В. В. Беняш-Кривец, И. О. Говорушко, Многообразия представлений и характеров групп Баумслага–Солитера, *Труды МИАН*, 2016, том 292, 26–42

DOI: 10.1134/S0371968516010039

ТРУДЫ МАТЕМАТИЧЕСКОГО ИНСТИТУТА ИМ. В.А. СТЕКЛОВА, 2016, т. 292, с. 26–42

УДК 512.543.7

Многообразия представлений и характеров групп Баумслага–Солитера

В. В. Беняш-Кривец[1,2], **И. О. Говорушко**[1,3]

Поступило 2 февраля 2015 г.

Посвящается академику В.П. Платонову
в связи с его 75-летием

Исследуются многообразия представлений и характеров групп Баумслага–Солитера $\mathrm{BS}(p,q)$. Найдены неприводимые компоненты этих многообразий, вычислена их размерность. Доказано, что все неприводимые компоненты многообразия представлений $R_n(\mathrm{BS}(p,q))$ являются рациональными многообразиями размерности n^2, а каждая неприводимая компонента многообразия характеров $X_n(\mathrm{BS}(p,q))$ является рациональным многообразием размерности $k\le n$. Установлена гладкость неприводимых компонент многообразия неприводимых представлений $R_n^{\mathrm{s}}(\mathrm{BS}(p,q))$, а также доказано, что все неприводимые компоненты многообразия $X_n^{\mathrm{s}}(\mathrm{BS}(p,q))$ изоморфны $\mathbb{A}^1\setminus\{0\}$.

DOI: 10.1134/S0371968516010039

1. ВВЕДЕНИЕ

Пусть $G=\langle g_1,\dots,g_m\rangle$ — конечно порожденная группа и $H\subset \mathrm{GL}_n(K)$ — связная редуктивная линейная алгебраическая группа, определенная над полем K, которое всюду ниже предполагается алгебраически замкнутым и имеющим нулевую характеристику. Очевидно, что для любого гомоморфизма $\rho\colon G\to H$ набор элементов

$$(\rho(g_1),\dots,\rho(g_m))\in H^m=H\times\dots\times H$$

удовлетворяет всем определяющим соотношениям группы G, и поэтому соответствие $\rho\mapsto$ $\mapsto(\rho(g_1),\dots,\rho(g_m))$ задает биекцию между множеством $\mathrm{Hom}(G,H)$ и K-точками некоторого аффинного K-многообразия $R(G,H)\subset H^m$.

Многообразие $R(G,H)$ обычно называют *многообразием представлений группы G в алгебраическую группу H*. В случае $H=\mathrm{GL}_n(K)$ мы будем обозначать $R(G,\mathrm{GL}_n(K))$ через $R_n(G)$ и называть его *многообразием n-мерных представлений группы G*.

Группа H действует естественным образом (одновременным сопряжением компонент) на $R(G,H)$, и ее орбиты находятся во взаимно однозначном соответствии с классами эквивалентных представлений G. В общем случае орбиты относительно этого действия не обязательно замкнуты и, следовательно, многообразие орбит (геометрический фактор) не является алгебраическим многообразием. Однако, поскольку H — редуктивная группа, можно рассмотреть категорный фактор $R(G,H)/\!/G$ (см. [1]), который мы будем обозначать через $X(G,H)$ и называть *многообразием характеров представлений G в H* (или просто *многообразием характеров*). Его точки параметризуют замкнутые H-орбиты; в случае $H=\mathrm{GL}_n(K)$ замкнутость орбиты эквивалентна тому, что соответствующее представление вполне приводимо, и поэтому

[1]Белорусский государственный университет, Минск, Беларусь.
[2]E-mail: benyash@bsu.by
[3]E-mail: govorushko88@gmail.com

точки многообразия $X_n(G) = X(G, \mathrm{GL}_n(K))$ находятся в биективном соответствии с классами эквивалентных вполне приводимых n-мерных представлений группы G.

Введем также в рассмотрение следующие множества:

$$R_n^{\mathrm{s}}(G) = \{\rho \in R_n(G) \mid \rho \text{ неприводимо}\}, \qquad X_n^{\mathrm{s}}(G) = \pi(R_n^{\mathrm{s}}(G)) \subset X_n(G),$$

где $\pi\colon R_n(G) \to X_n(G)$ — морфизм факторизации. Множества $R_n^{\mathrm{s}}(G)$, $X_n^{\mathrm{s}}(G)$ являются открытыми в топологии Зарисского подмножествами $R_n(G)$, $X_n(G)$ соответственно (см. [2]).

О многообразиях $R(G,H)$, $X(G,H)$ в общем случае известно очень мало. Детально изучен лишь класс конечных групп, и частично изучены классы нильпотентных и разрешимых групп. Для бесконечных нильпотентных групп G большая часть известных результатов собрана в книге [2], для разрешимых групп — в статье [3]. В работах [4, 5] получено описание многообразий представлений и соответствующих многообразий характеров фундаментальных групп компактных поверхностей.

Баумслагом и Солитером в [6] впервые предложены примеры нехопфовых конечно представленных групп. Напомним, что группа G называется *хопфовой*, если всякий эпиморфизм $f\colon G \to G$ является автоморфизмом. Соответственно группа G *нехопфова*, если она изоморфна своей собственной фактор-группе. Группы Баумслага–Солитера $\mathrm{BS}(p,q)$ имеют копредставление

$$\mathrm{BS}(p,q) = \langle a, t \mid ta^p t^{-1} = a^q \rangle,$$

где p и q не равны нулю. В работах [6, 7] доказано, что группа $\mathrm{BS}(p,q)$ хопфова в следующих случаях: либо $p \mid q$, либо $q \mid p$, либо p и q имеют равные множества простых делителей. В остальных случаях группа $\mathrm{BS}(p,q)$ не является хопфовой. Легко видеть, что $\mathrm{BS}(p,q) \cong \cong \mathrm{BS}(-p,-q)$ и $\mathrm{BS}(p,q) \cong \mathrm{BS}(q,p)$.

В дальнейшем мы будем рассматривать группы $\mathrm{BS}(p,q)$ такие, что $p > |q| > 1$ и p, q — взаимно простые числа.

В [8] описаны все неприводимые представления группы $\mathrm{BS}(p,q)$ над полем комплексных чисел $\mathbb{C}$. Ф.А. Дудкин [9] нашел все неприводимые представления произвольной подгруппы конечного индекса группы $\mathrm{BS}(p,q)$ над полем $\mathbb{C}$. Некоторые начальные результаты о многообразиях представлений групп Баумслага–Солитера получены в [10].

Цель настоящей работы — дать описание многообразий представлений $R_n(\mathrm{BS}(p,q))$ и соответствующих многообразий характеров $X_n(\mathrm{BS}(p,q))$.

2. МНОГООБРАЗИЯ ПРЕДСТАВЛЕНИЙ ГРУПП $\mathrm{BS}(p,q)$

Обозначим через $\Omega(p,q)$ следующее множество матриц:

$$\Omega(p,q) = \{A \in \mathrm{GL}_n(K) \mid A^p \text{ и } A^q \text{ сопряжены}\}.$$

Пусть $A \in \Omega(p,q)$ — фиксированная матрица, и пусть $B_0 \in \mathrm{GL}_n(K)$ — такая матрица, что $B_0 A^p B_0^{-1} = A^q$. Обозначим через $Z(A)$ централизатор матрицы A в $\mathrm{GL}_n(K)$ и рассмотрим морфизм

$$f_A\colon Z(A) \times \mathrm{GL}_n(K) \to \mathrm{GL}_n(K) \times \mathrm{GL}_n(K), \qquad (C, X) \mapsto (XAX^{-1}, XB_0CX^{-1}).$$

Замыкание в топологии Зарисского образа $\operatorname{Im} f_A$ обозначим через $W(A)$. Справедлива следующая

Теорема 2.1. 1. *Каждое многообразие $W(A)$ является неприводимой компонентой многообразия $R_n(\mathrm{BS}(p,q))$ размерности n^2, и этими компонентами исчерпываются все неприводимые компоненты $R_n(\mathrm{BS}(p,q))$.*

2. *Число неприводимых компонент многообразия $R_n(\mathrm{BS}(p,q))$ равно числу классов сопряженности матриц в множестве $\Omega(p,q)$.*

Для доказательства теоремы 2.1 нам нужны следующие леммы.

Лемма 2.2. *Пусть $A \in \Omega(p,q)$ и $\alpha_1,\dots,\alpha_n$ — собственные значения матрицы A. Тогда каждое α_i является корнем из единицы степени $p^s - q^s$ для некоторого $s \le n$. Если $\alpha_i \ne \alpha_j$, то $\alpha_i^p \ne \alpha_j^p$ и $\alpha_i^q \ne \alpha_j^q$.*

Доказательство. Рассмотрим, например, α_1. Так как матрицы A^p и A^q подобны, набор $(\alpha_1^p,\dots,\alpha_n^p)$ является перестановкой набора $(\alpha_1^q,\dots,\alpha_n^q)$. Тогда мы должны иметь цепочку равенств

$$\alpha_1^p = \alpha_{i_1}^q, \qquad \alpha_{i_1}^p = \alpha_{i_2}^q, \qquad \dots, \qquad \alpha_{i_{s-1}}^p = \alpha_1^q$$

для некоторого s, $1 \le s \le n$. Из этих равенств последовательно получаем

$$\alpha_1^{p^2} = \alpha_{i_1}^{pq} = \alpha_{i_2}^{q^2}, \quad \alpha_1^{p^3} = \alpha_{i_2}^{pq^2} = \alpha_{i_3}^{q^3}, \quad \dots, \quad \alpha_1^{p^{s-1}} = \alpha_{i_{s-2}}^{pq^{s-2}} = \alpha_{i_{s-1}}^{q^{s-1}}, \quad \alpha_1^{p^s} = \alpha_{i_{s-1}}^{pq^{s-1}} = \alpha_1^{q^s},$$

откуда $\alpha_1^{p^s-q^s} = 1$.

Предположим теперь, что $\alpha_i \ne \alpha_j$. Выше мы показали, что найдутся s_1 и s_2 такие, что

$$\alpha_i^{p^{s_1}-q^{s_1}} = \alpha_j^{p^{s_2}-q^{s_2}} = 1.$$

Следовательно, оба числа α_i и α_j являются корнями из единицы степени $(p^{s_1}-q^{s_1})(p^{s_2}-q^{s_2})$. Поэтому дробь α_i/α_j также является корнем из единицы степени $(p^{s_1}-q^{s_1})(p^{s_2}-q^{s_2})$. Предположим, что $\alpha_i^p = \alpha_j^p$. Тогда $(\alpha_i/\alpha_j)^p = 1$, т.е. α_i/α_j является корнем степени p из единицы. Так как произведение $(p^{s_1}-q^{s_1})(p^{s_2}-q^{s_2})$ взаимно просто с p, то $\alpha_i/\alpha_j = 1$, т.е. $\alpha_i = \alpha_j$ — противоречие. Аналогично доказывается, что $\alpha_i^q \ne \alpha_j^q$. $\square$

Лемма 2.3. *Пусть $A \in \Omega(p,q)$. Тогда $Z(A) = Z(A^p) = Z(A^q)$.*

Доказательство. Включение $Z(A) \subset Z(A^p)$ очевидно. По лемме 2.2 имеем $\alpha_i^p \ne \alpha_j^p$ при $\alpha_i \ne \alpha_j$, поэтому если жорданова нормальная форма матрицы A содержит ровно r клеток Жордана порядка k с собственным значением α_i, то жорданова нормальная форма матрицы A^p содержит ровно r клеток Жордана порядка k с собственным значением α_i^p. Тогда из [11, гл. VIII, § 2, теорема 2] следует, что $\dim Z(A) = \dim Z(A^p)$. Значит, $Z(A) = Z(A^p)$. Аналогично доказывается, что $Z(A) = Z(A^q)$. $\square$

Лемма 2.4. *Если $\rho = (A_1, B_1) \in R_n(\mathrm{BS}(p,q))$ и матрица A подобна A_1, то $\rho \in \operatorname{Im} f_A$.*

Доказательство. Пусть $XA_1X^{-1} = A$, $XB_1X^{-1} = B_2$. Сопрягая равенство $B_1A_1^pb_1^{-1} = A_1^q$ при помощи X, получаем

$$B_2A^pB_2^{-1} = A^q = B_0A^pB_0^{-1},$$

где B_0 — матрица из определения f_A. Тогда $B_0^{-1}B_2 = C \in Z(A^p) = Z(A)$ по лемме 2.3, т.е. $B_2 = B_0C$. Значит, $\rho = f_A(C, X^{-1})$. $\square$

Доказательство теоремы 2.1. Покажем вначале, что образ $\operatorname{Im} f_A$ морфизма f_A содержится в $R_n(\mathrm{BS}(p,q))$. Действительно,

$$(B_0C)A^p(B_0C)^{-1} = B_0(CA^pC^{-1})B_0^{-1} = B_0A^pB_0^{-1} = A^q,$$

поскольку $C \in Z(A) = Z(A^p)$ в силу леммы 2.3. Значит, $(A, B_0C) \in R_n(\mathrm{BS}(p,q))$. Поэтому сопряженная пара (XAX^{-1}, XCB_0X^{-1}) также принадлежит $R_n(\mathrm{BS}(p,q))$. Найдем слои морфизма f_A. Пусть $(A_1, B_1) = f_A(C_1, X_1) \in \operatorname{Im} f_A$. Тогда

$$X_1AX_1^{-1} = A_1, \qquad X_1B_0C_1X_1^{-1} = B_1.$$

Тогда слой $f_A^{-1}(A_1, B_1)$ состоит из пар матриц $(C, X) \in Z(A) \times \mathrm{GL}_n(K)$ таких, что

$$XAX^{-1} = A_1 = X_1 A X_1^{-1}, \qquad XB_0CX^{-1} = B_1 = X_1 B_0 C_1 X_1^{-1}. \tag{2.1}$$

Из первого равенства в (2.1) получаем $X_1^{-1}X = D \in Z(A)$, т.е. $X = X_1 D$. Теперь из второго равенства в (2.1) имеем $C = B_0^{-1} D^{-1} B_0 C_1 D$. Заметим, что если D — произвольная матрица из $Z(A)$, то пара матриц (C, X), где $X = X_1 D$, $C = B_0^{-1} D^{-1} B_0 C_1 D$, лежит в слое $f_A^{-1}(A_1, B_1)$. Действительно, равенство $XAX^{-1} = A_1$ очевидно из построения. Проверим, что справедливо равенство

$$(B_0 C) A^p (B_0 C)^{-1} = A^q.$$

Подставляя вместо C его значение и учитывая, что $D, C_1 \in Z(A) = Z(A^p) = Z(A^q)$ в силу леммы 2.3 и $B_0 A^p B_0^{-1} = A^q$, получим

$$\begin{aligned}(B_0 C) A^p (B_0 C)^{-1} &= (D^{-1} B_0 C_1 D) A^p (D^{-1} B_0 C_1 D)^{-1} = D^{-1} B_0 (C_1 A^p C_1^{-1}) B_0^{-1} D = \\ &= D^{-1} (B_0 A^p B_0^{-1}) D = D^{-1} A^q D = A^q.\end{aligned} \tag{2.2}$$

Таким образом, имеем биективный морфизм

$$h\colon\ Z(A) \to f_A^{-1}(A_1, B_1), \qquad D \mapsto (B_0^{-1} D^{-1} B_0 C_1 D, X_1 D).$$

Значит,

$$\dim f_A^{-1}(A_1, B_1) = \dim Z(A), \tag{2.3}$$

т.е. все слои морфизма f_A имеют одинаковую размерность, равную $\dim Z(A)$. По теореме о размерности слоев морфизма [12, гл. I, § 6, п. 3, теорема 7], учитывая (2.3), получаем

$$\dim W(A) = \dim(Z(A) \times \mathrm{GL}_n(K)) - \dim Z(A) = \dim Z(A) + n^2 - \dim Z(A) = n^2.$$

Таким образом, $\dim W(A) = n^2$ для всех матриц $A \in \Omega(p, q)$.

Докажем, что многообразия $W(A)$ являются неприводимыми компонентами многообразия представлений $R_n(\mathrm{BS}(p, q))$. Очевидно, что многообразия $W(A)$ неприводимы. Из леммы 2.4 следует, что если матрицы A и A_1 из $\Omega(p, q)$ подобны, то соответствующие многообразия $W(A)$ и $W(A_1)$ совпадают. Покажем, что многообразия $W(A)$ и $W(A_1)$, соответствующие неподобным матрицам A и A_1 из $\Omega(p, q)$, не могут содержаться друг в друге. Допустим, $W(A) \subset W(A_1)$. В силу совпадения размерностей мы должны иметь $W(A) = W(A_1)$. Тогда существуют открытые по Зарисскому подмножества $U_1 \subset W(A)$ и $U_2 \subset W(A_1)$ такие, что $U_1 \subset \operatorname{Im} f_A$ и $U_2 \subset \operatorname{Im} f_{A_1}$. Тогда $U_1 \cap U_2 \neq \varnothing$. Пусть $(C, D) \in U_1 \cap U_2$. Тогда найдутся элементы (C_1, X_1) и (C_2, X_2) такие, что $f_A(C_1, X_1) = f_{A_1}(C_2, X_2) = (C, D)$. Это означает, что $X_1 A X_1^{-1} = X_2 A_1 X_2^{-1}$ — противоречие с тем, что матрицы A и A_1 не подобны.

В заключение доказательства утверждения 1 достаточно заметить, что $R_n(\mathrm{BS}(p, q)) = \bigcup_{A \in \Omega(p,q)} W(A)$. Таким образом, каждое многообразие $W(A)$ является неприводимой компонентой размерности n^2 многообразия представлений $R_n(\mathrm{BS}(p, q))$. При этом если матрицы A и A_1 из $\Omega(p, q)$ не подобны, то $W(A)$ и $W(A_1)$ — различные компоненты, откуда следует утверждение 2 теоремы. $\square$

Ниже нам понадобится описание неприводимых представлений группы $\mathrm{BS}(p, q)$, полученное в [8].

Теорема 2.5 [8]. *Пусть d — такое натуральное число, что $d \mid (p^n - q^n)$, но $d \nmid (p^i - q^i)$ для всех $i < n$, α — примитивный корень из единицы степени d, s — произвольное решение* *сравнения* $sq \equiv p \pmod d$, $c \in K^*$. *Тогда пара матриц*

$$A = \operatorname{diag}\bigl(\alpha, \alpha^s, \alpha^{s^2}, \dots, \alpha^{s^{n-1}}\bigr), \qquad B = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & 0 & 1 & \dots & 0 \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ 0 & 0 & 0 & \dots & 1 \\ c & 0 & 0 & \dots & 0 \end{pmatrix} \tag{2.4}$$

определяет неприводимое представление $\rho_{(n,\alpha,c)} = (A, B) \in R_n(\mathrm{BS}(p,q))$. *При этом каждое неприводимое представление с точностью до эквивалентности получается таким образом.*

Легко видеть, что в условиях теоремы все собственные значения матрицы A попарно различны, т.е. A является регулярной полупростой. В дальнейшем нам понадобится следующая

Лемма 2.6. *Представления* $\rho_{(n,\alpha,c)}$ *и* $\rho_{(n,\beta,c_1)}$ *эквивалентны тогда и только тогда, когда* $c = c_1$ *и* $\beta = \alpha^{s^i}$, $0 \le i \le n-1$.

Доказательство. Пусть $\rho_{(n,\alpha,c)} = (A_1, B_1)$ и $\rho_{(n,\beta,c_1)} = (A_2, B_2)$ эквивалентны. Тогда $\det B_1 = \det B_2$, откуда $c = c_1$. Далее, из сопряженности матриц A_1 и A_2 следует, что $\beta = \alpha^{s^i}$, $0 \le i \le n-1$. Наоборот, если $c = c_1$ и $\beta = \alpha^{s^i}$, то $B_1 = B_2$ и $B_1^i A_1 B_1^{-i} = A_2$. Значит, $\rho_{(n,\alpha,c)}$ и $\rho_{(n,\beta,c_1)}$ эквивалентны. $\square$

Для фиксированной матрицы $A \in \Omega(p,q)$ обозначим через $S(A)$ множество таких матриц $C \in \Omega(p,q)$, что спектр C совпадает со спектром A.

Теорема 2.7. *Пусть* $K = \mathbb{C}$ *и* $A \in \Omega(p,q)$. *Тогда множество* $T(A) = \bigcup_{C \in S(A)} W(C)$ *является компонентой связности многообразия* $R_n(\mathrm{BS}(p,q))$ *в комплексной топологии.*

Для доказательства теоремы нам нужны следующие две леммы.

Лемма 2.8. *Пусть* G *— конечно порожденная группа,* V *— произвольная неприводимая компонента* $R_n(G)$ *и* $\rho \in V$. *Тогда любое представление* ρ', *эквивалентное* ρ, *также принадлежит* V.

Доказательство леммы вытекает из того факта, что замыкание образа морфизма

$$\varphi\colon\ V \times \mathrm{GL}_n(\mathbb{C}) \to R_n(G), \qquad (\rho, X) \mapsto X\rho X^{-1}$$

неприводимо, содержит V и, следовательно, с ним совпадает.

Лемма 2.9. *Если* $(F, H) \in W(C)$, *то спектры матриц* F *и* C *совпадают.*

Доказательство. Пусть $\sigma_i(X)$ обозначает i-й коэффициент характеристического полинома матрицы X, и пусть $\lambda_i = \sigma_i(C)$, $i = 1, \dots, n$. Тогда для любой точки $(A_1, B_1) \in \operatorname{Im} f_C$ имеем $\sigma_i(A_1) - \lambda_i = 0$, $i = 1, \dots, n$, поскольку матрицы C и A_1 подобны. Это означает, что регулярная на $W(C)$ функция $\sigma_i(X) - \lambda_i$ обращается в нуль на $\operatorname{Im} f_C$. Следовательно, $\sigma_i(X) - \lambda_i$ обращается в нуль на $W(C)$. Поэтому $\sigma_i(F) - \lambda_i = 0$, $i = 1, \dots, n$. Таким образом, характеристические полиномы у C и F совпадают, т.е. C и F имеют одинаковые спектры. $\square$

Доказательство теоремы 2.7. Пусть A' — диагональная матрица, диагональными элементами которой являются собственные значения матрицы A. Пусть $C \in S(A)$, $\rho = (C, D) \in W(C)$, $\mathcal{O}(\rho)$ — орбита представления ρ и $H = \overline{\mathcal{O}(\rho)}$. В силу леммы 2.8 имеем $\mathcal{O}(\rho) \subset W(C)$, следовательно, $H \subset W(C)$. Далее, H содержит вполне приводимое представление $\rho' = (C', D')$ (см. [2, 13]). Переходя при необходимости к эквивалентному представлению, мы без ограничения общности можем считать, что $C' = \operatorname{diag}(C_1, \dots, C_s)$, $D' = \operatorname{diag}(D_1, \dots, D_s)$, где $\rho_i = (C_i, D_i)$ — неприводимое представление. Из (2.4) получаем, что матрица C' диагонализируема. В силу леммы 2.9 спектры матриц C' и C совпадают, т.е. $C' \in S(A)$. Значит, C' подобна A', и поэтому $\rho' \in W(A')$ по лемме 2.4.

Итак, мы показали, что для произвольной матрицы $C \in S(A)$ неприводимые компоненты $W(C)$ и $W(A')$ имеют непустое пересечение. Из этого вытекает связность множества $T(A) = \bigcup_{C \in S(A)} W(C)$.

Если спектр матрицы $F \in \Omega(p,q)$ отличен от спектра A, то в силу леммы 2.9 имеем $W(F) \cap T(A) = \varnothing$. Это и означает, что множество $T(A)$ является компонентой связности многообразия $R_n(\mathrm{BS}(p,q))$ в комплексной топологии. □

Следствие 2.10. *Число компонент связности многообразия $R_n(\mathrm{BS}(p,q))$ в комплексной топологии равно числу классов сопряженности диагональных матриц в $\Omega(p,q)$.*

Следствие 2.11. *Если $A_1, A_2 \in \Omega(p,q)$ — две полупростые неподобные матрицы, то $W(A_1) \cap W(A_2) = \varnothing$.*

Доказательство. Если $(C,D) \in W(A_1) \cap W(A_2)$, то по лемме 2.9 спектры матриц C, A_1 и A_2 совпадают. Так как A_1 и A_2 полупросты, они подобны — противоречие. □

Теорема 2.12. *Каждая неприводимая компонента $W(A)$ многообразия $R_n(\mathrm{BS}(p,q))$ является рациональным многообразием.*

Доказательство. Введем необходимые обозначения. Матрицу X размера $m \times n$ будем называть *правильной верхней треугольной*, если она имеет вид

$$\begin{pmatrix} 0 & \dots & 0 & a_1 & a_2 & \dots & a_m \\ \vdots & \dots\dots & & \ddots & \ddots & \ddots & \vdots \\ 0 & \dots\dots\dots\dots & & & 0 & a_1 & a_2 \\ 0 & \dots\dots\dots\dots\dots & & & & 0 & a_1 \end{pmatrix} \quad \text{при} \quad m \le n, \qquad \begin{pmatrix} a_1 & a_2 & \dots\dots & a_n \\ 0 & a_1 & a_2 \ \dots & a_{n-1} \\ \dots\dots & \dots\dots & \dots\dots & \dots\dots \\ 0 & \dots\dots & & a_1 \\ 0 & \dots\dots & & 0 \\ \dots\dots & \dots\dots & \dots\dots & \dots\dots \\ 0 & \dots\dots & & 0 \end{pmatrix} \quad \text{при} \quad m \ge n.$$

Без ограничения общности можно считать, что A имеет жорданову нормальную форму $A = \mathrm{diag}(A_1, \dots, A_s)$, где $A_i = \mathrm{diag}(J_{m_{i,1}}(\alpha_i), \dots, J_{m_{i,s_i}}(\alpha_i))$ есть $(n_i \times n_i)$-матрица, являющаяся прямой суммой всех клеток Жордана $J_{m_{i,j}}(\alpha_i)$ из A с собственным значением α_i. Тогда централизатор $Z(A)$ состоит из невырожденных матриц вида $C = \mathrm{diag}(C_1, \dots, C_s)$, где

$$C_i = \begin{pmatrix} X_{11} & \dots & X_{1,s_i} \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ X_{s_i,1} & \dots & X_{s_i,s_i} \end{pmatrix} \tag{2.5}$$

и X_{rt} — произвольная правильная верхняя треугольная $(m_{i,r} \times m_{i,t})$-матрица (см. [11, гл. VIII]).

Рассмотрим множество $T(A)$ матриц вида $Y = (Y_{ij}) \in \mathrm{GL}_n(\mathbb{C})$, где Y_{ij} при $i \ne j$ — произвольная $(n_i \times n_j)$-матрица, а Y_{ii} имеет следующий вид:

$$Y_{ii} = \begin{pmatrix} Z^{(i)}_{11} & \dots & Z^{(i)}_{1,s_i} \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ Z^{(i)}_{s_i,1} & \dots & Z^{(i)}_{s_i,s_i} \end{pmatrix}$$

— блочная матрица, блоки которой описываются следующим образом. Матрица $Z^{(i)}_{rr}$ размера $m_{i,r} \times m_{i,r}$ имеет вид

$$Z^{(i)}_{rr} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & \dots & 0 \\ u_{21} & u_{22} & \dots & u_{2,m_{i,r}} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ u_{m_{i,r},1} & u_{m_{i,r},2} & \dots & u_{m_{i,r},m_{i,r}} \end{pmatrix}.$$

Если же $r \neq k$, то $Z_{rk}^{(i)}$ — матрица размера $m_{i,r} \times m_{i,k}$ следующего вида: если $m_{i,r} \le m_{i,k}$, то

$$Z_{rk}^{(i)} = \begin{pmatrix} w_{11} & \dots & w_{1,m_{i,k}-m_{i,r}} & 0 & \dots & 0 \\ w_{21} & \dots & \dots & \dots & \dots & w_{2,m_{i,k}} \\ \vdots & \dots & \dots & \dots & \dots & \vdots \\ w_{m_{i,r},1} & \dots & \dots & \dots & \dots & w_{m_{i,r},m_{i,k}} \end{pmatrix};$$

если же $m_{i,r} \ge m_{i,k}$, то

$$Z_{rk}^{(i)} = \begin{pmatrix} 0 & \dots & 0 \\ w_{21} & \dots & w_{2,m_{i,k}} \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ w_{m_{i,r},1} & \dots & w_{m_{i,r},m_{i,k}} \end{pmatrix}.$$

Например, если $A = \operatorname{diag}(J_3(\alpha), J_2(\alpha), J_1(\alpha))$, то $T(A)$ состоит из матриц вида

$$X = \left(\begin{array}{ccc|cc|c} 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ x_{21} & x_{22} & x_{23} & x_{24} & x_{25} & x_{26} \\ x_{31} & x_{32} & x_{33} & x_{34} & x_{35} & x_{36} \\ \hline x_{41} & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ x_{51} & x_{52} & x_{53} & x_{54} & x_{55} & x_{56} \\ \hline x_{61} & x_{62} & 0 & x_{64} & 0 & 1 \end{array}\right).$$

Нетрудно видеть, что $\dim T(A) = n^2 - \dim Z(A)$. Пусть $\overline{\mathcal{O}(A)}$ обозначает замыкание по Зарисскому класса сопряженности $\mathcal{O}(A)$ матрицы A. Рассмотрим морфизм $\psi\colon T(A) \to \overline{\mathcal{O}(A)}$, $X \mapsto XAX^{-1}$. Справедлива следующая

Лемма 2.13. *Морфизм ψ является инъективным и доминантным. Следовательно, замыкание $\overline{\mathcal{O}(A)}$ является рациональным многообразием.*

Доказательство. Предположим, что для $X, Y \in T(A)$ мы имеем $XAX^{-1} = YAY^{-1}$. Тогда $X^{-1}Y = C \in Z(A)$, т.е. $Y = XC$. Учитывая, что $C = \operatorname{diag}(C_1, \dots, C_s)$, где C_i имеет вид (2.5), и учитывая вид матриц X, Y из $T(A)$, мы немедленно получаем, что $C = E$ — единичная матрица, откуда $X = Y$. Поскольку $\dim \overline{\mathcal{O}(A)} = n^2 - \dim Z(A) = \dim T(A)$, из инъективности ψ вытекает его доминантность. Следовательно, ψ — бирациональный изоморфизм (см. [14, предложение 3.17]) и $\overline{\mathcal{O}(A)}$ бирационально изоморфно многообразию $T(A)$, которое, очевидно, рационально. $\square$

Завершим доказательство теоремы 2.12. Обозначим через h_A ограничение морфизма f_A на $Z(A) \times T(A)$. Несложное вычисление показывает, что h_A — инъективный морфизм. Действительно, если $h_A(C_1, X_1) = h_A(C_2, X_2)$, то

$$X_1(A, B_0C_1)X_1^{-1} = X_2(A, B_0C_2)X_2^{-1}.$$

Значит, $X_1AX_1^{-1} = X_2AX_2^{-1}$, откуда

$$X_2 = X_1C_3, \tag{2.6}$$

где $C_3 \in Z(A)$. Учитывая вид (2.5) матриц из централизатора $Z(A)$ и вид матриц из $T(A)$, мы получаем из (2.6), что $X_1 = X_2$. Тогда равенство $B_0C_1 = B_0C_2$ влечет за собой равенство $C_1 = C_2$.

Так как $\dim Z(A) \times T(A) = n^2 = \dim W(A)$, морфизм h_A доминантен. Следовательно, h_A — бирациональный изоморфизм и $W(A)$ бирационально изоморфно рациональному многообразию $Z(A) \times T(A)$. Теорема доказана. $\square$

Напомним, что матрица $A \in \mathrm{GL}_n(K)$ называется *регулярной*, если в ее жордановой нормальной форме каждому собственному значению соответствует единственный блок Жордана.

Теорема 2.14. *Пусть $A \in \Omega(p, q)$ — регулярная полупростая матрица. Тогда справедливы следующие утверждения.*

1. *Для любой неприводимой компоненты $W(B)$, отличной от $W(A)$, имеет место соотношение $W(A) \cap W(B) = \varnothing$, т.е. в случае $K = \mathbb{C}$ многообразие $W(A)$ является компонентой связности многообразия $R_n(\mathrm{BS}(p, q))$ в комплексной топологии.*

2. $W(A) = \mathrm{Im}\, f_A$.

3. *$W(A)$ является гладким рациональным многообразием.*

Доказательство. 1. Если $W(A) \cap W(B) \neq \varnothing$, то в силу леммы 2.9 матрицы A и B имеют одинаковый спектр. Так как A — регулярная полупростая матрица, то B сопряжена с A и $W(A) = W(B)$.

2. Если $(A_1, B_1) \in W(A)$, то, как и выше, получаем, что A_1 подобна A. Следовательно, $(A_1, B_1) \in \mathrm{Im}\, f_A$ по лемме 2.4.

3. Рациональность $W(A)$ следует из теоремы 2.12. Докажем, что $W(A)$ является гладким многообразием. Пусть $\rho \in W(A)$ и $T_\rho(W(A)) = T_\rho(R_n(\mathrm{BS}(p, q)))$ — касательное пространство к $W(A)$ в точке ρ. Докажем, что $\dim T_\rho(W(A)) = n^2$. Без ограничения общности можно считать, что $A = \mathrm{diag}(\alpha_1, \dots, \alpha_n)$ — диагональная матрица. Переходя при необходимости к эквивалентному представлению, мы можем считать, что $\rho = (A, B)$. Из леммы 2.2 следует, что A^p и A^q — регулярные диагональные матрицы. Так как $BA^pB^{-1} = A^q$, то B — некоторая мономиальная матрица, которая осуществляет перестановку диагональных элементов матрицы A^p. Обозначим соответствующую перестановку через π, и пусть $\pi = \pi_1 \dots \pi_r$ — разложение π в произведение независимых циклов. Без ограничения общности будем считать, что $\pi_1 = (1, \dots, s_1)$, $\pi_2 = (s_1 + 1, \dots, s_2)$, $\dots$, $\pi_r = (s_{r-1} + 1, \dots, n)$.

Для оценки сверху размерности $\dim T_\rho(R_n(\mathrm{BS}(p, q)))$ используем стандартные вычисления с двойными числами. Для определенности предположим, что $p > 0$, $q > 0$ (случай $p > 0$, $q < 0$ разбирается аналогично). Тогда имеем равенство

$$(B + \epsilon X)(A + \epsilon Y)^p(B^{-1} - \epsilon B^{-1}XB^{-1}) = (A + \epsilon Y)^q,$$

где $\epsilon^2 = 0$ и $X = (x_{ij})$, $Y = (y_{ij})$ — неизвестные матрицы. Вычисляя коэффициент при ϵ, получаем следующее матричное уравнение:

$$XA^pB^{-1} - BA^pB^{-1}XB^{-1} + B(A^{p-1}Y + A^{p-2}YA + \dots + YA^{p-1})B^{-1} - \\ - (A^{q-1}Y + A^{q-2}YA + \dots + YA^{q-1}) = 0. \quad (2.7)$$

Пусть V — пространство решений уравнения (2.7). Тогда $T_\rho(R_n(\mathrm{BS}(p, q))) \subset V$. Отметим, что $T_\rho(R_n(\mathrm{BS}(p, q)))$ может не совпадать с V. В [2] приведены примеры, когда касательное пространство к многообразию представлений группы нельзя установить исходя из определяющих соотношений группы.

Докажем, что $\dim V = n^2$. Положим

$$F = (f_{ij}) = XA^pB^{-1} - BA^pB^{-1}XB^{-1} = XB^{-1}A^q - A^qXB^{-1} = X_1A^q - A^qX_1,$$

где $X_1 = (z_{ij}) = XB^{-1}$, и пусть

$$G = (g_{ij}) = -B(A^{p-1}Y + A^{p-2}YA + \dots + YA^{p-1})B^{-1} + (A^{q-1}Y + A^{q-2}YA + \dots + YA^{q-1}).$$

Тогда равенство (2.7) эквивалентно системе уравнений

$$f_{ij} = g_{ij}, \qquad i,j = 1,\dots,n. \tag{2.8}$$

Так как A — диагональная матрица, то $f_{ii} = 0$, $i = 1,\dots,n$, и $f_{ij} = (\alpha_j^q - \alpha_i^q)z_{ij}$ при $i \neq j$. Условие $\alpha_i \neq \alpha_j$ влечет за собой неравенство $\alpha_j^q \neq \alpha_i^q$ в силу леммы 2.2. Это означает, что при $i \neq j$ мы имеем

$$z_{ij} = \frac{1}{\alpha_j^q - \alpha_i^q} g_{ij}. \tag{2.9}$$

Таким образом, все недиагональные элементы z_{ij} матрицы XB^{-1} выражаются по формулам (2.9) через элементы матриц A, B, Y. Остается рассмотреть уравнения $g_{ii} = 0$, $i = 1,\dots,n$. Сопряжение при помощи матрицы B дает перестановку π диагональных элементов матрицы $A^{p-1}Y + A^{p-2}YA + \ldots + YA^{p-1}$. Эти диагональные элементы равны $p\alpha_1^{p-1}y_{11},\dots,p\alpha_n^{p-1}y_{nn}$. Диагональные элементы матрицы $A^{q-1}Y + A^{q-2}YA + \ldots + YA^{q-1}$ суть $q\alpha_1^{q-1}y_{11},\dots,q\alpha_n^{q-1}y_{nn}$. Вспоминая разложение π в произведение независимых циклов и рассматривая цикл $\pi_1 = (1,2,\dots,s_1)$, получаем равенства

$$\begin{gathered} -p\alpha_1^{p-1}y_{11} + q\alpha_2^{q-1}y_{22} = 0, \\ -p\alpha_2^{p-1}y_{22} + q\alpha_3^{q-1}y_{33} = 0, \\ \dots\dots\dots\dots\dots\dots \\ -p\alpha_{s_1}^{p-1}y_{s_1s_1} + q\alpha_1^{q-1}y_{11} = 0. \end{gathered} \tag{2.10}$$

Учитывая, что $\alpha_i^p = \alpha_{i+1}^q$ при $i < s_1$ и $\alpha_{s_1}^p = \alpha_1^q$, из равенств (2.10) последовательно получаем

$$y_{22} = \frac{p\alpha_2}{q\alpha_1}y_{11}, \qquad y_{33} = \frac{p\alpha_3}{q\alpha_2}y_{22} = \frac{p^2\alpha_3}{q^2\alpha_1}y_{11}, \qquad \dots$$

$$\dots, \qquad y_{s_1s_1} = \frac{p^{s_1-1}\alpha_{s_1}}{q^{s_1-1}\alpha_1}y_{11}, \qquad y_{11} = \frac{p\alpha_1}{q\alpha_{s_1}}y_{s_1s_1} = \frac{p^{s_1}}{q^{s_1}}y_{11}.$$

Отсюда $y_{11} = y_{22} = \ldots = y_{s_1s_1} = 0$. Рассматривая остальные циклы подстановки π, получаем, что $y_{ii} = 0$, $i = 1,\dots,n$.

Таким образом, решением матричного уравнения (2.7) являются пары матриц (X,Y) такие, что все диагональные элементы Y равны нулю, а матрица X находится из равенства $X = X_1B$, при этом недиагональные элементы z_{ij} матрицы X_1 определяются из равенств (2.9), а диагональные элементы z_{ii} произвольны. Значит, размерность пространства решений V уравнения (2.7) равна $n^2 - n + n = n^2$.

Так как $T_\rho(R_n(\mathrm{BS}(p,q))) \subset V$, имеем $\dim T_\rho(R_n(\mathrm{BS}(p,q))) \le n^2$. Поскольку $\dim W(A) = n^2$, получаем, что $\dim T_\rho(R_n(\mathrm{BS}(p,q))) = n^2$ и ρ — неособая точка на $W(A)$. $\square$

Предложение 2.15. *Если $W(A)$ содержит неприводимое представление, то все представления $\rho \in W(A)$ неприводимы, т.е. $W(A) \subset R_n^{\mathrm{s}}(\mathrm{BS}(p,q))$.*

Доказательство. Пусть $\rho = (C,D) \in W(A)$ — неприводимое представление. По теореме 2.5 матрица C регулярная полупростая, и ее спектр по лемме 2.9 равен спектру A. Следовательно, матрицы A и C подобны. Поэтому без ограничения общности можем считать, что A — диагональная матрица вида (2.4). Тогда по теореме 2.14 имеем $W(A) = \operatorname{Im} f_A$. Поскольку централизатор $Z(A)$ состоит из диагональных матриц, любое представление $\rho_1 \in \operatorname{Im} f_A$

эквивалентно представлению вида $\rho_2 = (A, B)$, где

$$B = \begin{pmatrix} 0 & a_1 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & 0 & a_2 & \dots & 0 \\ \hdotsfor{5} \\ 0 & 0 & 0 & \dots & a_{n-1} \\ a_n & 0 & 0 & \dots & 0 \end{pmatrix}.$$

Сопрягая ρ_2 диагональной матрицей $\mathrm{diag}(1, a_1, \dots, a_1 \dots a_{n-1})$, получим неприводимое представление вида (2.4). $\square$

Из теоремы 2.14 и предложения 2.15 вытекает

Следствие 2.16. *Многообразие неприводимых представлений $R_n^{\mathrm{s}}(\mathrm{BS}(p,q))$ является открытым и замкнутым подмножеством в $R_n(\mathrm{BS}(p,q))$. Каждая неприводимая компонента многообразия $R_n^{\mathrm{s}}(\mathrm{BS}(p,q))$ является гладким рациональным многообразием.*

Теорема 2.17. *Если $A \in \Omega(p,q)$ — полупростая матрица, то множество вполне приводимых представлений плотно в $W(A)$. Пусть $\rho = \rho_{(n_1,\alpha_1,c_1)} + \dots + \rho_{(n_k,\alpha_k,c_k)} \in W(A)$ — вполне приводимое представление, где $\rho_{(n_i,\alpha_i,c_i)}$ определены в теореме 2.5. Тогда все вполне приводимые представления из $W(A)$ с точностью до эквивалентности имеют вид*

$$\rho_{(n_1,\alpha_1,b_1)} + \dots + \rho_{(n_k,\alpha_k,b_k)} \tag{2.11}$$

для произвольных $b_1, \dots, b_k \in K^*$. В частности, каждое вполне приводимое представление из $W(A)$ является суммой k неприводимых представлений, где $k = k(A)$ зависит только от матрицы A. Если A — регулярная полупростая матрица, то $W(A) = \mathrm{Im}\, f_A$ и все представления из $W(A)$ вполне приводимы и эквивалентны представлениям вида (2.11).

Доказательство. Покажем, что $W(A)$ содержит хотя бы одно вполне приводимое представление. Действительно, если $\varphi \in W(A)$ — произвольное представление, то замыкание $\overline{\varphi}$ орбиты φ содержится в $W(A)$. Выше мы уже отмечали, что $\overline{\varphi}$ содержит вполне приводимое представление ρ. Пусть $\rho = \rho_{(n_1,\alpha_1,c_1)} + \dots + \rho_{(n_k,\alpha_k,c_k)}$ и

$$U = \bigl\{(x_1, \dots, x_k) \in \mathbb{A}^k \mid x_1 \dots x_k \neq 0\bigr\}.$$

Рассмотрим морфизм

$$\Psi_\rho\colon \mathrm{GL}_n(K) \times U \to W(A), \qquad (X, b_1, \dots, b_k) \mapsto X(\rho_{(n_1,\alpha_1,b_1)} + \dots + \rho_{(n_k,\alpha_k,b_k)})X^{-1}. \tag{2.12}$$

Докажем, что Ψ_ρ — доминантный морфизм. Вычислим размерности слоев морфизма Ψ_ρ. Пусть $(X, d_1, \dots, d_k) \in \Psi_\rho^{-1}(\Psi_\rho(X_0, b_1, \dots, b_k))$, где мы предполагаем, что $b_1, \dots, b_k$ попарно различны. Тогда представления $\rho_{(n_1,\alpha_1,b_1)} + \dots + \rho_{(n_k,\alpha_k,b_k)}$ и $\rho_{(n_1,\alpha_1,d_1)} + \dots + \rho_{(n_k,\alpha_k,d_k)}$ эквивалентны. Следовательно, набор $(d_1, \dots, d_k)$ является перестановкой набора $(b_1, \dots, b_k)$ и имеется лишь конечное число возможностей для выбора $d_1, \dots, d_k$. Зафиксируем набор $(d_1, \dots, d_k)$. Тогда справедливо равенство

$$X_0^{-1} X \bigl(\rho_{(n_1,\alpha_1,d_1)} + \dots + \rho_{(n_k,\alpha_k,d_k)}\bigr) X^{-1} X_0 = \rho_{(n_1,\alpha_1,b_1)} + \dots + \rho_{(n_k,\alpha_k,b_k)}. \tag{2.13}$$

Пусть Z_0 — фиксированная матрица такая, что

$$Z_0 \bigl(\rho_{(n_1,\alpha_1,b_1)} + \dots + \rho_{(n_k,\alpha_k,b_k)}\bigr) Z_0^{-1} = \rho_{(n_1,\alpha_1,d_1)} + \dots + \rho_{(n_k,\alpha_k,d_k)}.$$

Тогда, сопрягая обе части (2.13) при помощи Z_0, получаем, что $Z_0 X_0^{-1} X$ централизует вполне приводимое представление $\rho_{(n_1,\alpha_1,d_1)} + \dots + \rho_{(n_k,\alpha_k,d_k)}$. В этом представлении слагаемые

$\rho_{(n_i,\alpha_i,d_i)}$ и $\rho_{(n_j,\alpha_j,d_j)}$ неэквивалентны при $i \neq j$ в силу того, что $d_1, \ldots, d_k$ попарно различны. Значит, $Z_0 X_0^{-1} X = \operatorname{diag}(x_1 E_{n_1}, \ldots, x_k E_{n_k})$ для произвольных $x_1, \ldots, x_k \in K^*$, откуда

$$X = X_0 Z_0^{-1} \operatorname{diag}(x_1 E_{n_1}, \ldots, x_k E_{n_k}).$$

Следовательно, $\dim \Psi_\rho^{-1}(\Psi_\rho(X_0, b_1, \ldots, b_k)) = k$ и по теореме о размерности слоев морфизма имеем

$$\dim \overline{\operatorname{Im}(\Psi_\rho)} = (n^2 + k) - k = n^2 = \dim W(A),$$

что и доказывает доминантность Ψ_ρ.

Докажем теперь, что все вполне приводимые представления из $W(A)$ лежат в $\operatorname{Im}(\Psi_\rho)$. Пусть $\delta = \rho_{(m_1,\beta_1,d_1)} + \ldots + \rho_{(m_h,\beta_h,d_h)} \in W(A)$. Определим морфизм Ψ_δ аналогично морфизму Ψ_ρ. Как и выше, доказывается, что Ψ_δ доминантен. Тогда $\operatorname{Im}(\Psi_\rho)$ содержит открытое подмножество $U_1 \subset W(A)$, а $\operatorname{Im}(\Psi_\delta)$ — открытое подмножество $U_2 \subset W(A)$. Пусть $\gamma \in U_1 \cap U_2$. Тогда γ эквивалентно, с одной стороны, представлению вида $\rho_{(n_1,\alpha_1,a_1)} + \ldots + \rho_{(n_k,\alpha_k,a_k)}$, а с другой — представлению вида $\rho_{(m_1,\beta_1,c_1)} + \ldots + \rho_{(m_h,\beta_h,c_h)}$. Отсюда немедленно вытекает, что $h = k$, и после подходящей перенумерации слагаемых получаем, что представления $\rho_{(n_i,\alpha_i,a_i)}$ и $\rho_{(m_i,\beta_i,c_i)}$ эквивалентны, $i = 1, \ldots, k$. Следовательно, $n_i = m_i$ и по лемме 2.6 имеем $a_i = c_i$ и $\beta_i = \alpha_i^{s^j}$ для некоторого j, где s определено в теореме 2.5. Но тогда по лемме 2.6 представление $\rho_{(m_i,\beta_i,d_i)}$ эквивалентно представлению $\rho_{(n_i,\alpha_i,d_i)}$. Следовательно, δ эквивалентно представлению $\rho_{(n_1,\alpha_1,d_1)} + \ldots + \rho_{(n_k,\alpha_k,d_k)} \in \operatorname{Im}(\Psi_\rho)$, откуда $\delta \in \operatorname{Im}(\Psi_\rho)$.

Пусть теперь $A = \operatorname{diag}(a_1, \ldots, a_n)$ — регулярная диагональная матрица. Тогда $W(A) = \operatorname{Im} f_A$ по теореме 2.14. Пусть $\rho = (A, B) \in W(A)$. Докажем, что ρ вполне приводимо. Замыкание $\overline{\mathcal{O}(\rho)}$ содержит вполне приводимое представление $\rho' = (A, B')$, и без ограничения общности можно считать, что ρ' имеет вид $\rho' = \rho_{(n_1,\alpha_1,d_1)} + \ldots + \rho_{(n_k,\alpha_k,d_k)}$, где $\rho_{(n_i,\alpha_i,d_i)} = (A_i, B_i)$ и A_i, B_i — матрицы вида (2.4). Отсюда получаем, что $A = \operatorname{diag}(A_1, \ldots, A_k)$, $B = \operatorname{diag}(B_1, \ldots, B_k)$. Поскольку

$$BA^pB^{-1} = A^q = B'A^pB'^{-1},$$

имеем $B = B'Y$, где $Y \in Z(A^p) = Z(A)$. Так как A — регулярная полупростая матрица, то $Y = \operatorname{diag}(Y_1, \ldots, Y_k)$ — диагональная матрица. Значит, $B = \operatorname{diag}(B_1 Y_1, \ldots, B_k Y_k)$. Рассмотрим представления $\delta_i = (A_i, B_i Y_i)$. Сопрягая δ_i подходящей диагональной матрицей, мы получим представление $\delta_i' = (A_i, B_i')$, имеющее вид (2.4). Значит, δ_i неприводимо и $\rho = \delta_1 + \ldots + \delta_k$ вполне приводимо, что и требовалось доказать. $\square$

3. МНОГООБРАЗИЯ ХАРАКТЕРОВ ГРУПП $\mathrm{BS}(p,q)$

Пусть $G = \langle g_1, \ldots, g_m \rangle$ — конечно порожденная группа. Группа $\mathrm{GL}_n(K)$ действует естественным образом (одновременным сопряжением компонент) на $R_n(G)$, и ее орбиты находятся во взаимно однозначном соответствии с классами эквивалентных представлений группы G. В общем случае орбиты относительно этого действия не обязательно замкнуты и, следовательно, многообразие орбит (геометрический фактор) не является алгебраическим многообразием. Однако, поскольку $\mathrm{GL}_n(K)$ — редуктивная группа, K-алгебра $\mathrm{GL}_n(K)$-инвариантных регулярных функций $K[R_n(G)]^{\mathrm{GL}_n(K)}$ является конечно порожденной и мы можем поставить в соответствие этой K-алгебре некоторое аффинное многообразие $R_n(G)/\!/G$ (категорный фактор), которое мы будем обозначать через $X_n(G)$ и называть *многообразием характеров представлений группы G в* $\mathrm{GL}_n(K)$. Точки $X_n(G)$ параметризуют замкнутые $\mathrm{GL}_n(K)$-орбиты (см. [15]). Учитывая, что орбита представления ρ замкнута лишь в том случае, когда ρ вполне приводимо, и учитывая, что вполне приводимые представления лежат в одной орбите тогда и только тогда, когда они имеют равные характеры, мы получаем, что точки $X_n(G)$ параметризуют характеры вполне приводимых представлений из $R_n(G)$.

Приведем одну явную конструкцию многообразия характеров $X_n(G)$. Для произвольного элемента $g \in G$ рассмотрим регулярную функцию

$$\tau_g\colon\ R_n(G) \to K, \qquad \tau_g(\rho) = \operatorname{tr}\rho(g).$$

$\mathbb{Z}$-алгебра, порожденная всеми функциями τ_g, $g \in G$, исследовалась в [16]. В этой работе доказано, что данная $\mathbb{Z}$-алгебра в общем случае не является конечно порожденной даже для бесконечной циклической группы G. Кроме того, если предполагать, что поле K имеет положительную характеристику, то даже K-алгебра, порожденная всеми функциями τ_g, не является конечно порожденной.

Однако если K имеет нулевую характеристику, то ситуация иная. Пусть $T_n(G)$ есть K-алгебра, порожденная всеми функциями τ_g, $g \in G$. Тогда $T_n(G)$ является конечно порожденной K-алгеброй. Артин [13] высказал гипотезу, что любой инвариант $f \in K[M_n(K)^m]^{\mathrm{GL}_n(K)}$ является многочленом от следов $\operatorname{tr}(X_{i_1}\dots X_{i_s})$. Прочези [17] доказал гипотезу Артина и дополнительно установил, что достаточно рассматривать следы вида $\operatorname{tr}(X_{i_1}\dots X_{i_s})$, $s \le 2^{n-1}$. Результаты Размыслова [18] позволяют улучшить эту оценку до $s \le n^2$. (Отметим, что если мы рассмотрим редуктивную линейную алгебраическую группу $H \subset \mathrm{SL}_n(K)$, то, как показал Винберг [19], алгебра инвариантов $K[H^m]^{N(H)}$, где $N(H)$ — нормализатор H, в общем случае не порождается следами, даже если H связна.) Из этих результатов Прочези и Размыслова следует, что $K[\mathrm{GL}_n(K)^m]^{\mathrm{GL}_n(K)}$ порождается функциями $\operatorname{tr}(X_{i_1}\dots X_{i_s})$, $s \le n^2$, и $\det(X_1\dots X_m)^{-1}$. Следовательно, $T_n(G)$ порождается функциями

$$\tau_{g_{i_1}\dots g_{i_s}},\ d_{(g_1\dots g_m)^{-1}}, \qquad s \le n^2, \tag{3.1}$$

где для $h \in G$ функция $d_h\colon R_n(G) \to K$ задается равенством $d_h(\rho) = \det\rho(h)$ (по формулам Ньютона d_h выражается через $\tau_h, \dots, \tau_{h^n}$, следовательно, $d_h \in T_n(G)$).

Нетрудно видеть, что $T_n(G) = K(R_n(G))^{\mathrm{GL}_n(K)}$. Пусть $h_1, \dots, h_s$ — такие элементы G, что $T_n(G) = K[\tau_{h_1}, \dots, \tau_{h_s}]$. Рассмотрим морфизм

$$\pi\colon\ R_n(G) \to \mathbb{A}^s, \qquad \rho \mapsto (\tau_{h_1}(\rho), \dots, \tau_{h_s}(\rho)). \tag{3.2}$$

Точка $\pi(\rho) = (\alpha_1, \dots, \alpha_s)$ однозначно определяет характер представления ρ. В самом деле, так как по определению $\chi_\rho(g) = \tau_g(\rho)$ и для любого $g \in G$ найдется многочлен $f_g \in K[y_1, \dots, y_s]$ от переменных $y_1, \dots, y_s$ такой, что $\tau_g = f_g(\tau_{h_1}, \dots, \tau_{h_s})$, то

$$\chi_\rho(g) = \tau_g(\rho) = f_g(\tau_{h_1}(\rho), \dots, \tau_{h_s}(\rho)) = f_g(\alpha_1, \dots, \alpha_s).$$

Поэтому мы имеем взаимно однозначное соответствие между множеством характеров представлений группы G в $\mathrm{GL}_n(K)$ и точками $\pi(R_n(G))$. Известно, что $\pi(R_n(G))$ замкнуто по Зарисскому в $\mathbb{A}^s$, и ясно, что

$$K[\pi(R_n(G))] = T_n(G) = K(R_n(G))^{\mathrm{GL}_n(K)} = K[X_n(G)].$$

Следовательно, $\pi(R_n(G))$ бирегулярно изоморфно многообразию характеров $X_n(G)$, и мы в дальнейшем будем отождествлять $X_n(G)$ и $\pi(R_n(G))$.

Морфизм факторизации π обладает следующими общими свойствами (см. [15, § 3]).

Свойство $\mathrm{GL}_n(K)$-*замкнутости.* Если $Y \subset R_n(G)$ — замкнутое $\mathrm{GL}_n(K)$-инвариантное подмножество в $R_n(G)$, то $\pi(Y)$ замкнуто в $X_n(G)$.

Свойство разделения. Пусть $(X_i)_{i\in I}$ — семейство замкнутых $\mathrm{GL}_n(K)$-инвариантных подмножеств в $R_n(G)$, тогда

$$\pi\left(\bigcap_{i\in I} X_i\right) = \bigcap_{i\in I} \pi(X_i).$$

В частности, образы двух непересекающихся замкнутых $\mathrm{GL}_n(K)$-инвариантных подмножеств многообразия $R_n(G)$ не пересекаются.

Следующая теорема дает описание многообразий характеров $X_n(\mathrm{BS}(p,q))$.

Теорема 3.1. 1. *Множествами $X(A) = \pi(W(A))$, где $A \in \Omega(p,q)$ — полупростая матрица, исчерпываются все неприводимые компоненты многообразия $X_n(\mathrm{BS}(p,q))$.*

2. *Если $A_1, A_2 \in \Omega(p,q)$ — неподобные полупростые матрицы, то $X(A_1) \cap X(A_2) = \varnothing$. Следовательно, при $K = \mathbb{C}$ многообразия $X(A)$ являются компонентами связности многообразия $X_n(\mathrm{BS}(p,q))$ в комплексной топологии.*

3. *Если все вполне приводимые представления из $W(A)$ являются суммой k неприводимых представлений ($k = k(A)$ зависит только от матрицы A по теореме* 2.17), *то* $\dim X(A) = k$.

4. *Каждое многообразие $X(A)$ является рациональным.*

Доказательство. 1. Каждый слой $\pi^{-1}(x)$ содержит вполне приводимое представление. Действительно, $\pi^{-1}(x)$ является замкнутым и $\mathrm{GL}_n(K)$-инвариантным множеством. Поэтому если $\rho \in \pi^{-1}(x)$, то $\overline{\mathcal{O}(\rho)} \subset \pi^{-1}(x)$ и $\overline{\mathcal{O}(\rho)}$ содержит вполне приводимое представление.

Далее, если $\rho = (A, B)$ — вполне приводимое представление, то ρ эквивалентно прямой сумме $\rho_1 + \ldots + \rho_s$ неприводимых представлений $\rho_i = (A_i, B_i)$ вида (2.4), где A_i — полупростая матрица. Следовательно, матрица A полупроста, поскольку подобна матрице $\mathrm{diag}(A_1, \ldots, A_s)$. Таким образом, $\pi(\rho) \in X(A)$ и

$$X_n(\mathrm{BS}(p,q)) = \bigcup_{A\in\Omega(p,q)} \pi(W(A)),$$

где объединение берется по полупростым матрицам A. В силу свойства замкнутости морфизма π множества $X(A) = \pi(W(A))$ замкнуты. Если $A_1, A_2 \in \Omega(p,q)$ — неподобные полупростые матрицы, то по следствию 2.11 имеем $W(A_1) \cap W(A_2) = \varnothing$. Тогда из свойства разделения морфизма π вытекает, что $X(A_1) \cap X(A_2) = \varnothing$. Таким образом, замкнутые множества $X(A)$ попарно не пересекаются и их объединением является $X_n(\mathrm{BS}(p,q))$. Значит, множества $X(A)$, где $A \in \Omega(p,q)$ — полупростая матрица, суть в точности все неприводимые компоненты многообразия характеров $X_n(\mathrm{BS}(p,q))$.

2. Это утверждение уже фактически доказано выше.

3. Пусть $\rho = \rho_{(n_1,\alpha_1,b_1)} + \ldots + \rho_{(n_k,\alpha_k,b_k)} \in W(A)$. Рассмотрим следующее представление: $\rho_1 = \rho_{(n_1,\alpha_1,1)} + \ldots + \rho_{(n_k,\alpha_k,1)} \in W(A)$. Среди представлений $\rho_{(n_i,\alpha_i,1)}$ есть попарно эквивалентные. Сгруппируем их в наборы попарно эквивалентных представлений. Пусть среди них есть m_i представлений, эквивалентных $\rho_{(h_i,\beta_i,1)}$, $i = 1, \ldots, r$, и представления $\rho_{(h_i,\beta_i,1)}$ попарно неэквивалентны. По лемме 2.6 для любых $x, y \in K^*$ представления $\rho_{(h_i,\beta_i,x)}$ и $\rho_{(h_j,\beta_j,y)}$ неэквивалентны. Тогда ρ_1 эквивалентно представлению

$$\rho_2 = m_1\rho_{(h_1,\beta_1,1)} + \ldots + m_r\rho_{(h_r,\beta_r,1)}, \tag{3.3}$$

где $m_i\rho_{(h_i,\beta_i,1)}$ обозначает сумму m_i экземпляров представления $\rho_{(h_i,\beta_i,1)}$. Пусть

$$U = \{(x_1, \ldots, x_k) \in \mathbb{A}^k \mid x_1 \ldots x_k \neq 0\} \subset \mathbb{A}^k.$$

Рассмотрим морфизм

$$\psi\colon\ U \to X(A), \qquad \psi(x_1,\dots,x_k) = \pi\big(\rho_{(h_1,\beta_1,x_1)} + \rho_{(h_1,\beta_1,x_2)} + \dots + \rho_{(h_k,\beta_k,x_k)}\big). \tag{3.4}$$

По теореме 2.17 каждое вполне приводимое представление $\delta \in W(A)$ эквивалентно представлению вида $\rho_{(h_1,\beta_1,x_1)} + \dots + \rho_{(h_k,\beta_k,x_k)}$ для некоторого набора $(x_1,\dots,x_k) \in U$. Поэтому ψ — сюръективный морфизм. Вычислим слои морфизма ψ. Пусть $(y_1,\dots,y_k) \in \psi^{-1}(\psi(x_1,\dots,x_k))$. Тогда представления $\rho_{(h_1,\beta_1,x_1)} + \dots + \rho_{(h_k,\beta_k,x_k)}$ и $\rho_{(h_1,\beta_1,y_1)} + \dots + \rho_{(h_k,\beta_k,y_k)}$ являются вполне приводимыми и имеют равные характеры. Значит, они эквивалентны и по лемме 2.6 набор $(y_1,\dots,y_k)$ является следующей перестановкой набора $(x_1,\dots,x_k)$:

$$(y_{m_1+\dots+m_{i-1}+1},\dots,y_{m_1+\dots+m_i}) \quad \text{есть перестановка} \quad (x_{m_1+\dots+m_{i-1}+1},\dots,x_{m_1+\dots+m_i}),$$

$i=1,\dots,r$. Отсюда немедленно получаем, что каждый слой $\psi^{-1}(\psi(x_1,\dots,x_k))$ конечен. Следовательно, $\dim X(A) = k$ по теореме о размерности слоев морфизма.

4. Отождествим поле рациональных функций $K(X(A))$ с подполем $\psi^*(K(X(A)))$ поля $K(U) = K(x_1,\dots,x_k)$, где $x_1,\dots,x_k$ мы рассматриваем как независимые переменные. Обозначим через $T = S_{m_1} \times \dots \times S_{m_r}$ прямое произведение симметрических групп $S_{m_1},\dots,S_{m_r}$. Зададим действие группы T на $K(x_1,\dots,x_k)$ следующим образом. Группа S_{m_j} действует перестановками на множестве $\{x_{m_1+\dots+m_{j-1}+1},\dots,x_{m_1+\dots+m_j}\}$, состоящем из m_j переменных, и оставляет неподвижными остальные переменные. Анализ рассуждения в доказательстве утверждения 3 показывает, что слой $\psi^{-1}(\psi(x_1,\dots,x_k))$ совпадает с орбитой действия группы T на набор $(x_1,\dots,x_k)$. Поэтому поле $\psi^*(K(X(A)))$ совпадает с полем инвариантов $K(x_1,\dots,x_k)^T$. Из классических результатов о симметрических многочленах следует, что поле $K(x_1,\dots,x_k)^T$ является чисто трансцендентным расширением поля K. Это и доказывает рациональность $X(A)$. $\square$

Теорема 3.2. *Если $A \in \Omega(p,q)$ — регулярная полупростая матрица и $\dim X(A) = k$, то $X(A)$ бирегулярно изоморфно открытому подмножеству $U = \{(x_1,\dots,x_k) \in \mathbb{A}^k \mid x_1\dots x_k \neq \neq 0\} \subset \mathbb{A}^k$. В частности, $X(A)$ — гладкое многообразие.*

Доказательство. Если $A \in \Omega(p,q)$ — регулярная полупростая матрица, то все числа $m_1,\dots,m_r$ в (3.3) равны 1. Следовательно, группа T, введенная выше, равна $\{1\}$ и для любой точки $(x_1,\dots,x_k) \in U$ слой $\psi^{-1}(\psi(x_1,\dots,x_k))$ состоит из одной точки, т.е. морфизм ψ является биекцией. Покажем, что обратное к ψ отображение является регулярным во всех точках из $X(A)$.

Выберем элементы $W_1,\dots,W_h \in \mathrm{BS}(p,q)$ так, что $\tau_{W_1},\dots,\tau_{W_h}$ порождают K-алгебру $T_n(\mathrm{BS}(p,q)) = K[R_n(\mathrm{BS}(p,q))]^{\mathrm{GL}_n(K)}$. Тогда морфизм $\pi\colon R_n(\mathrm{BS}(p,q)) \to X_n(\mathrm{BS}(p,q))$ задается формулой

$$\pi(\rho) = (\tau_{W_1}(\rho),\dots,\tau_{W_h}(\rho)) = (\operatorname{tr}\rho(W_1),\dots,\operatorname{tr}\rho(W_h)).$$

Пусть $(a_1,\dots,a_h) \in X(A)$. Тогда существует точка $(x_1,\dots,x_k) \in U$ такая, что

$$(a_1,\dots,a_h) = \psi(x_1,\dots,x_k) = \pi(\rho),$$

где $\rho = \rho_{(h_1,\beta_1,x_1)} + \dots + \rho_{(h_k,\beta_k,x_k)}$. Докажем, что найдутся регулярные функции $f_1,\dots,f_k \in \in K[X(A)]$ такие, что $x_i = f_i(a_1,\dots,a_h)$, $i=1,\dots,k$, для произвольной точки $(a_1,\dots,a_h) \in \in X(A)$. Без ограничения общности мы можем считать, что числа h_i упорядочены по возрастанию:

$$h_1 = \dots = h_{s_1} < h_{s_1+1} = \dots = h_{s_1+s_2} < \dots < h_{s_1+\dots+s_{r-1}+1} = \dots = h_{s_1+\dots+s_r}.$$

Пусть $\rho_{(h_i,\beta_i,x_i)} = (A_i, B_i)$ и матрицы A_i, B_i имеют вид (2.4). Тогда $\rho = (A, B)$, где $A = \operatorname{diag}(A_1, \ldots, A_k) = \operatorname{diag}(\alpha_1, \ldots, \alpha_n)$ и $B = \operatorname{diag}(B_1, \ldots, B_k)$.

Вначале рассмотрим элементы $x_1, \ldots, x_{s_1}$ и для них построим такие регулярные функции $f_1, \ldots, f_{s_1} \in K[X(A)]$, что $x_i = f_i(a_1, \ldots, a_h)$, $i = 1, \ldots, s_1$. Рассмотрим функции $\tau_{a^i b^{h_1}} \in T_n(\mathrm{BS}(p,q))$, $i = 0, \ldots, s_1h_1 - 1$. Тогда существуют полиномы $P_{i,h_1} \in K[z_1, \ldots, z_h]$ такие, что

$$\tau_{a^i b^{h_1}} = P_{i,h_1}(\tau_{W_1}, \ldots, \tau_{W_h}).$$

Следовательно,

$$\tau_{a^i b^{h_1}}(\rho) = P_{i,h_1}(\tau_{W_1}(\rho), \ldots, \tau_{W_h}(\rho)) = P_{i,h_1}(a_1, \ldots, a_h).$$

Учитывая, что $\tau_{a^i b^{h_1}}(\rho) = \operatorname{tr} A^i B^{h_1}$, получаем систему уравнений

$$\operatorname{tr} A^i B^{h_1} = P_{i,h_1}(a_1, \ldots, a_h), \qquad i = 0, \ldots, s_1h_1 - 1. \tag{3.5}$$

Заметим, что для $j \le s_1$ мы имеем $B_j^{h_1} = x_j E_{h_1}$, где E_r обозначает единичную матрицу, и $\operatorname{tr} A_j^i B_j^{h_1} = x_j \operatorname{tr} A_j^i$. Если же $j > s_1$, то $A_j^i B_j^{h_1}$ — мономиальная матрица с нулями на главной диагонали, откуда $\operatorname{tr} A_j^i B_j^{h_1} = 0$. Таким образом,

$$\operatorname{tr} A^i B^{h_1} = \sum_{j=1}^{k} \operatorname{tr} A_j^i B_j^{h_1} = \sum_{j=1}^{s_1} \operatorname{tr} A_j^i B_j^{h_1} = \sum_{j=1}^{s_1} x_j \operatorname{tr} A_j^i.$$

Поэтому система (3.5) принимает вид

$$\begin{gathered}(\alpha_1^i + \ldots + \alpha_{h_1}^i)x_1 + \ldots + (\alpha_{(s_1-1)h_1+1}^i + \ldots + \alpha_{s_1h_1}^i)x_{s_1} = P_{i,h_1}(a_1, \ldots, a_h),\\ 0 \le i \le s_1h_1 - 1.\end{gathered} \tag{3.6}$$

В свою очередь, систему (3.6) можно записать в матричном виде

$$FX = G, \tag{3.7}$$

где

$$F = \begin{pmatrix} 1 & 1 & \ldots & 1 \\ \alpha_1 & \alpha_2 & \ldots & \alpha_{s_1h_1} \\ \alpha_1^2 & \alpha_2^2 & \ldots & \alpha_{s_1h_1}^2 \\ \ldots & \ldots & \ldots & \ldots \\ \alpha_1^{s_1h_1-1} & \alpha_2^{s_1h_1-1} & \ldots & \alpha_{s_1h_1}^{s_1h_1-1} \end{pmatrix}, \qquad X = \begin{pmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_1 \\ \vdots \\ x_{s_1} \\ \vdots \\ x_{s_1} \end{pmatrix}, \qquad G = \begin{pmatrix} P_{0,h_1}(a_1, \ldots, a_s) \\ P_{0,h_1}(a_1, \ldots, a_s) \\ \vdots \\ P_{s_1h_1-1,h_1}(a_1, \ldots, a_s) \end{pmatrix}.$$

В силу биективности морфизма ψ система (3.7) имеет хотя бы одно решение X. Так как A — регулярная матрица, то $\alpha_1, \ldots, \alpha_{s_1h_1}$ попарно различны, откуда $\det F \ne 0$. Следовательно, единственным решением системы (3.7) является

$$X = F^{-1}G. \tag{3.8}$$

Из (3.8) получаем

$$x_i = f_i(a_1, \ldots, a_h), \qquad i = 1, \ldots, s_1, \tag{3.9}$$

для некоторых полиномов $f_i \in K[z_1, \ldots, z_h]$.

Теперь рассмотрим переменные $x_{s_1+1},\dots,x_{s_1+s_2}$. Чтобы упростить обозначения, положим $h'=h_{s_1+1}$. Как и выше, рассмотрим функции $\tau_{a^ib^{h'}}$, $i=0,\dots,s_2h'-1$, и выразим их через $\tau_{W_1},\dots,\tau_{W_h}$:

$$\tau_{a^ib^{h'}}=P_{i,h'}(\tau_{W_1},\dots,\tau_{W_h}),\qquad i=0,\dots,s_2h'-1.$$

После этого мы будем иметь уравнения

$$\operatorname{tr}A^iB^{h'}=P_{i,h'}(a_1,\dots,a_h),\qquad i=0,\dots,s_2h'-1. \tag{3.10}$$

Далее,

$$\operatorname{tr}A^iB^{h'}=\sum_{j=1}^{k}\operatorname{tr}A_j^iB_j^{h'}=\sum_{j=1}^{s_1+s_2}\operatorname{tr}A_j^iB_j^{h'}=\sum_{j=1}^{s_1}\operatorname{tr}A_j^iB_j^{h'}+\sum_{j=s_1+1}^{s_1+s_2}\operatorname{tr}A_j^iB_j^{h'},$$

поскольку $\operatorname{tr}A_j^iB_j^{h'}=0$ при $j>s_1+s_2$ в силу того, что $A_j^iB_j^{h'}$ — мономиальная матрица с нулями на главной диагонали. Учитывая равенства (3.9), получаем $\sum_{j=1}^{s_1}\operatorname{tr}A_j^iB_j^{h'}=R_{i,h'}(a_1,\dots,a_h)$, где $R_{i,h'}\in K[z_1,\dots,z_h]$, а $\operatorname{tr}A_j^iB_j^{h'}=x_j\operatorname{tr}A_j^i$ для $j=s_1+1,\dots,s_1+s_2$. Теперь система (3.10) принимает вид

$$F_1X_1=G_1, \tag{3.11}$$

где

$$F_1=\begin{pmatrix}1 & 1 & \dots & 1\\ \alpha_{s_1h_1+1} & \alpha_{s_1h_1+2} & \cdots & \alpha_{s_1h_1+s_2h'}\\ \alpha^2_{s_1h_1+1} & \alpha^2_{s_1h_1+2} & \cdots & \alpha^2_{s_1h_1+s_2h'}\\ \dots & \dots & \dots & \dots\\ \alpha^{s_2h'-1}_{s_1h_1+1} & \alpha^{s_2h'-1}_{s_1h_1+2} & \dots & \alpha^{s_2h'-1}_{s_1h_1+s_2h'}\end{pmatrix},\qquad X_1=\begin{pmatrix}x_{s_1+1}\\ \vdots\\ x_{s_1+1}\\ \vdots\\ x_{s_1+s_2}\\ \vdots\\ x_{s_1+s_2}\end{pmatrix},$$

$$G_1=\begin{pmatrix}P_{0,h'}(a_1,\dots,a_s)+R_{0,h'}(a_1,\dots,a_s)\\ P_{1,h'}(a_1,\dots,a_s)+R_{1,h'}(a_1,\dots,a_s)\\ \vdots\\ P_{s_2h'-1,h'}(a_1,\dots,a_s)+R_{s_2h'-1,h'}(a_1,\dots,a_s)\end{pmatrix}.$$

Так как $\det F_1\neq 0$, то из (3.11) получаем $X_1=F_1^{-1}G_1$. Это дает нам равенства

$$x_i=f_i(a_1,\dots,a_h),\qquad i=s_1+1,\dots,s_1+s_2,$$

для некоторых полиномов $f_i\in K[z_1,\dots,z_h]$.

Последовательно рассматривая подобным образом каждую группу переменных

$$x_{s_1+\ldots+s_i+1},\dots,x_{s_1+\ldots+s_i+s_{i+1}},$$

мы получим выражения

$$x_i=f_i(a_1,\dots,a_h),\qquad i=s_1+\ldots+s_i+1,\dots,s_1+\ldots+s_i+s_{i+1},$$

где $f_i\in K[z_1,\dots,z_h]$.

По построению регулярное отображение

$$\delta\colon X(A)\to U,\qquad (a_1,\dots,a_h)\mapsto\big(f_1(a_1,\dots,a_h),\dots,f_k(a_1,\dots,a_h)\big)=(x_1,\dots,x_k)$$

является обратным к ψ. Теорема доказана. $\square$

Из теоремы 3.2 получаем

Следствие 3.3. *Многообразие характеров неприводимых представлений* $X_n^{\mathrm{s}}(\mathrm{BS}(p,q))$ *открыто и замкнуто в* $X_n(\mathrm{BS}(p,q))$. *При этом каждая неприводимая компонента многообразия* $X_n^{\mathrm{s}}(\mathrm{BS}(p,q))$ *изоморфна* $\mathbb{A}^1 \setminus \{0\}$ *и, следовательно, является гладкой рациональной кривой.*

Следствие 3.4. *Размерности* $\dim X(A)$ *неприводимых компонент* $X(A)$ *многообразия* $X_n(\mathrm{BS}(p,q))$ *принимают все значения от* 1 *до* n. *В частности,* $\dim X_n(\mathrm{BS}(p,q)) = n$.

Доказательство. Из описания неприводимых представлений группы $\mathrm{BS}(p,q)$ в [8] следует, что для любого натурального k существует неприводимое представление группы $\mathrm{BS}(p,q)$ степени k. Пусть $s \le n$, $k_1 + \ldots + k_s = n$ — произвольное разбиение числа n и ρ_i: $\mathrm{BS}(p,q) \to \mathrm{GL}_{k_i}(K)$ — неприводимое представление. Далее, пусть $\rho = \rho_1 + \ldots + \rho_s$ — вполне приводимое представление группы $\mathrm{BS}(p,q)$ степени n. Тогда $\rho \in W(A)$ для некоторой неприводимой компоненты $W(A)$ и $\dim X(A) = s$ по теореме 3.1. Максимальная размерность n достигается лишь в том случае, когда $k_1 = \ldots = k_n = 1$ и представление ρ является прямой суммой одномерных представлений. $\square$

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. *Mumford D., Fogarty J.* Geometric invariant theory. Berlin: Springer, 1982.
2. *Lubotzky A., Magid A.R.* Varieties of representations of finitely generated groups. Providence, RI: Amer. Math. Soc., 1985. (Mem. AMS; V. 58, N 336).
3. *Rudnick Z.* Representation varieties of solvable groups // J. Pure Appl. Algebra. 1987. V. 45. P. 261–272.
4. *Rapinchuk A.S., Benyash-Krivetz V.V., Chernousov V.I.* Representation varieties of the fundamental groups of compact orientable surfaces // Isr. J. Math. 1996. V. 93. P. 29–71.
5. *Беняш-Кривец В.В., Черноусов В.И.* Многообразия представлений фундаментальных групп компактных неориентируемых поверхностей // Мат. сб. 1997. Т. 188, №7. С. 47–92.
6. *Baumslag G., Solitar D.* Some two-generator one-relator non-Hopfian groups // Bull. Amer. Math. Soc. 1962. V. 68, N 3. P. 199–201.
7. *Meskin S.* Nonresidually finite one-relator groups // Trans. Amer. Math. Soc. 1972. V. 164. P. 105–114.
8. *McLaury D.* Irreducible representations of Baumslag–Solitar groups // J. Group Theory. 2012. V. 15, N 4. P. 543–552.
9. *Дудкин Ф.А.* Неприводимые представления подгрупп конечного индекса групп Баумслага–Солитера // Сиб. мат. журн. 2013. Т. 54, №6. С. 1273–1279.
10. *Беняш-Кривец В.В., Говорушко И.О.* О многообразиях представлений групп Баумслага–Солитера // Вестн. БГУ. Сер. 1. 2014. №2. С. 68–70.
11. *Гантмахер Ф.Р.* Теория матриц. М.: Наука, 1967.
12. *Шафаревич И.Р.* Основы алгебраической геометрии. М.: Наука, 1988. Т. 1.
13. *Artin M.* On Azumaya algebras and finite dimensional representations of rings // J. Algebra. 1969. V. 11. P. 532–563.
14. *Мамфорд Д.* Алгебраическая геометрия. Т. 1: Комплексные проективные многообразия. М.: Мир, 1979.
15. *Крафт Х.* Геометрические методы в теории инвариантов. М.: Мир, 1987.
16. *Платонов В.П., Беняш-Кривец В.В.* Кольца характеров представлений конечно-порожденных групп // Тр. МИАН. 1990. Т. 183. С. 169–178.
17. *Procesi C.* The invariant theory of $n \times n$ matrices // Adv. Math. 1976. V. 19, N 3. P. 306–381.
18. *Размыслов Ю.П.* Тождества со следом полных матричных алгебр над полем характеристики нуль // Изв. АН СССР. Сер. мат. 1974. Т. 38, №4. С. 723–756.
19. *Vinberg E.B.* On invariants of a set of matrices // J. Lie Theory. 1996. V. 6, N 2. P. 249–269.