gamma} \int\limits_{\mathbb{R}^n} \varrho^n(x)\ dm(x), \tag{7}$$

где m обозначает меру Лебега в $\mathbb{R}^n$. Мы также говорим, что измеримая по Лебегу функция $\varrho : \mathbb{R}^n \to [0, \infty]$ является **обобщенно допустимой** для семейства Γ k-мерных поверхностей S в $\mathbb{R}^n$, сокр. $\varrho \in \operatorname{ext}\operatorname{adm}\Gamma$, если подсемейство всех поверхностей S в Γ, для которых (6) неверно, имеет нулевой модуль.

Для заданных областей D и D' в $\overline{\mathbb{R}^n}$, $n \geqslant 2$, $x_0 \in \overline{D} \setminus \{\infty\}$, и измеримой функции $Q : \mathbb{R}^n \to (0, \infty)$, говорим, что гомеоморфизм $f : D \to D'$ является **нижним Q-гомеоморфизмом в точке** x_0, если

$$M(f\Sigma_\varepsilon) \geqslant \inf_{\varrho \in \operatorname{ext}\operatorname{adm}\Sigma_\varepsilon} \int\limits_{D \cap R_\varepsilon} \frac{\varrho^n(x)}{Q(x)}\ dm(x) \tag{8}$$

для каждого кольца $R_\varepsilon = \{x \in \mathbb{R}^n : \varepsilon < |x - x_0| < \varepsilon_0\}$, $\varepsilon \in (0, \varepsilon_0)$, $\varepsilon_0 \in (0, d_0)$, где $d_0 = \sup\limits_{x \in D} |x - x_0|$, и Σ_ε обозначает семейство всех пересечений сфер $S(x_0, r) = \{x \in \mathbb{R}^n : |x - x_0| = r\}$, $r \in (\varepsilon, \varepsilon_0)$, с D. Это понятие может быть распространено и на случай $x_0 = \infty \in \overline{D}$ с помощью инверсии T относительно единичной сферы в $\overline{\mathbb{R}^n}$, $T(x) = x/|x|^2$, $T(\infty) = 0$, $T(0) = \infty$. А именно гомеоморфизм $f : D \to D'$ называется **нижним Q-гомеоморфизмом в** $\infty \in \overline{D}$, если $F = f \circ T$ является нижним Q_*-гомеоморфизмом с $Q_* = Q \circ T$ в 0.

Мы также говорим, что гомеоморфизм $f : D \to \overline{\mathbb{R}^n}$ является **нижним Q-гомеоморфизмом** в D, если f является нижним Q-гомеоморфизмом в каждой точке $x_0 \in \overline{D}$.

Приведем критерий нижнего Q-гомеоморфизма в $\mathbb{R}^n$, см. теорему 2.1 в [11] или теорему 9.2 в [50].

Предложение 2. *Пусть D и D' — области в $\overline{\mathbb{R}^n}$, $n \geqslant 2$, $x_0 \in \overline{D} \setminus \{\infty\}$, и $Q : D \to (0, \infty)$ — измеримая функция. Гомеоморфизм $f : D \to D'$ является нижним Q-гомеоморфизмом в точке x_0 тогда и только тогда, когда*

$$M(f\Sigma_\varepsilon) \geqslant \int\limits_{\varepsilon}^{\varepsilon_0} \frac{dr}{||Q||_{n-1}(x_0, r)} \quad \forall \varepsilon \in (0, \varepsilon_0),\ \varepsilon_0 \in (0, d(x_0)), \tag{9}$$

где $d(x_0) = \sup\limits_{x \in D} |x - x_0|$ и

$$\|Q\|_{n-1}(x_0, r) = \left(\int\limits_{D(x_0, r)} Q^{n-1}(x)\, d\mathcal{A} \right)^{\frac{1}{n-1}} \tag{10}$$

— L_{n-1}-норма функции Q на $D(x_0, r) = \{x \in D : |x - x_0| = r\} = D \cap S(x_0, r)$.

Пусть заданы области D и D' в $\overline{\mathbb{R}^n}$, $n \geqslant 2$, и измеримая функция $Q : \mathbb{R}^n \to (0, \infty)$. Положим $S_i := S(x_0, r_i)$. Говорим, что гомеоморфизм $f : D \to D'$ является **кольцевым Q-гомеоморфизмом в точке** $x_0 \in \overline{D} \setminus \{\infty\}$, если

$$M(f(\Delta(S_1, S_2; D))) \leqslant \int\limits_{A \cap D} Q(x) \cdot \eta^n(|x - x_0|)\ dm(x) \tag{11}$$

для каждого кольца $A = A(x_0, r_1, r_2)$, $0 < r_1 < r_2 < d(x_0) = \sup\limits_{x\in D} |x - x_0|$, и для каждой измеримой функции $\eta : (r_1, r_2) \to [0, \infty]$ такой, что

$$\int\limits_{r_1}^{r_2} \eta(r)\, dr \geqslant 1. \tag{12}$$

Понятие кольцевого Q-гомеоморфизма может быть продолжено и на случай $x_0 = \infty$ стандартным путем, как и в случае нижнего Q-гомеоморфизма.

Понятие кольцевого Q-гомеоморфизма впервые было введено для внутренних точек области в работе [66] в связи с изучением уравнений Бельтрами на плоскости и распространено на пространственный случай в работе [19], см. также монографию [50]. Затем это понятие было распространено на граничные точки в работах [15] и [67]–[69], см. также монографию [35]. Из следствия 5 в [12] получаем следующий факт.

Предложение 3. *В $\mathbb{R}^n$, $n \geqslant 2$, нижний Q-гомеоморфизм $f : D \to D'$ в точке $x_0 \in \overline{D}$ с Q, интегрируемой в степени $n-1$ в окрестности точки x_0, является кольцевым Q_*-гомеоморфизмом в x_0 с $Q_* = Q^{n-1}$.*

Замечание 1. Согласно замечанию 8 в [12] заключение предложения 3 остается справедливым, если функция Q интегрируема в степени $n-1$ на почти всех сферах достаточно малых радиусов с центром в точке x_0.

Отметим также, что в определениях нижнего и кольцевого Q-гомеоморфизмов функцию Q достаточно задать только в области D и продолжить нулем вне области D.

§3. Каноническое представление концов пространственных областей

Лемма 1. *Каждый регулярный конец K области D в $\overline{\mathbb{R}^n}$ содержит в себе цепь разрезов σ_m, лежащих на сферах S_m с центром в точке $x_0 \in \partial D$ и хордальными радиусами $\rho_m \to 0$ при $m \to \infty$. Каждый регулярный конец K ограниченной области D в $\mathbb{R}^n$ содержит в себе цепь разрезов σ_m, лежащих на сферах S_m с центром в точке $x_0 \in \partial D$ и евклидовыми радиусами $r_m \to 0$ при $m \to \infty$.*

Доказательство. Ограничимся случаем области D в $\overline{\mathbb{R}^n}$ с хордальной метрикой. Второй случай аналогичен.

Пусть $\{\sigma_m\}$ — цепь разрезов в конце K и x_m — последовательность точек в σ_m. Без ограничения общности можем считать, что $x_m \to x_0 \in \partial D$ при $m \to \infty$, поскольку $\overline{\mathbb{R}^n}$ — компактное метрическое пространство.

Тогда $\rho_m^- := h(x_0, \sigma_m) \to 0$ и $\rho_m^+ \to 0$, потому что $h(\sigma_m) \to 0$ при $m \to \infty$, где

$$\rho_m^+ := H(x_0, \sigma_m) = \sup_{x \in \sigma_m} h(x, x_0) = \sup_{x \in \overline{\sigma_m}} h(x, x_0)$$

— хаусдорфово расстояние между компактными множествами $\{x_0\}$ и $\overline{\sigma_m}$ в $\overline{\mathbb{R}^n}$. Согласно условию (i) в определении конца можем считать, без ограничения общности, что $\rho_m^- > 0$ и $\rho_{m+1}^+ < \rho_m^-$ для всех $m = 1, 2, \ldots$

Положим

$$\delta_m = \Delta_m \setminus d_{m+1},$$

где $\Delta_m = S_m \cap d_m$ и

$$S_m = \Big\{ x \in \overline{\mathbb{R}^n} : h(x_0, x) = \frac{1}{2}\left(\rho_m^- + \rho_{m+1}^+\right) \Big\}.$$

Очевидно, что Δ_m и δ_m относительно замкнуты в d_m.

Заметим, что d_{m+1} содержится в одной из компонент связности открытого множества $d_m \setminus \delta_m$. Действительно, предположим, что пара точек x_1 и $x_2 \in d_{m+1}$ находится в различных компонентах Ω_1 и Ω_2 множества $d_m \setminus \delta_m$. Тогда x_1 и x_2 могут быть соединены непрерывной кривой $\gamma : [0,1] \to d_{m+1}$. Однако по построению d_{m+1}, а поэтому и γ не пересекают δ_m, следовательно, $[0,1] = \bigcup\limits_{k=1}^{\infty} \omega_k$, где $\omega_k = \gamma^{-1}(\Omega_k)$, Ω_k — перенумерация компонент $d_m \setminus \delta_m$. Но ω_k является открытым в $[0,1]$, поскольку Ω_k открыто и γ непрерывна. Последнее противоречит связности $[0,1]$, так как $\omega_1 \neq \varnothing$ и $\omega_2 \neq \varnothing$ и, кроме того, ω_i и ω_j попарно не пересекаются при $i \neq j$.

Пусть d_m^* компонента $d_m \setminus \delta_m$, содержащая d_{m+1}. Тогда по построению $d_{m+1} \subseteq d_m^* \subseteq d_m$. Осталось показать, что $\partial d_m^* \setminus \partial D \subseteq \delta_m$. Во-первых, очевидно, что $\partial d_m^* \setminus \partial D \subseteq \delta_m \cup \sigma_m$, так как всякая точка в $d_m \setminus \delta_m$ принадлежит либо d_m^*, либо другой компоненте $d_m \setminus \delta_m$, и поэтому не принадлежит границе d_m^*, ввиду относительной замкнутости δ_m в d_m. Таким образом, достаточно доказать, что $\sigma_m \cap \partial d_m^* \setminus \partial D \neq \varnothing$.

Предположим, что существует точка $x_* \in \sigma_m$ в $d_m^* \setminus \partial D$. Тогда найдется точка $y_* \in d_m^*$, достаточно близкая к σ_m, с

$$h(x_0, y_*) > \frac{1}{2}\left(\rho_m^- + \rho_{m+1}^+\right),$$

поскольку $h(x_0, y_*) \geqslant \rho_m^-$ и $\rho_{m+1}^+ < \rho_m^-$. С другой стороны, найдется точка $z_* \in d_{m+1}$, достаточно близкая к σ_{m+1}, такая, что

$$h(x_0, z_*) < \frac{1}{2}\left(\rho_m^- + \rho_{m+1}^+\right).$$

Кроме того, точки z_* и y_* могут быть соединены непрерывной кривой $\gamma : [0,1] \to d_{m+1}^*$. Заметим, что множества $\gamma^{-1}(d_m^* \setminus \overline{d_{m+1}})$ состоят из счетного набора открытых непересекающихся интервалов из $[0,1]$ и интервала $(t_0,1]$ с $t_0\in(0,1)$, и $z_0=\gamma(t_0)\in\sigma_{m+1}$. Таким образом,

$$h(x_0,z_0)<\frac{1}{2}\left(\rho_m^-+\rho_{m+1}^+\right),$$

поскольку $h(x_0,z_0)\leqslant\rho_{m+1}^+$ и $\rho_{m+1}^+<\rho_m^-$. Теперь в силу непрерывности функции $\varphi(t)=h(x_0,\gamma(t))$ существует точка $\tau_0\in(t_0,1)$ такая, что

$$h(x_0,y_0)=\frac{1}{2}\left(\rho_m^-+\rho_{m+1}^+\right),$$

где $y_0=\gamma(\tau_0)\in d_m^*$ в силу выбора γ. Полученное противоречие показывает, что наше предположение неверно, и тем самым доказательство завершено. $\Box$

В дальнейшем для заданной области D в $\mathbb{R}^n$, $n\geqslant 2$, говорим, что последовательность точек $x_k\in D$, $k=1,2,\ldots$, **сходится к концу** K, если для каждой цепи $\{\sigma_m\}$ в K и каждой области d_m все точки x_k, за исключением, быть может, конечного числа, принадлежат d_m.

§4. О регулярных областях

Прежде всего, напомним несколько топологических понятий. Область $D\subset\mathbb{R}^n$, $n\geqslant 2$, называется **локально связной в точке** $x_0\in\partial D$, если для любой окрестности U точки x_0 найдется окрестность $V\subseteq U$ точки x_0, такая, что $V\cap D$ связно. Отметим, что жорданова область D в $\mathbb{R}^n$ является локально связной в каждой точке ∂D (см., например, [77, с. 66]).

Следуя [10] и [11], см. также [18] и [50], говорим, что граница ∂D является **слабо плоской в точке** $x_0\in\partial D$, если для каждой окрестности U точки x_0 и для любого числа $P>0$ найдется окрестность $V\subset U$ точки x_0 такая, что

$$M(\Delta(E,F;D))\geqslant P \tag{13}$$

для любых континуумов E и F в D, пересекающих ∂U и ∂V. Говорим также, что граница ∂D является **слабо плоской**, если она слабо плоская в каждой точке из ∂D.

Далее, говорим, что точка $x_0\in\partial D$ является **сильно достижимой**, если для любой окрестности U точки x_0 найдутся компакт E в D, окрестность $V\subset U$ точки x_0 и число $\delta>0$ такие, что

$$M(\Delta(E,F;D))\geqslant\delta \tag{14}$$

для всех континуумов F в D, пересекающих ∂U и ∂V. Наконец, говорим, что граница ∂D является **сильно достижимой**, если все точки $x_0\in\partial D$ сильно достижимы.

Замечание 2. В определениях сильно достижимых и слабо плоских границ мы можем выбирать в качестве окрестностей U и V точки x_0 только шары (замкнутые или открытые) с центром в x_0 или только окрестности точки x_0 в другой фундаментальной системе окрестностей x_0. Эта концепция может быть распространена естественным путем и на случай $\overline{\mathbb{R}^n}$ и $x_0 = \infty$. Тогда мы должны использовать соответствующие окрестности ∞.

Легко видеть, что если область D в $\mathbb{R}^n$ является слабо плоской в точке $x_0 \in \partial D$, то в точке x_0 она является сильно достижимой из D. Более того, нами доказано что, если область D из $\mathbb{R}^n$ – слабо плоская в точке $x_0 \in \partial D$, то D является локально связной в x_0 (см., например, лемму 5.1 в [11] или лемму 3.15 в [50]).

Согласно классическому геометрическому определению Вяйсяля (см., например, 13.1 в [74]), гомеоморфизм f между областями D и D' в $\mathbb{R}^n$, $n \geqslant 2$, называется K**-квазиконформным**, если

$$\frac{1}{K}\, M(\Gamma) \leqslant M(f\Gamma) \leqslant K\, M(\Gamma)$$

для каждого семейства кривых Γ в D. Гомеоморфизм $f : D \to D'$ называется **квазиконформным**, если f является K-квазиконформным для некоторого $K \in [1, \infty)$, т. е. если искажение модулей семейства кривых при отображении f ограничено.

Будем говорить, что граница области D в $\mathbb{R}^n$ является **локально квазиконформной**, если каждая точка $x_0 \in \partial D$ имеет окрестность U, которая может быть отображена квазиконформным отображением φ на единичный шар $\mathbb{B}^n \subset \mathbb{R}^n$ так, что $\varphi(\partial D \cap U)$ является пересечением $\mathbb{B}^n$ с координатной гиперплоскостью. Отметим, что локально квазиконформные границы являются слабо плоскими непосредственно по определению.

В теории отображений и в теории дифференциальных уравнений часто используются так называемые липшицевы области, границы которых являются локально квазиконформными и, следовательно, слабо плоскими.

Напомним, что отображение $\varphi : X \to Y$ между метрическими пространствами X и Y называется **липшицевым**, если выполнено неравенство $\mathrm{dist}(\varphi(x_1), \varphi(x_2)) \leqslant M\, \mathrm{dist}(x_1, x_2)$ для некоторого $M < \infty$ и для всех x_1 и $x_2 \in X$. Отображение φ называется **билипшицевым**, если дополнительно выполнено неравенство $M^*\, \mathrm{dist}(x_1, x_2) \leqslant \mathrm{dist}(\varphi(x_1), \varphi(x_2))$ для некоторого $M^* > 0$ и для всех x_1 и $x_2 \in X$. В дальнейшем X и Y являются подмножествами $\mathbb{R}^n$ с евклидовым расстоянием.

Говорим, что область D из $\mathbb{R}^n$ является **липшицевой**, если каждая точка $x_0 \in \partial D$ имеет окрестность U, которая может быть отображена билипшицевым гомеоморфизмом φ на единичный шар $\mathbb{B}^n \subset \mathbb{R}^n$ так, что

$\varphi(\partial D \cap U)$ является пересечением $\mathbb{B}^n$ с координатной гиперплоскостью и $f(x_0) = 0$ (см., например, [56]). Заметим, что билипшицевы гомеоморфизмы являются квазиконформными, и поэтому липшицевы области имеют локально квазиконформные границы.

Говорим, что ограниченная область D в $\mathbb{R}^n$ **регулярна**, если D может быть квазиконформно отображена на область с локально квазиконформной границей.

Очевидно, что каждая регулярная область является конечно связной, поскольку при каждом гомеоморфизме между областями D и D' в $\overline{\mathbb{R}^n}$, $n \geqslant 2$, существует естественное взаимнооднозначное соответствие между компонентами границ ∂D и $\partial D'$ (см., например, лемму 5.3 в [8] или лемму 6.5 в [50]). Отметим также, что каждая конечно связная область на плоскости, граница которой не имеет компонент, вырождающихся в точку, может быть отображена конформно на некоторую область, ограниченную конечным набором попарно непересекающихся окружностей, и поэтому является регулярной областью (см., например, теорему V.6.2 в [4]).

Как следует из теоремы 5.1 в [55], каждый простой конец регулярной области в $\overline{\mathbb{R}^n}$, $n \geqslant 2$, является регулярным. Комбинируя этот факт с леммой 1, получаем следующее утверждение.

Лемма 2. *Каждый простой конец P регулярной области D в $\mathbb{R}^n$, $n \geqslant 2$, содержит цепь разрезов σ_m, лежащую на сферах S_m с цетром в точке $x_0 \in \partial D$ и с евклидовыми радиусами $r_m \to 0$ при $m \to \infty$.*

Замечание 3. Как следует из теоремы 4.1 в [55], при квазиконформных отображениях g области D_0 с локально квазиконформной границей на область D в $\mathbb{R}^n$, $n \geqslant 2$, существует естественное взаимно однозначное соответствие между точками ∂D_0 и простыми концами области D, и, кроме того, предельные множества $C(g, b)$, $b \in \partial D_0$, совпадают с телом $I(P)$ соответствующих простых концов P в D.

Если $\overline{D}_P$ является пополнением регулярной области D ее простыми концами и g_0 является квазиконформным отображением области D_0 с локально квазиконформной границей на D, то оно естественным образом определяет в $\overline{D}_p$ метрику $\rho_0(p_1, p_2) = \left|\widetilde{g_0}^{-1}(p_1) - \widetilde{g_0}^{-1}(p_2)\right|$, где $\widetilde{g_0}$ продолжение g_0 в $\overline{D_0}$, упомянутое выше.

Если g_* является другим квазиконформным отображением некоторой области D_* с локально квазиконформной границей на область D, то соответствующая метрика $\rho_*(p_1, p_2) = \left|\widetilde{g_*}^{-1}(p_1) - \widetilde{g_*}^{-1}(p_2)\right|$ порождает ту же самую сходимость и, следовательно, ту же самую топологию в $\overline{D}_P$, как и метрика ρ_0, поскольку $g_0 \circ g_*^{-1}$ является квазиконформным отображением между областями D_* и D_0, которое по теореме 4.1 из [55] продолжается до гомеоморфизма между $\overline{D_*}$ и $\overline{D_0}$.

В дальнейшем будем называть данную топологию в пространстве $\overline{D}_P$ **топологией простых концов** и понимать непрерывность отображений $F : \overline{D}_P \to \overline{D'}_P$ как раз относительно этой топологии.

§5. О продолжении прямых отображений

Лемма 3. *Пусть D и D' — регулярные области в $\mathbb{R}^n$, $n \geqslant 2$, и $f : D \to D'$ — нижний Q-гомеоморфизм. Если*

$$\int\limits_0^{\delta(x_0)} \frac{dr}{||Q||_{n-1}(x_0,r)} = \infty \quad \forall\ x_0 \in \partial D \tag{15}$$

для некоторого $\delta(x_0) < d(x_0) = \sup\limits_{x\in D} |x - x_0|$, где

$$\|Q\|_{n-1}(x_0,r) = \Bigg(\int\limits_{D\cap S(x_0,r)} Q^{n-1}\, d\mathcal{A} \Bigg)^{\frac{1}{n-1}},$$

то f продолжается до непрерывного отображения $\overline{D}_P$ на $\overline{D'}_P$.

Доказательство. В силу замечания 3 без ограничения общности можем считать, что область D' имеет локально квазиконформную границу и $\overline{D'}_P = \overline{D'}$. Снова согласно замечанию 3, а именно в силу метризуемости пространств $\overline{D}_P$ и $\overline{D'}_P$ достаточно доказать, что для каждого простого конца P области D предельное множество

$$L = C(P,f) := \Big\{ y \in \mathbb{R}^n : y = \lim_{k\to\infty} f(x_k), x_k \to P, x_k \in D \Big\}$$

состоит из единственной точки $y_0 \in \partial D'$.

Заметим, что $L \neq \varnothing$ в силу компактности множества $\overline{D'}$, и L является подмножеством $\partial D'$ (см., например, предложение 2.5 в [18] или предложение 13.5 в [50]). Предположим, что существуют по крайней мере две точки y_0 и $z_0 \in L$. Положим $U = B(y_0, r_0)$, где $0 < r_0 < |y_0 - z_0|$.

Пусть $x_0 \in I(P) \subseteq \partial D$ и пусть σ_k, $k = 1, 2, \ldots,$ — цепь разрезов в D, лежащая на сферах $S_k = S(x_0, r_k)$ из леммы 2, с ассоциированными областями D_k, $k = 1, 2, \ldots$ Тогда существуют точки y_k и z_k в областях $D'_k = f(D_k)$ такие что $|y_0 - y_k| < r_0$ и $|y_0 - z_k| > r_0$ и, кроме того, $y_k \to y_0$ и $z_k \to z_0$ при $k \to \infty$. Пусть C_k — непрерывные кривые, соединяющие y_k и z_k в D'_k. Заметим, что по построению $\partial U \cap C_k \neq \varnothing$.

В силу сильной достижимости точки y_0 (см. замечание 2) существует континуум $E \subset D'$ и число $\delta > 0$ такие, что

$$M(\Delta(E, C_k; D')) \geqslant \delta$$

для всех достаточно больших k.

Без ограничения общности можем считать, что последнее условие выполнено для всех $k = 1, 2, \ldots$ Заметим, что $C = f^{-1}(E)$ является компактным подмножеством области D, и поэтому $\varepsilon_0 = \operatorname{dist}(x_0, C) > 0$. Снова без ограничения общности можем считать, что $r_k < \varepsilon_0$ для всех $k = 1, 2, \ldots$

Пусть Γ_m — семейство всех непрерывных кривых в $D \setminus D_m$, соединяющих сферу $S_0 = S(x_0, \varepsilon_0)$ и $\overline{\sigma_m}$, $m = 1, 2, \ldots$ Заметим, что по построению $C_k \subset D'_k \subset D'_m$ для всех $m \leqslant k$ и, таким образом, в силу принципа минорирования $M(f(\Gamma_m)) \geqslant \delta$ для всех $m = 1, 2, \ldots$

С другой стороны, величина $M(f(\Gamma_m))$ равна емкости конденсатора в D' с обкладками $\overline{D'_m}$ и $\overline{f(D \setminus B_0)}$, где $B_0 = B(x_0, \varepsilon_0)$ (см., например, [25]). Таким образом, по принципу минорирования и в силу теоремы 3.13 в [79]

$$M(f(\Gamma_m)) \leqslant \frac{1}{M^{n-1}(f(\Sigma_m))},$$

где Σ_m — набор всех пересечений области D со сферами $S(x_0, \rho)$, $\rho \in (r_m, \varepsilon_0)$, поскольку $f(\Sigma_m) \subset \Sigma(f(S_m), f(S_0))$, где $\Sigma(f(S_m), f(S_0))$ состоит из всех замкнутых подмножеств области D', разделяющих $f(S_m)$ и $f(S_0)$. Наконец, в силу условия (15) получаем, что $M(f(\Gamma_m)) \to 0$ при $m \to \infty$.

Полученное противоречие опровергает предположение, что предельное множество $C(P, f)$ состоит более чем из одной точки. $\square$

§6. О продолжении обратных отображений

Лемма 4. *Пусть D и D' — регулярные области в $\mathbb{R}^n$, $n \geqslant 2$, P_1 и P_2 — разные простые концы области D, f — нижний Q-гомеоморфизм области D на область D', и пусть σ_m, $m = 1, 2, \ldots,$ — цепь разрезов простого конца P_1 из леммы 2, лежащая на сферах $S(z_1, r_m)$, $z_1 \in I(P_1)$, с ассоциированными областями D_m. Предположим, что функция Q интегрируема в степени $n-1$ по сферам*

$$D(r) = \{x \in D : |x - z_1| = r\} = D \cap S(z_1, r) \tag{16}$$

для некоторого множества E чисел $r \in (0, d)$ положительной линейной меры, где $d = r_{m_0}$ и m_0 — минимальное из чисел таких, что область D_{m_0} не содержит последовательностей точек, сходящихся к P_2. Если $\partial D'$ является слабо плоской, то

$$C(P_1, f) \cap C(P_2, f) = \varnothing. \tag{17}$$

Заметим, что в силу метризуемости пополнения $\overline{D}_P$ области D простыми концами, см. замечание 3, число m_0 в лемме 4 всегда существует.

Доказательство. Выберем $\varepsilon \in (0,d)$ так, что $E_0 := \{r \in E : r \in (\varepsilon, d)\}$ имеет положительную линейную меру. Такой выбор возможен в силу полуаддитивности линейной меры и исчерпания $E = \cup E_m$, где $E_m = \{r \in E : r \in (1/m, d)\}$, $m = 1, 2, \ldots$ Заметим, что согласно предложению 2

$$M(f(\Sigma_\varepsilon)) > 0, \tag{18}$$

где Σ_ε — семейство всех поверхностей $D(r)$, $r \in (\varepsilon, d)$, из (16).

Предположим, что $C_1 \cap C_2 \neq \varnothing$, где $C_i = C(P_i, f)$, $i = 1, 2$. По построению существует $m_1 > m_0$ такое, что σ_{m_1} лежит на сфере $S(z_1, r_{m_1})$ с $r_{m_1} < \varepsilon$. Пусть $D_0 = D_{m_1}$ и $D_* \subseteq D \setminus D_{m_0}$ — область, ассоциированная с цепью разрезов простого конца P_2. Пусть $y_0 \in C_1 \cap C_2$. Выберем $r_0 > 0$ так, что $S(y_0, r_0) \cap f(D_0) \neq \varnothing$ и $S(y_0, r_0) \cap f(D_*) \neq \varnothing$.

Обозначим $\Gamma = \Gamma(\overline{D_0}, \overline{D_*}; D)$. Тогда по принципу минорирования и теореме 3.13 в [79] из (18) следует, что

$$M(f(\Gamma)) \leqslant \frac{1}{M^{n-1}(f(\Sigma_\varepsilon))} < \infty. \tag{19}$$

Пусть $M_0 > M(f(\Gamma))$ — конечное число. Из условия слабой плоскости $\partial D'$ следует, что найдется $r_* \in (0, r_0)$ такое, что

$$M(\Delta(E, F; D')) \geqslant M_0$$

для всех континуумов E и F в D', пересекающих сферы $S(y_0, r_0)$ и $S(y_0, r_*)$. Однако эти сферы могут быть соединены непрерывными кривыми c_1 и c_2 в областях $f(D_0)$ и $f(D_*)$ и, в частности, для этих кривых

$$M_0 \leqslant M(\Delta(c_1, c_2; D')) \leqslant M(f(\Gamma)). \tag{20}$$

Полученное противоречие опровергает предположение, что $C_1 \cap C_2 \neq \varnothing$. $\square$

Теорема 1. *Пусть D и D' — регулярные области в $\mathbb{R}^n$, $n \geqslant 2$. Если f — нижний Q-гомеоморфизм D на D' с $Q \in L^{n-1}(D)$, то f^{-1} продолжается до непрерывного отображения $\overline{D'}_P$ на $\overline{D}_P$.*

Доказательство. По теореме Фубини (см., например, [20]) множество

$$E(x_0) = \left\{ r \in (0, d(x_0)) : Q|_{D(x_0,r)} \in L^{n-1}(D(x_0, r)) \right\} \quad \forall\, x_0 \in \partial D,$$

где $d(x_0) = \sup_{x \in D} |x - x_0|$ и $D(x_0, r) = D \cap S(x_0, r)$, имеет положительную линейную меру, поскольку $Q \in L^{n-1}(D)$. Согласно замечанию 3 без ограничения общности можем считать, что область D' имеет слабо плоскую границу. Таким образом, рассуждая от противного и с учетом метризуемости пространств $\overline{D'}_P$ и $\overline{D}_P$ согласно замечанию 3, получаем заключение теоремы из леммы 4. $\Box$

Аналогично, комбинируя вышеприведенную лемму 4 и лемму 9.2 в [11], см. также лемму 9.6 в [50], получаем следующее утверждение.

Теорема 2. *Пусть D и D' — регулярные области в $\mathbb{R}^n$, $n \geqslant 2$. Если $f : D \to D'$ — нижний Q-гомеоморфизм с условием (15) на функцию Q, то f^{-1} продолжается до непрерывного отображения $\overline{D'}_P$ на $\overline{D}_P$.*

§7. О гомеоморфном продолжении на границу

Комбинируя лемму 3 и теорему 2, получаем следующее утверждение.

Теорема 3. *Пусть D и D' — регулярные области в $\mathbb{R}^n$, $n \geqslant 2$, и пусть $f : D \to D'$ — нижний Q-гомеоморфизм с*

$$\int\limits_0^{\delta(x_0)} \frac{dr}{||Q||_{n-1}(x_0, r)} = \infty \quad \forall\ x_0 \in \partial D \tag{21}$$

для некоторого $\delta(x_0) \in (0, d(x_0))$, где $d(x_0) = \sup\limits_{x \in D} |x - x_0|$ и

$$\|Q\|_{n-1}(x_0, r) = \Bigg(\int\limits_{D \cap S(x_0, r)} Q^{n-1}(x)\, d\mathcal{A} \Bigg)^{\frac{1}{n-1}}.$$

Тогда f продолжается до гомеоморфизма $\overline{D}_P$ на $\overline{D'}_P$.

Следствие 1. *В частности, заключение теоремы 3 справедливо, если*

$$q_{x_0}(r) = O\bigg(\Big[\log \frac{1}{r} \Big]^{n-1} \bigg) \quad \forall\ x_0 \in \partial D \tag{22}$$

при $r \to 0$, где $q_{x_0}(r)$ — среднее интегральное значение Q^{n-1} на сфере $|x - x_0| = r$.

Используя лемму 2.2 в [19] (см. также лемму 7.4 в [50]), из теоремы 3 получаем следующую общую лемму, которая, в свою очередь, дает возможность получать большое количество новых критериев.

Лемма 5. *Пусть D и D' — регулярные области в $\mathbb{R}^n$, $n \geqslant 2$, и пусть $f : D \to D'$ — нижний Q-гомеоморфизм. Предположим, что*

$$\int\limits_{D(x_0, \varepsilon)} Q^{n-1}(x) \cdot \psi^n_{x_0, \varepsilon}(|x - x_0|)\, dm(x) = o\left(I^n_{x_0}(\varepsilon)\right) \quad \forall x_0 \in \partial D \tag{23}$$

при $\varepsilon \to 0$, *где* $D(x_0, \varepsilon) = \{x \in D : \varepsilon < |x - x_0| < \varepsilon_0\}$ *для некоторого* $\varepsilon_0 = \varepsilon(x_0) > 0$, $\varepsilon(x_0) < d(x_0) = \sup\limits_{x \in D} |x - x_0|$, *а* $\psi_{x_0,\varepsilon}(t) : (0, \infty) \to [0, \infty]$, $\varepsilon \in (0, \varepsilon_0)$, — *семейство измеримых функций таких, что*

$$0 < I_{x_0}(\varepsilon) \colon = \int\limits_{\varepsilon}^{\varepsilon_0} \psi_{x_0,\varepsilon}(t)\ dt < \infty \quad \forall\ \varepsilon \in (0, \varepsilon_0).$$

Тогда f *продолжается до гомеоморфизма* $\overline{D}_P$ *на* $\overline{D'}_P$.

Замечание 4. Отметим, что (23) справедливо, в частности, если

$$\int\limits_{B(x_0,\varepsilon_0)} Q^{n-1}(x) \cdot \psi^n(|x - x_0|)\ dm(x) < \infty \qquad \forall\ x_0 \in \partial D, \tag{24}$$

где $B(x_0, \varepsilon_0) = \{x \in \mathbb{R}^n : |x - x_0| < \varepsilon_0\}$ для некоторого $\varepsilon_0 = \varepsilon(x_0) > 0$ и $\psi(t) : (0, \infty) \to [0, \infty]$ — измеримой функции такой, что $I_{x_0}(\varepsilon) \to \infty$ при $\varepsilon \to 0$. Иначе говоря, для продолжимости f до гомеоморфизма $\overline{D}_P$ на $\overline{D'}_P$ достаточно сходимости интегралов в (24) для некоторой неотрицательной функции $\psi(t)$, которая локально интегрируема на $(0, \varepsilon_0]$, но имеет неинтегрируемую сингулярность в нуле. Здесь в качестве общего ε_0 можно выбрать любое число из интервала $(0, d/2)$, где d — диаметр области D.

Пусть D — область в $\mathbb{R}^n$, $n \geqslant 1$. Напомним, что вещественнозначная функция $\varphi \in L^1_{\mathrm{loc}}(D)$ имеет **ограниченное среднее колебание** в D, пишем $\varphi \in \mathrm{BMO}(D)$, или просто $\varphi \in \mathrm{BMO}$, если

$$\|\varphi\|_* = \sup_{B \subset D} \ \ {⨍\limits_{B}} |\varphi(z) - \varphi_B|\, dm(z) < \infty, \tag{25}$$

где супремум берется по всем шарам B в D и

$$\varphi_B = ⨍\limits_{B} \varphi(z)\, dm(z) = \frac{1}{|B|} \int\limits_{B} \varphi(z)\, dm(z) \tag{26}$$

— среднее значение функции φ по B. Отметим, что $L^\infty(D) \subset \mathrm{BMO}(D) \subset L^p_{\mathrm{loc}}(D)$ для всех $1 \leqslant p < \infty$ (см., например, [62]).

Функция φ из BMO имеет **исчезающее среднее колебание**, пишем $\varphi \in \mathrm{VMO}$, если супремум в (25) по всем шарам B в D с радиусами $r < \varepsilon$ стремится к 0 при $\varepsilon \to 0$. Класс VMO был введен Сарасоном в работе [71]. Заметим, что имеется целый ряд работ, посвященных изучению уравнений в частных производных с коэффициентами из класса VMO (см., например, [30, 39, 51, 59, 61]).

Следуя [8], говорим, что функция $\varphi : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$, $n \geqslant 2$, имеет **конечное среднее колебание** в точке x_0, пишем $\varphi \in \mathrm{FMO}(x_0)$, если $\varphi \in L^1_{\mathrm{loc}}$ и

$$\overline{\lim_{\varepsilon \to 0}} \;\; ⨍_{B(x_0,\varepsilon)} |\varphi(x) - \widetilde{\varphi}_\varepsilon| \, dm(x) < \infty, \tag{27}$$

где через $\widetilde{\varphi}_\varepsilon$ обозначено среднее интегральное значение функции φ по шару $B(x_0, \varepsilon)$. Мы также пишем $\varphi \in \mathrm{FMO}(D)$, или просто $\varphi \in \mathrm{FMO}$, если это свойство выполнено в каждой точке $x_0 \in D$. Очевидно, что $\mathrm{BMO} \subset \mathrm{FMO}$. По определению $\mathrm{FMO} \subset L^1_{\mathrm{loc}}$, но FMO не является подмножеством L^p_{loc} ни для какого $p > 1$ (см. [50]). Таким образом, класс FMO существенно шире, чем класс $\mathrm{BMO}_{\mathrm{loc}}$.

Выбирая в лемме 5 $\psi(t) = \frac{1}{t \log 1/t}$ и применяя следствие 2.3 для FMO в [8] (см. следствие 6.3 в [50]), получаем следующий результат.

Теорема 4. *Пусть D и D' — регулярные области $\mathbb{R}^n$, $n \geqslant 2$, и $f : D \to D'$ — нижний Q-гомеоморфизм. Если функция Q^{n-1} имеет конечное среднее колебание во всех точках ∂D, то f продолжается до гомеоморфизма $\overline{D}_P$ на $\overline{D'}_P$.*

В свою очередь, отсюда на основе предложения 2.1 для FMO в [8] (см. предложение 6.1 в [50]) имеем также следующие простые следствия.

Следствие 2. *В частности, заключение теоремы 4 имеет место, если*

$$\overline{\lim_{\varepsilon \to 0}} ⨍_{B(x_0,\varepsilon)} Q^{n-1}(x) \, dm(x) < \infty \quad \forall\, x_0 \in \partial D. \tag{28}$$

Напомним, что точка x_0 называется **точкой Лебега** функции $\varphi : D \to \mathbb{R}$, если φ интегрируема в окрестности x_0 и

$$\lim_{\varepsilon \to 0} \;\; ⨍_{B(x_0,\varepsilon)} |\varphi(x) - \varphi(x_0)| \, dm(x) = 0. \tag{29}$$

Следствие 3. *Заключение теоремы 4 имеет место, если каждая точка $x_0 \in \partial D$ является точкой Лебега функции Q^{n-1}.*

Следующее утверждение также следует из леммы 5 при выборе $\psi(t) = 1/t$.

Теорема 5. *Пусть D и D' — регулярные области в $\mathbb{R}^n$, $n \geqslant 2$, и $f : D \to D'$ — нижний Q-гомеоморфизм. Если для некоторого $\varepsilon_0 = \varepsilon(x_0) \in (0, d_0)$, где $d_0 = d(x_0) = \sup\limits_{x \in D} |x - x_0|$,*

$$\int\limits_{\varepsilon < |x - x_0| < \varepsilon_0} Q(x) \, \frac{dm(x)}{|x - x_0|^n} = o\left(\left[\log \frac{1}{\varepsilon}\right]^n\right) \quad \forall\, x_0 \in \partial D \tag{30}$$

при $\varepsilon \to 0$, то f продолжается до гомеоморфизма $\overline{D}_P$ на $\overline{D'}_P$.

Замечание 5. Выбирая в лемме 5 функцию $\psi(t) = 1/(t\log 1/t)$ вместо $\psi(t) = 1/t$, условие (30) может быть заменено более слабым условием

$$\int\limits_{\varepsilon<|x-x_0|<\varepsilon_0} \frac{Q(x)\,dm(x)}{|x-x_0|\,\log\frac{1}{|x-x_0|}} = o\left(\left[\log\log\frac{1}{\varepsilon}\right]^n\right) \tag{31}$$

и (22) — условием

$$q_{x_0}(r) = o\left(\left[\log\frac{1}{r}\log\,\log\frac{1}{r}\right]^{n-1}\right). \tag{32}$$

Конечно, мы могли бы привести здесь целый ряд соответствующих условий логарифмического типа, используя подходящие функции $\psi(t)$.

Теорема 3 имеет множество других следствий, к примеру, следующее.

Теорема 6. *Пусть D и D' — регулярные области в $\mathbb{R}^n$, $n \geqslant 2$, и $f : D \to D'$ — нижний Q-гомеоморфизм с*

$$\int\limits_D \Phi\left(Q^{n-1}(x)\right) dm(x) < \infty \tag{33}$$

для неубывающей выпуклой функции $\Phi : [0,\infty] \to [0,\infty]$ такой, что

$$\int\limits_\delta^\infty \frac{d\tau}{\tau\left[\Phi^{-1}(\tau)\right]^{\frac{1}{n-1}}} = \infty \tag{34}$$

для некоторого $\delta > \Phi(0)$. Тогда f продолжается до гомеоморфизма $\overline{D}_P$ на $\overline{D'}_P$.

Действительно, из теоремы 3.1 и следствия 3.2 в [70] (33) и (34) влекут (21) и, таким образом, теорема 6 является прямым следствием теоремы 3.

Следствие 4. *В частности, заключение теоремы 4 имеет место, если для некоторого $\alpha > 0$*

$$\int\limits_D e^{\alpha Q^{n-1}(x)}\ dm(x) < \infty. \tag{35}$$

Замечание 6. Отметим, что условие (34) является не только достаточным, но и необходимым для непрерывного продолжения на границу отображений f с интегральными ограничениями вида (33) (см., например, теорему 5.1 и замечание 5.1 в [45]).

Кроме того, согласно теореме 2.1 в [70] (см. также предложение 2.3 в [65]) условие (34) эквивалентно каждому из следующих условий:

$$\int\limits_{\delta}^{\infty} H'_{n-1}(t)\ \frac{dt}{t} = \infty, \quad \delta > 0, \tag{36}$$

$$\int\limits_{\delta}^{\infty} \frac{dH_{n-1}(t)}{t} = \infty, \quad \delta > 0, \tag{37}$$

$$\int\limits_{\delta}^{\infty} H_{n-1}(t)\ \frac{dt}{t^2} = \infty, \quad \delta > 0, \tag{38}$$

$$\int\limits_{0}^{\Delta} H_{n-1}\Big(\frac{1}{t}\Big)\, dt = \infty, \quad \Delta > 0, \tag{39}$$

$$\int\limits_{\delta_*}^{\infty} \frac{d\eta}{H^{-1}_{n-1}(\eta)} = \infty, \quad \delta_* > H_{n-1}(+0), \tag{40}$$

$$\int\limits_{\delta_*}^{\infty} \frac{d\tau}{\tau\Phi^{-1}_{n-1}(\tau)} = \infty, \quad \delta_* > \Phi(+0), \tag{41}$$

где

$$H_{n-1}(t) = \log \Phi_{n-1}(t), \quad \Phi_{n-1}(t) = \Phi\left(t^{n-1}\right). \tag{42}$$

Здесь в (36) и (37) мы считаем интегралы равными ∞, если $\Phi_{n-1}(t) = \infty$, соответственно $H_{n-1}(t) = \infty$ для всех $t \geqslant T \in \mathbb{R}^+$. Интеграл в (37) понимается как интеграл Лебега–Стильтьеса, а интегралы в (36) и (38)–(41) как обычные интегралы Лебега.

Необходимо привести еще одно пояснение. В правых частях условий (36)–(41) мы подразумеваем $+\infty$. Если $\Phi_{n-1}(t) = 0$ для $t \in [0, t_*]$, то $H_{n-1}(t) = -\infty$ для $t \in [0, t_*]$, и мы полагаем $H'_{n-1}(t) = 0$ для $t \in [0, t_*]$. Отметим, что условия (37) и (38) исключают то, что t_* принадлежит интервалу интегрируемости, поскольку в противном случае левые части в (37) и (38) либо равны $-\infty$, либо не определены. Поэтому мы можем считать, что в (36)–(39) $\delta > t_0$, соответственно $\Delta < 1/t_0$, где $t_0 := \sup\limits_{\Phi_{n-1}(t)=0} t$, $t_0 = 0$, если $\Phi_{n-1}(0) > 0$.

Наиболее интересным из приведенных условий является условие (38), которое может быть переписано в виде

$$\int\limits_{\delta}^{\infty} \log \Phi(t)\ \frac{dt}{t^{n'}} = \infty, \tag{43}$$

где $\frac{1}{n'} + \frac{1}{n} = 1$, т. е. $n' = 2$ для $n = 2$, n' является строго убывающим по n и $n' = n/(n-1) \to 1$ при $n \to \infty$.

Теория граничного поведения нижних Q-гомеоморфизмов находит свое применение, в частности, к отображениям классов Соболева и Орлича–Соболева, а также к конечно билипшицевым отображениям, которые являются далеко идущими обобщениями хорошо известных классов изометрий и квазиизометрий (см., например, [9, 12, 13, 43, 46, 50, 64]).

§8. Нижние Q-гомеоморфизмы и классы Орлича–Соболева

Следуя Орличу (см. [57], а также монографии [14] и [78]), для заданной возрастающей функции $\varphi : \mathbb{R}^+ \to \mathbb{R}^+$, $\varphi(0) = 0$, обозначим через L^{φ} пространство всех функций $f : D \to \mathbb{R}$ таких, что

$$\int\limits_{D} \varphi\Big(\frac{|f(x)|}{\lambda}\Big)\, dm(x) < \infty \tag{44}$$

для некоторого $\lambda > 0$. Здесь, как и ранее, m обозначает меру Лебега в $\mathbb{R}^n$. Пространство L^{φ} называется **пространством Орлича**. Другими словами, L^{φ} является конусом над классом всех функций $g : D \to \mathbb{R}$ таких, что

$$\int\limits_{D} \varphi\left(|g(x)|\right)\ dm(x) < \infty, \tag{45}$$

которое также называется **классом Орлича**, см. [27].

Классом Орлича–Соболева $W^{1,\varphi}(D)$ называется класс всех локально интегрируемых функций f, заданных в D, с первыми обобщенными производными, градиент ∇f которых локально в области D принадлежит классу Орлича. Далее, $f \in W^{1,\varphi}_{\mathrm{loc}}(D)$, если $f \in W^{1,\varphi}(D_*)$ для каждой области D_* с компактным замыканием в D. Отметим, что по определению $W^{1,\varphi}_{\mathrm{loc}} \subseteq W^{1,1}_{\mathrm{loc}}$. Как обычно, пишем $f \in W^{1,p}_{\mathrm{loc}}$, если $\varphi(t) = t^p$, $p \geqslant 1$. В дальнейшем также пишем $f \in W^{1,\varphi}_{\mathrm{loc}}$ для всех локально интегрируемых вектор-функций n вещественных переменных $x_1, \ldots, x_n$, $f = (f_1, \ldots, f_m)$, если $f_i \in W^{1,1}_{\rm loc}$, $i=1,\ldots,m$, и

$$\int\limits_D \varphi\left(|\nabla f(x)|\right)\ dm(x)<\infty, \tag{46}$$

где $|\nabla f(x)|=\sqrt{\sum\limits_{i,j}\left(\frac{\partial f_i}{\partial x_j}\right)^2}$. Обратим внимание, что в данной статье мы используем понятие $W^{1,\varphi}_{\rm loc}$ для более общего класса функций φ, нежели в классическом определении классов Орлича, часто отказываясь от условий выпуклости и нормировки функции φ. Отметим также, что классы Орлича–Соболева интенсивно изучались в различных аспектах (см., например, [12] и последующие в них ссылки).

В связи с этим напомним несколько определений, связанных с классами Соболева. Пусть U — открытое множество в $\mathbb{R}^n$, $n\geqslant 2$. Символом $C_0^{\infty}(U)$ будем обозначать совокупность всех функций $\psi: U\rightarrow\mathbb{R}$ с компактным носителем, имеющих непрерывные частные производные произвольного порядка. Пусть u и $v: U\rightarrow\mathbb{R}$ — локально интегрируемые функции. Полагаем $x=(x_1,x_2,\ldots,x_n)$. Функция v называется **обобщенной производной** функции u по переменной x_i, $i=1,2,\ldots,n$, пишем u_{x_i}, если

$$\int\limits_U u\,\psi_{x_i}\,dm(x)=-\int\limits_U v\,\psi\,dm(x)\quad\forall\ \psi\in C_0^{\infty}(U). \tag{47}$$

Класс Соболева $W^{1,p}(U)$ определяется как семейство всех функций $u: U\rightarrow\mathbb{R}$ в $L^p(U)$, имеющих все обобщенные производные первого порядка, принадлежащие классу $L^p(U)$. Говорят, что функция $u: U\rightarrow\mathbb{R}$ принадлежит пространству $W^{1,p}_{\rm loc}(U)$, если $u\in W^{1,p}(U_*)$ для любого открытого множества U_* с компактным замыканием в U. В дальнейшем мы используем обозначение $W^{1,p}_{\rm loc}$ вместо $W^{1,p}_{\rm loc}(U)$, если недоразумение невозможно. Аналогичное определение может быть приведено для вектор-функции $f: U\rightarrow\mathbb{R}^m$, где принадлежность отображения классу Соболева определяется принадлежностью этому классу всех координатных функций отображения. Известно, что непрерывные функции f принадлежат $W^{1,p}_{\rm loc}$ тогда и только тогда, когда $f\in ACL^p$, т.е. если f — локально абсолютно непрерывна на п.в. прямых, параллельных координатным осям и если все первые частные производные f являются локально интегрируемы в степени p (см., например, 1.1.3 в [16]). Напомним, что понятие обобщенной производной было введено Соболевым в $\mathbb{R}^n$, $n\geqslant 2$ (см. [21]), и в настоящее время развивается в более общих пространствах многими авторами (см., например, множество соответствующих ссылок в [12]).

В этом параграфе мы покажем, что каждый гомеоморфизм f с конечным искажением в $\mathbb{R}^n$, $n \geqslant 3$, класса Орлича–Соболева $W^{1,\varphi}_{\rm loc}$ с условием типа Кальдерона

$$\int\limits_{t_*}^{\infty} \left[\frac{t}{\varphi(t)}\right]^{\frac{1}{n-2}} dt < \infty \tag{48}$$

для некоторого $t_* \in \mathbb{R}^+$ (ср. [28]) является нижним Q-гомеоморфизмом, где Q равна одной из дилатаций f.

Напомним, что для заданного отображения $f : D \to \mathbb{R}^n$, имеющего п. в. первые частные производные, через $f'(x)$ обозначают матрицу Якоби отображения f в точке $x \in D$, в которой она существует, $J(x) = J(x, f) = \det f'(x)$ — якобиан f в x, и $\|f'(x)\|$ — операторная норма $f'(x)$, т. е.

$$\|f'(x)\| = \max\{|f'(x)h| : h \in \mathbb{R}^n, |h| = 1\}. \tag{49}$$

Обозначим также

$$l(f'(x)) = \min\{|f'(x)h| : h \in \mathbb{R}^n, |h| = 1\}. \tag{50}$$

Внешняя дилатация отображения f в точке x определяется равенством

$$K_O(x) = K_O(x, f) = \begin{cases} \frac{\|f'(x)\|^n}{|J(x,f)|}, & \text{если } J(x, f) \neq 0, \\ 1, & \text{если } f'(x) = 0, \\ \infty & \text{в остальных точках,} \end{cases} \tag{51}$$

а **внутренняя дилатация** — равенством

$$K_I(x) = K_I(x, f) = \begin{cases} \frac{|J(x,f)|}{l(f'(x))^n}, & \text{если } J(x, f) \neq 0, \\ 1, & \text{если } f'(x) = 0, \\ \infty & \text{в остальных точках.} \end{cases} \tag{52}$$

Кроме того, далее мы также будем использовать дилатации P_O и P_I, определяемые как

$$P_O(x, f) = K_O^{\frac{1}{n-1}}(x, f) \quad \text{и} \quad P_I(x, f) = K_I^{\frac{1}{n-1}}(x, f). \tag{53}$$

Отметим, что

$$P_O(x, f) \leqslant K_I(x, f) \quad \text{и} \quad P_I(x, f) \leqslant K_O(x, f) \tag{54}$$

(см., например, секцию 1.2.1 в [17]) и, в частности, $K_O(x, f)$ и $K_I(x, f)$, $P_O(x, f)$ и $P_I(x, f)$ одновременно либо конечны, либо бесконечны. Кроме того, условие $K_O(x, f) < \infty$ п. в. эквивалентно тому, что п. в. либо $\det f'(x) > 0$, либо $f'(x) = 0$.

Напомним, что гомеоморфизм f между областями D и D' в $\mathbb{R}^n$, $n \geqslant 2$, называется **отображением с конечным искажением**, если $f \in W^{1,1}_{\mathrm{loc}}$ и

$$\|f'(x)\|^n \leqslant K(x) \cdot J_f(x) \quad \text{п. в.} \tag{55}$$

для некоторой конечной функции $K(x) \geqslant 1$. Другими словами, неравенство (55) означает, что дилатации $K_O(x,f)$, $K_I(x,f)$, $P_O(x,f)$ и $P_I(x,f)$ конечны п. в.

Впервые понятие отображения с конечным искажением было введено в случае плоскости для $f \in W^{1,2}_{\mathrm{loc}}$ в работе [40]. Позже это условие было заменено требованием $f \in W^{1,1}_{\mathrm{loc}}$, но с дополнительным ограничением $J_f \in L^1_{\mathrm{loc}}$ в монографии [38]. Теория отображений с конечным искажением приобрела много последователей (см., например, относящиеся ссылки в монографиях [35, 37, 50]). Им предшествовали отображения с ограниченным искажением (см. [17], а также [2]), другими словами, квазирегулярные отображения (см., например, [36, 49, 63]). Они также тесно связаны с более ранними отображениями с ограниченным интегралом Дирихле и отображениями квазиконформными в среднем, имеющими богатую историю (см., например, дальнейшие ссылки в [50]).

Заметим, что дополнительное требование $J_f \in L^1_{\mathrm{loc}}$, о котором говорилось выше, является излишним в случае гомеоморфизмов. Действительно, для каждого гомеоморфизма f между областями D и D' в $\mathbb{R}^n$, имеющего п. в. в D частные производные первого порядка, существует множество E лебеговой меры нуль такое, что f обладает (N)-свойством Лузина в $D \setminus E$ и

$$\int\limits_A J_f(x)\, dm(x) = |f(A)| \tag{56}$$

для каждого борелевого множества $A \subset D \setminus E$ (см., например, п. 3.1.4, 3.1.8 и 3.2.5 в [24]). На этой основе легко убедиться с помощью неравенства Гёльдера, что, в частности, если $f \in W^{1,1}_{\mathrm{loc}}$ — гомеоморфизм и $K_f \in L^q_{\mathrm{loc}}$ для некоторого $q > n-1$, где $K_f = K_O(x,f)$, то также $f \in W^{1,p}_{\mathrm{loc}}$ для некоторого $p > n-1$.

На основе (56) легко установить следующее полезное утверждение.

Предложение 4. *Пусть f — ACL гомеоморфное отображение области D из $\mathbb{R}^n$, $n \geqslant 2$, в $\mathbb{R}^n$. Тогда*

(i) $f \in W^{1,1}_{\mathrm{loc}}$, *если* $P_O \in L^1_{\mathrm{loc}}$,

(ii) $f \in W^{1,\frac{n}{2}}_{\mathrm{loc}}$, *если* $K_O \in L^1_{\mathrm{loc}}$,

(iii) $f \in W^{1,n-1}_{\mathrm{loc}}$, *если* $K_O \in L^{n-1}_{\mathrm{loc}}$,

(iv) $f \in W^{1,p}_{\mathrm{loc}}$, $p > n-1$, *если* $K_O \in L^{\gamma}_{\mathrm{loc}}$, $\gamma > n-1$,

(v) $f \in W^{1,p}_{\mathrm{loc}}$, $p = n\gamma/(1+\gamma) \geqslant 1$, *если* $K_O \in L^{\gamma}_{\mathrm{loc}}$, $\gamma \geqslant 1/(n-1)$.

Эти заключения и оценки (57) *ниже имеют место также для всех ACL отображений* $f : D \to \mathbb{R}^n$ *с* $J_f \in L^1_{\mathrm{loc}}$.

Действительно, по неравенству Гёльдера на компактном множестве C в D на основе (56) получаем следующие оценки для норм первых частных производных

$$\|\partial_i f\|_p \leqslant \|f'\|_p \leqslant \|K_O^{1/n}\|_s \cdot \|J_f^{1/n}\|_n \leqslant \|K_O\|_{\gamma}^{1/n} \cdot |f(C)|^{1/n} < \infty, \qquad (57)$$

если $K_O \in L^{\gamma}_{\mathrm{loc}}$ для некоторого $\gamma \in (0, \infty)$, поскольку $\|f'(x)\| = K_O^{1/n}(x) \cdot J_f^{1/n}(x)$ п. в., где $\frac{1}{p} = \frac{1}{s} + \frac{1}{n}$ и $s = \gamma n$, т. е. $\frac{1}{p} = \frac{1}{n}\big(\frac{1}{\gamma} + 1\big)$.

Следующее утверждение является ключевым для получения множества важных следствий нашей теории, развитой в §5, 6 и 7 (ср. с теоремой 5 в [12] и теоремой 4.1 в [46]).

Лемма 6. *Пусть D и D' — области в $\mathbb{R}^n$, $n \geqslant 3$, и пусть $\varphi : \mathbb{R}^+ \to \mathbb{R}^+$ — неубывающая функция такая, что*

$$\int\limits_{t_*}^{\infty} \left[\frac{t}{\varphi(t)}\right]^{\frac{1}{n-2}} dt < \infty \qquad (58)$$

для некоторого $t_* \in \mathbb{R}^+$. Тогда каждый гомеоморфизм $f : D \to D'$ конечного искажения класса $W^{1,\varphi}_{\mathrm{loc}}$ является нижним Q-гомеоморфизмом во всех точках $x_0 \in \overline{D}$ с $Q(x) = P_I(x, f)$.

Доказательство. Обозначим через B (борелевское) множество всех точек $x \in D$, в которых отображение f имеет полный дифференциал $f'(x)$ и $J_f(x) \neq 0$. Применяя теорему Кирсбрауна и используя единственность аппроксимативного дифференциала (см., например, разд. 2.10.43 и 3.1.2 в [24]), заключаем, что множество B представляет собой счетное объединение борелевских множеств B_l, $l = 1, 2, \ldots$, таких, что $f_l = f|_{B_l}$ являются билипшицевыми гомеоморфизмами (см., например, лемму 3.2.2 и теоремы 3.1.4 и 3.1.8 в [24]). Без ограничения общности можно считать, что множества B_l попарно не пересекаются. Обозначим также через B_* множество всех точек $x \in D$, где f имеет полный дифференциал и $f'(x) = 0$.

По построению множество $B_0 := D \setminus (B \bigcup B_*)$ имеет лебегову меру нуль (см. теорему 1 в [12]). Следовательно, $\mathcal{A}_S(B_0) = 0$ для п. в. гиперповерхностей S в $\mathbb{R}^n$ и, в частности, для п. в. сфер $S_r := S(x_0, r)$ с центром в точке $x_0 \in \overline{D}$ (см. теорему 2.11 в [44] или теорему 9.1 в [50]). Таким образом, по следствию 4 в [12] получаем $\mathcal{A}_{S_r^*}(f(B_0)) = 0$, а также $\mathcal{A}_{S_r^*}(f(B_*)) = 0$ для п. в. S_r, где $S_r^* = f(S_r)$.

Пусть Γ обозначает семейство всех пересечений сфер S_r, $r \in (\varepsilon, \varepsilon_0)$, $\varepsilon_0 < d_0 = \sup\limits_{x\in D} |x - x_0|$, с областью D. Для произвольной функции $\varrho_* \in \operatorname{adm} f(\Gamma)$ такой, что $\varrho_* \equiv 0$ вне $f(D)$, положим $\varrho \equiv 0$ вне D и на $D \setminus B$, и

$$\varrho(x) := \Lambda(x) \cdot \varrho_*(f(x)) \text{ для } x \in B,$$

где

$$\begin{aligned}\Lambda(x) &= [J_f(x) \cdot P_I(x,f)]^{\frac{1}{n}} = \left[\frac{\det f'(x)}{l(f'(x))}\right]^{\frac{1}{n-1}} \\ &= [\lambda_2 \cdot \ldots \cdot \lambda_n]^{\frac{1}{n-1}} \geqslant [J_{n-1}(x)]^{\frac{1}{n-1}};\end{aligned}$$

здесь, как обычно, $\lambda_n \geqslant \ldots \geqslant \lambda_1$ — главные дилатационные коэффициенты $f'(x)$ (см., например, секцию I.4.1 в [17]) и $J_{n-1}(x)$ — $(n-1)$-мерный Якобиан сужения $f|_{S_r}$ в x (см. п. 3.2.1 в [24]).

Рассуждая покусочно на каждом B_l, $l = 1, 2, \ldots$, и учитывая теорему Кирсбрауна, согласно теореме 3.2.5 о замене переменных в [24] получаем, что

$$\int\limits_{S_r} \varrho^{n-1}\, d\mathcal{A} \geqslant \int\limits_{S_*^r} \varrho_*^{n-1}\, d\mathcal{A} \geqslant 1$$

для п. в. S_r и, следовательно, $\varrho \in \operatorname{ext}\operatorname{adm}\Gamma$.

Используя замену переменных на каждом B_l, $l = 1, 2, \ldots$ (см. снова теорему 3.2.5 в [24]), ввиду счетной аддитивности интеграла получаем оценку

$$\int\limits_{D} \frac{\varrho^n(x)}{P_I(x)}\, dm(x) \leqslant \int\limits_{f(D)} \varrho_*^n(x)\, dm(x),$$

что завершает доказательство. □

Следствие 5. *Любой гомеоморфизм f с конечным искажением в $\mathbb{R}^n$, $n \geqslant 3$, класса $W^{1,p}_{\mathrm{loc}}$ при $p > n-1$ является нижним Q-гомеоморфизмом в каждой точке $x_0 \in \overline{D}$ с $Q = P_I$.*

Комбинируя последнее следствие с предложением 4, получаем следующее заключение.

Следствие 6. *Любой гомеоморфизм f класса $W^{1,1}_{\mathrm{loc}}$ в $\mathbb{R}^n$, $n \geqslant 3$, с $K_O \in L^q_{\mathrm{loc}}$ при некотором $q > n-1$ является нижним Q-гомеоморфизмом в каждой точке $x_0 \in \overline{D}$ с и $Q = P_I$.*

В силу предложения 3 из леммы 6 получаем следующее утверждение.

Предложение 5. *Пусть* $f : D \to \mathbb{R}^n$, $n \geqslant 3$, — *гомеоморфизм с* $K_I \in L^1_{\text{loc}}$ *класса* $W^{1,\varphi}_{\text{loc}}$, *где* $\varphi : \mathbb{R}^+ \to \mathbb{R}^+$ — *неубывающая функция такая, что*

$$\int\limits_{t_*}^{\infty} \left[\frac{t}{\varphi(t)}\right]^{\frac{1}{n-2}} dt < \infty. \tag{59}$$

Тогда f *является кольцевым* Q*-гомеоморфизмом в каждой точке* $x_0 \in \overline{D}$ *с* $Q = K_I$.

Следствие 7. *Любой гомеоморфизм* f *класса* $W^{1,1}_{\text{loc}}$ *в* $\mathbb{R}^n$, $n \geqslant 3$, *с* $K_O \in L^q_{\text{loc}}$ *при некотором* $q > n-1$ *является кольцевым* Q*-гомеоморфизмом в каждой точке* $x_0 \in \overline{D}$ *с* $Q = K_I$.

Замечание 7. В силу замечания 1 заключение предложения 5 остается в силе, если K_I интегрируема только на почти всех сферах достаточно малых радиусов с центром в точке x_0, в предположении, что функция K_I продолжена нулем вне D.

§9. Граничное поведение классов Орлича–Соболева

В этом параграфе мы предполагаем, что $\varphi : \mathbb{R}^+ \to \mathbb{R}^+$ — неубывающая функция такая, что для некоторого $t_* \in \mathbb{R}^+$

$$\int\limits_{t_*}^{\infty} \left[\frac{t}{\varphi(t)}\right]^{\frac{1}{n-2}} dt < \infty. \tag{60}$$

Непрерывное продолжение на границу обратных отображений имеет более простой критерий, чем для прямых отображений. Поэтому мы начнем именно с него. А именно в силу леммы 6 имеем следующее следствие теоремы 1.

Теорема 7. *Пусть* D *и* D' — *регулярные области в* $\mathbb{R}^n$, $n \geqslant 3$, *и пусть* f — *гомеоморфизм* D *на* D' *класса* $W^{1,\varphi}_{\text{loc}}$ *с условием* (60) *и* $K_I \in L^1(D)$. *Тогда* f^{-1} *может быть продолжено до непрерывного отображения* $\overline{D'}_P$ *на* $\overline{D}_P$.

Однако, как следует из примера в предложении 6.3 из [50], любая степень интегрируемости $K_I \in L^q(D)$, $q \in [1, \infty)$, не гарантирует непрерывного продолжения прямых отображений.

Из леммы 6 получаем следующее следствие теоремы 3.

Теорема 8. *Пусть D и D' — регулярные области в $\mathbb{R}^n$, $n \geqslant 3$, и пусть $f : D \to D'$ — гомеоморфизм конечного искажения класса $W^{1,\varphi}_{\rm loc}$ с условием* (60) *такой, что*

$$\int\limits_0^{\delta(x_0)} \frac{dr}{\|K_I\|^{\frac{1}{n-1}}(x_0,r)} = \infty \quad \forall\ x_0 \in \partial D \tag{61}$$

для некоторого $\delta(x_0) \in (0, d(x_0))$, где $d(x_0) = \sup\limits_{x\in D}|x - x_0|$ и

$$\|K_I\|(x_0,r) = \int\limits_{D\cap S(x_0,r)} K_I(x,f)\ d\mathcal{A}.$$

Тогда f может быть продолжен до гомеоморфизма $\overline{D}_P$ на $\overline{D'}_P$.

В частности, как следствие теоремы 8 получаем следующее обобщение хорошо известных теорем Геринга–Мартио и Мартио–Вуоринена о гомеоморфном продолжении на границу квазиконформных отображений между QED-областями (см. [34] и [52]).

Следствие 8. *Пусть D и D' — регулярные области в $\mathbb{R}^n$, $n \geqslant 3$, и пусть $f : D \to D'$ — гомеоморфизм конечного искажения класса $W^{1,p}_{\rm loc}$, $p > n-1$, в частности, гомеоморфизм класса $W^{1,1}_{\rm loc}$ с $K_O \in L^q_{\rm loc}$, $q > n-1$. Если выполнено* (61), *то f может быть продолжен до гомеоморфизма $\overline{D}_P$ на $\overline{D'}_P$.*

По лемме 6, как следствие леммы 5, получаем следующую общую лемму.

Лемма 7. *Пусть D и D' — регулярные области в $\mathbb{R}^n$, $n \geqslant 3$, и пусть $f : D \to D'$ — гомеоморфизм конечного искажения класса $W^{1,\varphi}_{\rm loc}$ с условием* (60) *такой, что*

$$\int\limits_{D(x_0,\varepsilon,\varepsilon_0)} K_I(x,f)\cdot\psi^n_{x_0,\varepsilon}(|x-x_0|)\,dm(x) = o(I^n_{x_0}(\varepsilon)) \quad \forall\ x_0 \in \partial D \tag{62}$$

при $\varepsilon \to 0$, где $D(x_0,\varepsilon,\varepsilon_0) = \{x \in D : \varepsilon < |x - x_0| < \varepsilon_0\}$ для некоторого $\varepsilon_0 \in (0,\delta_0)$, $\delta_0 = \delta(x_0) = \sup_{x\in D}|x - x_0|$, и $\psi_{x_0,\varepsilon}(t)$ — семейство неотрицательных измеримых (*по Лебегу*) *функций на $(0,\infty)$ таких, что*

$$0 < I_{x_0}(\varepsilon)\ :\ = \int\limits_{\varepsilon}^{\varepsilon_0} \psi_{x_0,\varepsilon}(t)\ dt < \infty \qquad \forall\ \varepsilon \in (0,\varepsilon_0). \tag{63}$$

Тогда f может быть продолжен до гомеоморфизма $\overline{D}_P$ на $\overline{D'}_P$.

Выбирая в лемме 7 $\psi(t) = 1/(t \log 1/t)$ и применяя следствие 2.3 о FMO в [8] (см. также следствие 6.3 в [50]), получаем следующий результат.

Теорема 9. *Пусть D и D' — регулярные области в $\mathbb{R}^n$, $n \geqslant 3$, и пусть $f : D \to D'$ — гомеоморфизм класса $W^{1,\varphi}_{\mathrm{loc}}$ с условием (60) такой, что*

$$K_I(x, f) \leqslant Q(x) \text{ п. в. в } D \tag{64}$$

для функции $Q \in \mathrm{FMO}(x_0)$ при всех $x_0 \in \partial D$. Тогда f может быть продолжен до гомеоморфизма $\overline{D}_P$ на $\overline{D'}_P$.

В следующих следствиях мы предполагаем, что $K_I(x, f)$ продолжена нулем вне D.

Следствие 9. *В частности, заключение теоремы 9 справедливо, если*

$$\overline{\lim_{\varepsilon \to 0}} \;\; ⨍_{B(x_0,\varepsilon)} K_I(x, f)\, dm(x) < \infty \quad \forall\, x_0 \in \partial D. \tag{65}$$

Аналогично, выбирая в лемме 7 функцию $\psi(t) = 1/t$, получаем следующее более общее утверждение.

Теорема 10. *Пусть D и D' — регулярные области в $\mathbb{R}^n$, $n \geqslant 3$, и пусть $f : D \to D'$ — гомеоморфизм класса $W^{1,\varphi}_{\mathrm{loc}}$ с условием (60) такой, что*

$$\int\limits_{\varepsilon<|x-x_0|<\varepsilon_0} K_I(x, f)\, \frac{dm(x)}{|x - x_0|^n} = o\left(\left[\log \frac{\varepsilon_0}{\varepsilon}\right]^n\right) \quad \forall\, x_0 \in \partial D \tag{66}$$

при $\varepsilon \to 0$ для некоторого $\varepsilon_0 \in (0, d_0)$, где $d_0 = d(x_0) = \sup_{x\in D} |x - x_0|$. Тогда f может быть продолжен до гомеоморфизма $\overline{D}_P$ на $\overline{D'}_P$.

Следствие 10. *Условие (66) и утверждение теоремы 10 справедливы, если*

$$K_I(x, f) = o\left(\left[\log \frac{1}{|x - x_0|}\right]^{n-1}\right) \tag{67}$$

при $x \to x_0$. Это же верно, если

$$k_f(r) = o\left(\left[\log \frac{1}{r}\right]^{n-1}\right) \tag{68}$$

при $r \to 0$, где $k_f(r)$ — среднее значение функции $K_I(x, f)$ на сфере $|x - x_0| = r$.

Замечание 8. Выбирая в лемме 7 функцию $\psi(t) = 1/(t \log 1/t)$ вместо $\psi(t) = 1/t$, можем заменить условие (66) на более слабое условие

$$\int\limits_{\varepsilon<|x-x_0|<1} \frac{K_I(x, f)\; dm(x)}{\left(|x - x_0| \log \frac{1}{|x-x_0|}\right)^n} = o\left(\left[\log \log \frac{1}{\varepsilon}\right]^n\right), \tag{69}$$

а (68) — на условие

$$k_f(r) = o\biggl(\Bigl[\log\frac{1}{r}\log\log\frac{1}{r}\Bigr]^{n-1}\biggr). \tag{70}$$

Таким образом, достаточно потребовать, чтобы

$$k_f(r) = O\biggl(\Bigl[\log\frac{1}{r}\Bigr]^{n-1}\biggr). \tag{71}$$

Здесь также можно привести целую серию соответствующих условий в терминах log, выбирая функции $\psi(t)$ вида $1/(t\,\log\ldots\log 1/t)$.

Теорема 11. *Пусть D и D' — регулярные области в $\mathbb{R}^n$, $n\geqslant 3$, и пусть $f: D\to D'$ — гомеоморфизм класса $W^{1,\varphi}_{\rm loc}$ с условием* (60) *такой, что*

$$\int\limits_D \Phi(K_I(x,f))\;dm(x) < \infty \tag{72}$$

для неубывающей выпуклой функции $\Phi:\overline{\mathbb{R}^+}\to\overline{\mathbb{R}^+}$. Если для некоторого $\delta>\Phi(0)$

$$\int\limits_{\delta}^{\infty}\frac{d\tau}{\tau\,[\Phi^{-1}(\tau)]^{\frac{1}{n-1}}} = \infty, \tag{73}$$

то f может быть продолжен до гомеоморфизма $\overline{D}_P$ на $\overline{D'}_P$.

Действительно, по теореме 3.1 и следствию 3.2 в [70] (72) и (73) влекут (61) и, следовательно, теорема 11 является прямым следствием теоремы 8.

Следствие 11. *В частности, утверждение теоремы* 11 *имеет место, если для некоторого $\alpha>0$*

$$\int\limits_D e^{\alpha K_I(x,f)}\;dm(x) < \infty. \tag{74}$$

Замечание 9. Заметим, что согласно теореме 5.1 и замечанию 5.1 в [45] условие (73) является не только достаточным, но и необходимым для непрерывного продолжения на границу отображения f с интегральным ограничением (72).

Отметим также, что в силу замечания 6 условие (73) эквивалентно каждому из условий (36)–(41) и, в частности, следующему условию

$$\int\limits_{\delta}^{\infty}\log\,\Phi(t)\,\frac{dt}{t^{n'}} = +\infty \tag{75}$$

для некоторого $\delta > 0$, где $\frac{1}{n'} + \frac{1}{n} = 1$, т.е. $n' = 2$ для $n = 2$, n' строго убывает по n и $n' = n/(n-1) \to 1$ при $n \to \infty$.

Наконец, отметим, что все эти результаты справедливы, к примеру, если $f \in W^{1,p}_{\rm loc}$, $p > n-1$, и, в частности, если $f \in W^{1,1}_{\rm loc}$ и $K_O \in L^q_{\rm loc}$, $q > n-1$. Кроме того, результаты могут быть распространены на римановы многообразия (см., например, [1] и [13]).

§10. О конечно билипшицевых отображениях

Для заданного открытого множества $\Omega \subseteq \mathbb{R}^n$, $n \geqslant 2$, следуя [44], см. также [50], говорим, что отображение $f : \Omega \to \mathbb{R}^n$ является **конечно билипшицевым**, если

$$0 < l(x, f) \ \leqslant\ L(x, f) < \infty \quad \forall\, x \in \Omega, \tag{76}$$

где

$$L(x, f) = \limsup_{y \to x} \frac{|f(y) - f(x)|}{|y - x|} \tag{77}$$

и

$$l(x, f) = \liminf_{y \to x} \frac{|f(y) - f(x)|}{|y - x|} \tag{78}$$

(ср. с определением билипшицевых отображений в §4).

По классической теореме Степанова (см. [22], а также [48]) получаем из правой части (76), что конечно билипшицевы отображения дифференцируемы п.в., а из левой части неравенства (76) получаем, что $J_f(x) \neq 0$ п.в. Кроме того, такие отображения обладают (N)-свойством относительно хаусдорфовой меры (см., например, либо лемму 5.3 в [44], либо лемму 10.6 в [50]). Таким образом, доказательство следующей леммы в точности повторяет доказательство леммы 6, поэтому мы его не приводим (ср. также с более слабыми, но аналогичными следствием 5.15 в [44] и следствием 10.10 в [50]).

Лемма 8. *Любой конечно билипшицев гомеоморфизм $f : \Omega \to \mathbb{R}^n$, $n \geqslant 2$, является нижним Q-гомеоморфизмом с $Q = P_I$.*

Согласно предложению 3 получаем также следующее утверждение из леммы 8.

Предложение 6. *Любой конечно билипшицев гомеоморфизм $f : \Omega \to \mathbb{R}^n$, $n \geqslant 2$, с $K_I \in L^1_{\rm loc}$ является кольцевым Q-гомеоморфизмом в каждой точке $x_0 \in \overline{D}$ с $Q = K_I$.*

Замечание 10. В силу замечания 1 заключение предложения 6 остается также справедливым, если K_I интегрируема только на почти всех сферах достаточно малых радиусов с центром в точке x_0, в предположении, что функция K_I продолжена нулем вне D.

Следствие 12. *Все результаты о граничном поведении нижних Q-гомеоморфизмов, сформулированные в* §5–7, *справедливы для конечно билипшицевых гомеоморфизмов $f : \Omega \to \mathbb{R}^n$, $n \geqslant 2$, с $Q = P_I(x, f)$.*

Все эти результаты для конечно билипшицевых гомеоморфизмов полностью аналогичны соответствующим результатам для гомеоморфизмов с конечным искажением классов Орлича–Соболева. Мы не будем их все формулировать в явном виде в терминах внутренней дилатации K_I.

Приведем для примера только один из таких результатов.

Теорема 12. *Пусть D и D' — регулярные области в $\mathbb{R}^n$, $n \geqslant 2$, и пусть $f : D \to D'$ — конечно билипшицев гомеоморфизм такой, что*

$$\int\limits_{D} \Phi(K_I(x, f))\ dm(x) < \infty \tag{79}$$

для неубывающей выпуклой функции $\Phi : \overline{\mathbb{R}^+} \to \overline{\mathbb{R}^+}$. Если для некоторого $\delta > \Phi(0)$

$$\int\limits_{\delta}^{\infty} \frac{d\tau}{\tau\,[\Phi^{-1}(\tau)]^{\frac{1}{n-1}}} = \infty, \tag{80}$$

то f может быть продолжен до гомеоморфизма $\overline{D}_P$ на $\overline{D'}_P$.

Следствие 13. *В частности, заключение теоремы* 12 *имеет место, если для некоторого $\alpha > 0$*

$$\int\limits_{D} e^{\alpha K_I(x,f)}\ dm(x) < \infty. \tag{81}$$

Список литературы

[1] Афанасьева Е. С., Рязанов В. И., Салимов Р. Р., *Об отображениях класса Орлича–Соболева на римановых многообразиях*, Укр. мат. вестн. **8** (2011), №3, 319–342.

[2] Водопьянов С. К., *Отображения с ограниченным искажением и с конечным искажением на группах Карно*, Сиб. мат. ж. **40** (1999), №4, 764–804.

[3] Водопьянов С. К., Гольдштейн В. М., Решетняк Ю. Г., *О геометрических свойствах функций с первыми обобщенными производными*, Успехи мат. наук **34** (1979), №1, 17–65.

[4] Голузин Г. М., *Геометрическая теория функций комплексного переменного*, Наука, М., 1966.

[5] Зорич В. А., *Соответствие границ при Q-квазиконформных отображениях шара*, Докл. АН СССР **145** (1962), №6, 1209–1212.

[6] Зорич В. А., *Граничные свойства одного класса отображений в пространстве*, Докл. АН СССР **153** (1963), №1, 23–26.

[7] Зорич В. А., *Определение граничных элементов посредством сечений*, Докл. АН СССР **164** (1965), №4, 736–739.

[8] Игнатьев А. А., Рязанов В. И., *Конечное среднее колебание в теории отображений*, Укр. мат. вестн. **2** (2005), №3, 395–417.

[9] Ковтонюк Д. А., Петков И. В., Рязанов В. И., Салимов Р. Р., *Граничное поведение и задача Дирихле для уравнений Бельтрами*, Алгебра и анализ **25** (2013), №4, 101–124.

[10] Ковтонюк Д. А., Рязанов В. И., *К теории границ пространственных областей*, Тр. ИПММ НАН Украины **13** (2006), 110–120.

[11] Ковтонюк Д. А., Рязанов В. И., *К теории нижних Q-гомеоморфизмов*, Укр. мат. вестн. **5** (2008), №2, 159–184.

[12] Ковтонюк Д. А., Рязанов В. И., Салимов Р. Р., Севостьянов Е. А., *К теории классов Орлича–Соболева*, Алгебра и анализ **25** (2013), №6, 49–101.

[13] Ковтонюк Д. А., Салимов Р. Р., Севостьянов Е. А., *К теории отображений классов Соболева и Орлича–Соболева* (под общ. ред. Рязанова В. И.), Наукова думка, Киев, 2013.

[14] Красносельский М. А., Рутицкий Я. Б., *Выпуклые функции и пространства Орлича*, Физматгиз, 1958.

[15] Ломако Т. В., *О распространении некоторых обобщений квазиконформных отображений на границу*, Укр. мат. ж. **61** (2009), №10, 1329–1337.

[16] Мазья В. Г., *Пространства С. Л. Соболева*, ЛГУ, Л., 1985.

[17] Решетняк Ю. Г., *Пространственные отображения с ограниченным искажением*, Наука, Новосибирск, 1982.

[18] Рязанов В. И., Салимов Р. Р., *Слабо плоские пространства и границы в теории отображений*, Укр. мат. вестн. **4** (2007), №2, 199–234.

[19] Рязанов В. И., Севостьянов Е. А., *Равностепенно непрерывные классы кольцевых Q-гомеоморфизмов*, Сиб. мат. ж. **48** (2007), №6, 1361–1376.

[20] Сакс С., *Теория интеграла*, ИЛ, М., 1949.

[21] Соболев С. Л., *Приложения функционального анализа в математической физике*, ЛГУ, Л., 1950.
[22] Stepanoff W., *Sur les conditions de l'existence de la differentielle totale*, Мат. сб. **32** (1925), №3, 511–526.
[23] Суворов Г. Д., *Обобщенный принцип „длины и площади" в теории отображений*, Наукова думка, Киев, 1985.
[24] Федерер Г., *Геометрическая теория меры*, Наука, М., 1987.
[25] Шлык В. А., *О равенстве p-емкости и p-модуля*, Сиб. мат. ж. **34** (1993), №6, 216–221.
[26] Adamowicz T., Björn A., Björn J., Shanmugalingam N., *Prime ends for domains in metric spaces*, Adv. Math. **238** (2013), 459–505.
[27] Birnbaum Z., Orlicz W., *Über die Verallgemeinerungen des Begriffes der zueinauder konjugierten Potenzen*, Studia Math. **3** (1931), 1–67.
[28] Calderon A. P., *On the differentiability of absolutely continuous functions*, Riv. Math. Univ. Parma **2** (1951), 203–213.
[29] Caratheodory C., *Über die Begrenzung der einfachzusammenhängender Gebiete*, Math. Ann. **73** (1913), no. 3, 323–370.
[30] Chiarenza F., Frasca M., Longo P., *$W^{2,p}$-solvability of the Dirichlet problem for nondivergence elliptic equations with VMO coefficients*, Trans. Amer. Math. Soc. **336** (1993), no. 2, 841–853.
[31] Collingwood E. F., Lohwator A. J., *The theory of cluster sets*, Cambridge Tracts in Math., vol. 56, Cambridge Univ. Press, Cambridge, 1966.
[32] Freudenthal H., *Enden and Primenden*, Fund. Math. **39** (1952), 189–210.
[33] Gehring F. W., *Rings and quasiconformal mappings in space*, Trans. Amer. Math. Soc. **103** (1962), no. 3, 353–393.
[34] Gehring F. W., Martio O., *Quasiextremal distance domains and extension of quasiconformal mappings*, J. Anal. Math. **45** (1985), 181–206.
[35] Gutlyanskii V., Ryazanov V., Srebro U., Yakubov E., *The Beltrami equation. A geometric approach*, Developments in Math., vol. 26, Springer, New York, 2012.
[36] Heinonen J., Kilpelainen T., Martio O., *Nonlinear potential theory of degenerate elliptic equations*, Oxford Math. Monogr., Clarendon Press, New York, 1993.
[37] Hencl S., Koskela P., *Lectures on mappings of finite distortion*, Lecture Notes in Math., vol. 2096, Springer, Cham, 2014.
[38] Iwaniec T., Martin G., *Geometric function theory and non-linear analysis*, Oxford Math. Monogr., Oxford Univ. Press, New York, 2001.
[39] Iwaniec T., Sbordone C., *Riesz transforms and elliptic PDEs with VMO coefficients*, J. Anal. Math. **74** (1998), 183–212.

[40] Iwaniec T., Sverák V., *On mappings with integrable dilatation*, Proc. Amer. Math. Soc. **118** (1993), no. 1, 181–188.

[41] Kaufmann B., *Über die Berandung ebener und räumlicher Gebiete*, Math. Ann. **103** (1930), no. 1, 70–144.

[42] Kovtonyuk D., Petkov I., Ryazanov V., Salimov R. R., *On the Dirichlet problem for the Beltrami equation*, J. Anal. Math. **122** (2014), no. 4, 113–141.

[43] Kovtonyuk D., Petkov I., Ryazanov V., *On the boundary behaviour of solutions to the Beltrami equations*, Complex Var. Elliptic Equ. **58** (2013), no. 5, 647–663.

[44] Kovtonyuk D., Ryazanov V., *On the theory of mappings with finite area distortion*, J. Anal. Math. **104** (2008), 291–306.

[45] Kovtonyuk D., Ryazanov V., *On the boundary behavior of generalized quasi-isometries*, J. Anal. Math. **115** (2011), 103–119.

[46] Kovtonyuk D. A., Ryazanov V. I., Salimov R. R., Sevost'yanov E. A., *On mappings in the Orlicz–Sobolev classes*, Ann. Univ. Buchar. Math. Ser. **3(LXI)** (2012), no. 1, 67–78.

[47] Lindelöf E., *Sur un principe general de l'analyse et ses applications a la theorie de la representation conforme*, Acta Soc. Sci. Fenn. **46** (1915), no. 4, 1–35.

[48] Maly J., *A simple proof of the Stepanov theorem on differentiability almost everywhere*, Expo. Math. **17** (1999), 59–61.

[49] Martio O., Rickman S., Väisälä J., *Definitions for quasiregular mappings*, Ann. Acad. Sci. Fenn. Math. **448** (1969), 1–40.

[50] Martio O., Ryazanov V., Srebro U., Yakubov E., *Moduli in modern mapping theory*, Springer Monogr. Math., Springer, New York, 2009.

[51] Martio O., Ryazanov V., Vuorinen M., *BMO and injectivity of space quasiregular mappings*, Math. Nachr. **205** (1999), 149–161.

[52] Martio O., Vuorinen M., *Whitney cubes, p-capacity and Minkowski content*, Expo. Math. **5** (1987), no. 1, 17–40.

[53] Mazurkiewicz S., *Über die Definition der Primenden*, Fund. Math. **26** (1936), 272–279.

[54] Mazurkiewicz S., *Recherches sur la theorie des bouts premiers*, Fund. Math. **33** (1945), 177–228.

[55] Näkki R., *Prime ends and quasiconformal mappings*, J. Anal. Math. **35** (1979), 13–40.

[56] Ohtsuka M., *Extremal length and precise functions*, Gakkotosho Co., Tokyo, 2003.

[57] Orlicz W., *Über eine gewisse Klasse von Räumen vom Typus B*, Bull. Intern. de l'Acad. Pol. Ser. A, Cracovie, 1932, 207–220.

[58] Orlicz W., *Über Räume* (L^M), Bull. Intern. de l'Acad. Pol. Ser. A, Cracovie, 1936, 93–107.
[59] Palagachev D. K., *Quasilinear elliptic equations with VMO coefficients*, Trans. Amer. Math. Soc. **347** (1995), no. 7, 2481–2493.
[60] Rado T., Reichelderfer P. V., *Continuous transformations in analysis*, Grundlehren Math. Wiss., Bd. 75, Springer, Berlin, 1955.
[61] Ragusa M. A., *Elliptic boundary value problem in vanishing mean oscillation hypothesis*, Comment. Math. Univ. Carolin. **40** (1999), no. 4, 651–663.
[62] Reimann H. M., Rychener T., *Funktionen beschränkter mittlerer oscillation*, Lecture Notes in Math., vol. 487, Springer-Verlag, Berlin, 1975.
[63] Rickman S., *Quasiregular mappings*, Ergeb. Math. Grenzgeb.(3), vol. 26, Springer-Verlag, Berlin, 1993.
[64] Ryazanov V., Salimov R., Srebro U., Yakubov E., *On boundary value problems for the Beltrami equations*, Contemp. Math., vol. 591, Amer. Math. Soc., Providence, RI, 2013, pp. 211–242.
[65] Ryazanov V., Sevost'yanov E., *Equicontinuity of mappings quasiconformal in the mean*, Ann. Acad. Sci. Fenn. Math. **36** (2011), 231–244.
[66] Ryazanov V., Srebro U., Yakubov E., *On ring solutions of Beltrami equation*, J. Anal. Math. **96** (2005), 117–150.
[67] Ryazanov V., Srebro U., Yakubov E., *To strong ring solutions of the Beltrami equations*, Uzbek. Math. J. **2009**, no. 1, 127–137.
[68] Ryazanov V., Srebro U., Yakubov E., *On strong solutions of the Beltrami equations*, Complex Var. Elliptic Equ. **55** (2010), no. 1–3, 219–236.
[69] Ryazanov V., Srebro U., Yakubov E., *Integral conditions in the theory of the Beltrami equations*, Complex Var. Elliptic Equ. **57** (2012), no. 12, 1247–1270.
[70] Ryazanov V., Srebro U., Yakubov E., *Integral conditions in the mapping theory*, Укр. мат. вестн. **7** (2010), №1, 73–87.
[71] Sarason D., *Functions of vanishing mean oscillation*, Trans. Amer. Math. Soc. **207** (1975), 391–405.
[72] Ursell H. D., Young L. C., *Remarks on the theory of prime ends*, Mem. Amer. Mat. Soc. **1951**, no. 3.
[73] Vasil'ev A., *Moduli of families of curves for conformal and quasiconformal mappings*, Lecture Notes in Math., vol. 1788, Springer-Verlag, Berlin, 2002.
[74] Väisälä J., *Lectures on n-dimensional quasiconformal mappings*, Lecture Notes in Math., vol. 229, Springer-Verlag, Berlin, 1971.
[75] Vuorinen M., *Conformal geometry and quasiregular mappings*, Lecture Notes in Math., vol. 1319, Springer-Verlag, Berlin, 1988.

[76] Whyburn G. Th., *Analytic topology*, Amer. Math. Soc. Collog. Publ., vol. 28, Amer. Math. Soc., New York, 1942.

[77] Wilder R. L., *Topology of manifolds*, Amer. Math. Soc. Collog. Publ., vol. 3, Amer. Math. Soc., New York, 1949.

[78] Zaanen A. C., *Linear analysis. Measure and integral, Banach and Hilbert space, linear integral equations*, Noordhoff N. V., Groningen, 1953.

[79] Ziemer W. P., *Extremal length and conformal capacity*, Trans. Amer. Math. Soc. **126** (1967), no. 3, 460–473.

Институт прикладной математики
и механики НАН Украины
83114, Донецк
ул. Розы Люксембург, 74
Украина
E-mail: denis_kovtonyuk@bk.ru

E-mail: vl_ryazanov1@mail.ru

Поступило 8 декабря 2014 г.