A. Yu. Vaintrob, Deformations of complex superspaces and of the coherent sheaves on them,
Itogi Nauki i Tekhniki. Ser. Sovrem. Probl. Mat. Nov. Dostizh., 1988, Volume 32, 125–211

УДК 512.743

ДЕФОРМАЦИИ КОМПЛЕКСНЫХ СУПЕРПРОСТРАНСТВ И КОГЕРЕНТНЫХ ПУЧКОВ НА НИХ

А. Ю. Вайнтроб

Эта работа посвящена построению теории деформаций комплексных структур на суперпространствах. Классическая теория деформаций, начавшаяся в конце 50-х годов в работах Кодаиры—Спенсера, к середине 70-х годов была в основном завершена.

К этому времени началось развитие теории супермногообразий, стимулируемое физическими работами, в некоторых из которых более или менее явно предполагалось, что результаты теории деформаций без существенных изменений переносятся на суперслучай. Обоснование этого предположения — это и есть основное содержание работы. Изложение организовано следующим образом. В первой главе обобщаются на суперслучай общие свойства комплексных пространств и когерентных аналитических пучков: теоремы Ока, Картана, Грауэрта и др. Во второй главе излагаются различные понятия, связанные с деформациями, и доказывается существование версальной деформации элемента группы Ext. Важный частный случай этой теоремы, относящийся к деформациям когомологических классов, доказан Бингенером [21]. Центральные теоремы настоящей работы о существовании версальных деформаций для суперпространств и когерентных пучков на них формулируются тоже во второй главе, а их доказательство занимает всю главу 4. В третьей главе объясняется, как с помощью основных теорем существования строить версальные деформации других структур: подсуперпространств, SUSY-структур, пар — суперпространство и пучок и суперпространство и подсуперпространство.

Большая часть результатов работы анонсирована ранее в [2], [3], [4], [5]. Стоит отметить, что работа Ротштейна [35], несмотря на ее название, посвящена не деформациям, а проблеме классификации супермногообразий, и пересекается с настоящей работой лишь по предложению 3.1.4.

Все необходимые сведения по супергеометрии можно найти в книгах Д. А. Лейтеса и Ю. И. Манина [9], [12]. Оба они являются моими учителями, и я рад возможности выразить им свою благодарность. Д. А. Лейтес познакомил меня с миром

супермногообразий, а Ю. И. Манин предложил заняться изучением комплексных структур на них. Без их внимания и поддержки эта работа вряд ли была бы написана. Я также благодарен А. А. Бейлинсону за полезные обсуждения.

Глава 1

КОМПЛЕКСНЫЕ СУПЕРПРОСТРАНСТВА И КОГЕРЕНТНЫЕ ПУЧКИ НА НИХ

Эта глава посвящена изложению общих фактов о когерентных пучках на комплексных суперпространствах, которые, как правило, по формулировке не отличаются от чисто четного случая. Доказательство большинства из них представляет собой редукцию к аналогичному результату для случая комплексных пространств, основанную на критерии когерентности 1.3.5.

§ 1.1. КОМПЛЕКСНЫЕ СУПЕРПРОСТРАНСТВА

1.1.1. Суперпространства. *Суперпространством* называется локально окольцованное пространство $(M, \mathcal{O}_M)$, где $\mathcal{O}_M$ — пучок локальных суперкоммутативных колец на топологическом пространстве M. *Морфизм суперпространств* — это морфизм локально окольцованных пространств, сохраняющий градуировку в структурных пучках. *Чисто четным* мы будем называть суперпространство, у которого $\mathcal{O}_{M,\bar{1}}=0$.

Пусть $J=\mathcal{O}_{M,\bar{1}}\oplus\mathcal{O}^2_{M,\bar{1}}$ — идеал в структурном пучке $\mathcal{O}_M$, порожденный нечетными элементами. Окольцованное пространство $M_{\mathrm{rd}}:=(M, \mathcal{O}_M/J)=(M, \mathcal{O}_{M,\bar{0}}/\mathcal{O}^2_{M,\bar{1}})$, являющееся чисто четным подсуперпространством в $(M, \mathcal{O}_M)$, мы будем называть *подстилающим пространством* суперпространства $(M, \mathcal{O}_M)$. В пучке $\mathcal{O}_M$ имеется каноническая фильтрация степенями идеала J. Пусть $\operatorname{Gr}\mathcal{O}_M:=\bigoplus\limits_{i\geqslant 0} J^i/J^{i+1}$ — присоединенный градуированный пучок, тогда $(M, \operatorname{Gr}\mathcal{O}_M)$ — суперпространство, которое будет обозначаться $\operatorname{Gr} M$. Суперпространство $(M, \mathcal{O}_M)$ называется *расщепимым*, если оно изоморфно $\operatorname{Gr} M$.

1.1.2. Комплексные суперпространства. Комплексные пространства — это объекты, локально устроенные как аналитические подмножества (с нильпотентами) в $\mathbf{C}^p$. Аналогичным образом мы определим и комплексные суперпространства. Сначала необходимо построить модельные объекты — «множества» нулей систем уравнений в $\mathbf{C}^{p|q}$.

Пусть $\mathcal{U}=(U, \mathcal{O}_{\mathcal{U}})$ — подсуперобласть в $\mathbf{C}^{p|q}$, то есть U — область в $\mathbf{C}^p$, а $\mathcal{O}_{\mathcal{U}}=\mathcal{O}_U[\xi_1, \xi_2, \ldots, \xi_q]$, где $\mathcal{O}_U$ — пучок голоморфных функций на U, а $\xi_1, \xi_2, \ldots, \xi_q$, как обычно, —нечетные образующие. Произвольный набор сечений $f_1, f_2, \ldots, f_k \in \mathcal{O}_{\mathcal{U}}$ порождает подпучок идеалов J в $\mathcal{O}_{\mathcal{U}}$. Если все f_i однородны относительно четности, то и идеал также однороден. В дальнейшем, говоря об идеалах в суперкоммутативной алгебре, мы будем иметь в виду только однородные идеалы. Приведя все f_i по модулю нечетных образующих пучка $\mathcal{O}_{\mathcal{U}}$, мы получим набор функций $\bar{f}_i \in \mathcal{O}_U$. Идеал $\bar{J} = (\bar{f}_i)$ задает аналитическое подмножество $V \subset U \subset \mathbf{C}^p$. Модельное суперпространство—это суперпространство вида $\mathcal{V}(J) = (V, (\mathcal{O}_{\mathcal{U}}/J)|_V)$.

Определение. Суперпространство $(M, \mathcal{O}_M)$ называется *комплексным суперпространством*, если каждая точка M имеет окрестность $U \subset M$, для которой суперпространство $(U, \mathcal{O}_M|_U)$ изоморфно одному из модельных суперпространств $\mathcal{V}(J)$.

Представим структурный пучок $\mathcal{O}_M$ в виде суммы однородных компонент $\mathcal{O}_M = \mathcal{O}_{\bar{0}} \oplus \mathcal{O}_{\bar{1}}$. Тогда $(M, \mathcal{O}_{\bar{0}})$ —обычное (не супер) окольцованное пространство, а $\mathcal{O}_{\bar{1}}$ —пучок $\mathcal{O}_{\bar{0}}$-модулей, на M. Это позволяет рассматривать суперпространство $(M, \mathcal{O}_M)$ с четной точки зрения. Мы будем часто использовать следующую характеризацию комплексных суперпространств, которая часто (начиная с Делиня) принимается за их определение.

1.1.3. Предложение. Суперпространство $(M, \mathcal{O}_M)$ является комплексным суперпространством тогда и только тогда, когда выполнены два условия:

(i) окольцованное пространство $(M, \mathcal{O}_0)$ является комплексным пространством и

(ii) пучок $\mathcal{O}_{\bar{1}}$ на M—когерентный пучок $\mathcal{O}_{\bar{0}}$-модулей.

Доказательство. Пусть $(M, \mathcal{O}_M)$—комплексное суперпространство, $m \in M$ и V—окрестность точки m, для которой $\mathcal{O}_M|_V = \mathcal{O}_U[\xi_1, \ldots, \xi_q]/(f_1, \ldots, f_{s+t})$, где $U \subset \mathbf{C}^p$-открытое подмножество, $f_1, \ldots, f_s$—четные, $f_{s+1}, \ldots, f_{s+t}$—нечетные образующие идеала $J_V \subset \mathcal{O}_U[\xi_1, \ldots, \xi_q]$. Тогда $(V, \mathcal{O}_{\bar{0}}|_V)$ изоморфно аналитическому подмножеству в $U \times \mathbf{C}^{q^2}$.

Действительно, пусть x_i, $i = 1, \ldots, p$, —координаты в области U, а θ_{ij}, $1 \leqslant i \leqslant q$, $1 \leqslant j \leqslant q$, —координаты в $\mathbf{C}^{q^2}$. Тогда отображение $\mathcal{O}(U \times \mathbf{C}^{q^2}) \to \mathcal{O}(U)[\xi_1, \ldots, \xi_q]_{\bar{0}}$: $x_i \mapsto x_i$, $\theta_{ij} \mapsto \xi_i \xi_j$ является эпиморфизмом колец с ядром, порожденным элементами $\theta_{ij} + \theta_{ji}$, $\theta_{ij}\theta_{kl} + \theta_{ik}\theta_{jl}$, θ_{ii}, $i, j, k, l \in \{1, 2, \ldots, q\}$.

Пусть $J_{\bar{0}} = J_V \cap \mathcal{O}(U)[\xi_1, \ldots, \xi_q]_{\bar{0}}$—идеал кольца $\mathcal{O}(U)[\xi_1, \ldots, \xi_q]_{\bar{0}}$, состоящий из четных элементов идеала J_V. Идеал $J_{\bar{0}}$ порождается элементами f_k, $\xi_i f_l$, $1 \leqslant k \leqslant s$; $s+1 \leqslant$

$\leqslant l \leqslant s+t$, $1 \leqslant i \leqslant q$, поэтому ядро композиции

$$\mathcal{O}(U\times \mathbf{C}^{q^2}) \to \mathcal{O}(U)[\xi_1, \ldots, \xi_q]_{\bar 0} \to \mathcal{O}(U)[\xi_1, \ldots, \xi_q]_{\bar 0}/J_{\bar 0} = \mathcal{O}_{\bar 0}(V)$$

является конечно порожденным идеалом кольца $\mathcal{O}(U\times \mathbf{C}^{q^2})$. Таким образом, каждая точка m окольцованного пространства $(M, \mathcal{O}_{\bar 0})$ имеет окрестность, изоморфную аналитическому множеству, что означает, что $(M, \mathcal{O}_{\bar 0})$ — комплексное пространство. Пучок $\mathcal{O}_{\bar 1}$ на M в окрестности V точки $m\in M$ изоморфен $\mathcal{O}(U)[\xi_1, \ldots, \xi_q]_{\bar 1}/J_{\bar 1}$, где $J_{\bar 1}$ — подмодуль $\mathcal{O}(U)[\xi_1, \ldots, \xi_q]_{\bar 0}$-модуля $\mathcal{O}(U)[\xi_1, \ldots, \xi_q]_{\bar 1}$, порожденный нечетными функциями f_{s+i}, $1\leqslant i\leqslant t$ и $\xi_j f_k$, $1\leqslant k\leqslant s$, $1\leqslant j\leqslant q$. Элементы $\xi_1, \ldots, \xi_q$ порождают $\mathcal{O}(U)[\xi_1, \ldots, \xi_q]_{\bar 1}$ над $\mathcal{O}(U)[\xi_1, \ldots, \xi_q]_{\bar 0}$, поэтому после факторизации они становятся образующими $\mathcal{O}(V)_{\bar 1}$ над $\mathcal{O}(V)[\xi_1, \ldots, \xi_q]$ и, следовательно, над $\mathcal{O}(V)_{\bar 0} = \mathcal{O}(U)[\xi_1, \ldots, \xi_q]_{\bar 0}/J_{\bar 0}$, итак, $\mathcal{O}(V)_{\bar 1}$ как модуль над $\mathcal{O}(V)_{\bar 0}$ конечно порожден и конечно представим (т. е. имеет конечное число соотношений). Поэтому, применяя теорему Ока [6], получаем, что пучок $\mathcal{O}_{\bar 1}$ является когерентным $\mathcal{O}_{\bar 1}$-модулем.

Обратно, пусть $(M, \mathcal{O}_{\bar 0}\oplus\mathcal{O}_{\bar 1})$ — суперпространство, для которого $(M, \mathcal{O}_{\bar 0})$ — комплексное пространство и $\mathcal{O}_{\bar 1}$ — когерентный $\mathcal{O}_{\bar 0}$-модуль. Тогда в некоторой окрестности V точки $m\in M$ существуют представления

$$0\to I\to \mathcal{O}(U) \xrightarrow{\pi_0} \mathcal{O}_{\bar 0}(V)\to 0$$

и

$$0\to K\to T \xrightarrow{\pi_1} \mathcal{O}_{\bar 1}(V)\to 0,$$

где U — область в $\mathbf{C}^p$, I — конечно порожденный идеал кольца $\mathcal{O}(U)$, T — свободный $\mathcal{O}_{\bar 0}(V)$-модуль, K — конечно порожденный подмодуль в T. Мы должны найти представление супералгебры $\mathcal{O}_{\bar 0}(V)+\mathcal{O}_{\bar 1}(V)$ в виде фактора супералгебры $\mathcal{O}(U\times \mathbf{C}^{0|q})$ по конечно порожденному идеалу. Возьмем q равным рангу модуля T и выберем в нем нечетные свободные образующие $\xi_1, \xi_2, \ldots$ $\ldots, \xi_q$. Тогда, полагая $\pi(f\cdot\xi_{i_1}\xi_{i_2}\ldots\xi_{i_k}) = \pi_{\bar 0}(f)\,\pi_1(\xi_{i_1})\ldots\pi_1(\xi_{i_k})$, где $f\in\mathcal{O}(U)$, мы получим эпиморфизм $\mathcal{O}(U)$-супералгебр $\pi:\mathcal{O}(U)[\xi_1, \xi_2, \ldots, \xi_q]\to\mathcal{O}_{\bar 0}(V)\oplus\mathcal{O}_{\bar 1}(V)$, ядро которого конечно порождено. □

1.1.4. Суперрасширения. Пусть $(X, \mathcal{O}_X)$ — комплексное пространство, $\mathcal{F}$ — когерентный пучок $\mathcal{O}_X$-модулей. Комплексное суперпространство $(M, \mathcal{O}_M)$ называется *суперрасширением* пары

$(X, \mathcal{F})$, если существуют изоморфизмы комплексных пространств $i:(X, \mathcal{O}_X)\overset{\sim}{\to}(M, \mathcal{O}_{\bar{0}})$ и $\mathcal{O}_{M,\bar{0}}$-модулей $i_*\mathcal{F}\overset{\sim}{\to}\mathcal{O}_{\bar{1}}$.

Различные суперрасширения пары $(X, \mathcal{F})$ отличаются друг от друга структурой супералгебры в пучке $\mathcal{O}_X\oplus\mathcal{F}$. Следующий результат показывает, что их можно классифицировать сечениями некоторого когерентного пучка на X. В дальнейшем это позволит нам рассматривать комплексные суперпространства с чисто четной точки зрения.

Предложение. Существует функтор Sup из категории Coh_X когерентных аналитических пучков на комплексном пространстве X в себя, такой что для любого $\mathcal{F}\in\mathrm{Coh}_X$ все суперрасширения пары $(X, \mathcal{F})$ (с точностью до изоморфизма) находятся во взаимно однозначном соответствии с множеством $H^0(X; \mathrm{Sup}(\mathcal{F}))$.

Доказательство. Дадим сначала конструкцию функтора Sup. Пусть $\mathcal{F}\in\mathrm{Coh}_X$, тогда пучки $\mathcal{O}_X$-модулей $\wedge^2\mathcal{F}$ и $\wedge^3\mathcal{F}$ когерентны так же, как и пучки $\mathrm{Hom}_{\mathcal{O}_X}(\wedge^2\mathcal{F}, \mathcal{O}_X)$ и $\mathrm{Hom}_{\mathcal{O}_X}(\wedge^3\mathcal{F}, \mathcal{O}_X)$. Рассмотрим гомоморфизм $\mathcal{O}_X$-модулей $\varphi:\mathrm{Hom}_{\mathcal{O}_X}(\wedge^2\mathcal{F}, \mathcal{O}_X)\to\mathrm{Hom}_{\mathcal{O}_X}(\wedge^3\mathcal{F}, \mathcal{O}_X)$, определяемый условием

$$\varphi(\mu)(f_1\wedge f_2\wedge f_3)=\mu(f_1\wedge f_2)f_3-\mu(f_2\wedge f_3)f_1,$$

где $\mu\in\mathrm{Hom}_{\mathcal{O}_X(U)}(\wedge^2\mathcal{F}(U), \mathcal{O}_X(U))$, f_1, f_2, $f_3\in\mathcal{F}(U)$, $U\subset X$ — открытое подмножество. Положим $\mathrm{Sup}(\mathcal{F})=\mathrm{Ker}\,\varphi$.

Пусть теперь $(M, \mathcal{O}_M)$ — какое-то суперрасширение пары $(X, \mathcal{F})$. Это означает, что мы превратили пучок модулей $\mathcal{O}_X\oplus\mathcal{F}$ в пучок суперкоммутативных алгебр, четная часть которого совпадает с $\mathcal{O}_X$. В этом случае мы уже умеем перемножать четные элементы (из-за наличия умножения в $\mathcal{O}_X$) и четные с нечетными (из-за наличия структуры $\mathcal{O}_X$-модуля в $\mathcal{F}$). Недостающая часть — это умножение нечетных элементов, для задания которого необходимо выбрать семейство согласованных отображений $\tilde{\mu}_U:\mathcal{F}(U)\otimes\otimes\mathcal{F}(U)\to\mathcal{O}_X(U)$. Выясним, какие ограничения накладывают на $\tilde{\mu}_U$ требования суперкоммутативности и ассоциативности. Возьмем сначала один четный элемент $g\in\mathcal{O}_X(U)$ и два нечетных f_1, $f_2\in\mathcal{F}(U)$. Ассоциативность умножения в этом случае означает, что $g\cdot\tilde{\mu}_U(f_1f_2)=\tilde{\mu}_U(gf_1, f_2)=\tilde{\mu}_U(f_1, gf_2)$, то есть $\tilde{\mu}_U$ можно опустить гомоморфизм $\mathcal{O}(U)$-модулей $\mathcal{F}(U)\otimes_{\mathcal{O}_{X(U)}}\mathcal{F}(U)\to\to\mathcal{O}_X(U)$. Суперкоммутативность $\tilde{\mu}_U(f_1, f_2)=-\tilde{\mu}_U(f_2, f_1)$ показывает, что $\tilde{\mu}_U$ опускается и до гомоморфизма $\mu_U:\Lambda^2\mathcal{F}(U)\to\to\mathcal{O}_X(U)$. Согласованность гомоморфизмов μ_U следует из согласованности отображений $\tilde{\mu}_U$, поэтому мы получаем гомоморфизм когерентных пучков $\mu:\Lambda^2\mathcal{F}\to\mathcal{O}_X$. Ассоциативность умножения в $\mathcal{O}_X\oplus\mathcal{F}$ в случае трех нечетных сомножителей равносильна коммутативности диаграммы

$$\begin{tikzcd}
\mathcal{F}\otimes_{\mathcal{O}_X}\mathcal{F}\otimes_{\mathcal{O}_X}\mathcal{F} \arrow[r, "\mu\otimes id"] \arrow[d, "id\otimes\mu"'] & \mathcal{O}_X\otimes_{\mathcal{O}_X}\mathcal{F} \arrow[d, "\wr"] \\
\mathcal{F}\otimes_{\mathcal{O}_X}\mathcal{O}_X \arrow[r, "\sim"] & \mathcal{F}
\end{tikzcd}$$

или условию $\varphi(\mu)=0$, где μ рассматривается как сечение пучка $\mathrm{Hom}_{\mathcal{O}_X}(\Lambda^2\mathcal{F}, \mathcal{O}_X)$. Итак, каждое суперрасширение пары $(X, \mathcal{F})$ определяет элемент μ группы $H^0(X; \mathrm{Sup}(\mathcal{F})$ и, обратно, μ задает структуру суперкоммутативной алгебры в пучке $\mathcal{O}_X\oplus\mathcal{F}$, что равносильно, по 1.1.3, заданию комплексного суперпространства $(M, \mathcal{O}_M)$ с $\mathcal{O}_{M,\bar{0}}\simeq\mathcal{O}_X$ и $\mathcal{O}_{M,\bar{1}}\simeq\mathcal{F}$. □

1.1.5. Произведения. Пусть $(X, \mathcal{O}_X)$ и $(Y, \mathcal{O}_Y)$ комплексные суперпространства. Их *прямое произведение* — это комплексное суперпространство $(X\times Y, \mathcal{O}_{X\times Y})$, структурный пучок которого определяется следующим образом. Рассмотрим покрытия X и Y модельными суперпространствами (см. 1.1.2) $(V_\alpha, \mathcal{O}_{\mathcal{U}_\alpha}/J_\alpha)$ и $(V'_\beta, \mathcal{O}_{\mathcal{U}'_\beta}/J'_\beta)$. Пучки $\mathcal{O}_{\mathcal{U}_\alpha\times\mathcal{U}'_\beta}/(J_\alpha\mathcal{O}_{\mathcal{U}_\alpha\times\mathcal{U}'_\beta}+J'_\beta\mathcal{O}_{\mathcal{U}_\alpha\times\mathcal{U}'_\beta})$ на аналитических множествах $V_\alpha\times V'_\beta$ согласованы относительно отображений склейки для покрытий $\{V_\alpha\}$ и $\{V'_\beta\}$. Определяемый ими пучок $\mathcal{O}_{X\times Y}$ на $X\times Y$, как показывает стандартная проверка, не зависит от выбора покрытий модельными суперпространствами и задает на $X\times Y$ структуру комплексного суперпространства.

Пусть $f: (X,\mathcal{O}_X)\to(S,\mathcal{O}_S)$ и $g: (Y,\mathcal{O}_Y)\to(S,\mathcal{O}_S)$ — два морфизма комплексных суперпространств. Их *расслоенное произведение* — это суперпространство $(Z,\mathcal{O}_Z)$ вместе с морфизмами $p_1: (Z,\mathcal{O}_Z)\to(X,\mathcal{O}_X)$ и $p_2: (Z,\mathcal{O}_Z)\to(Y,\mathcal{O}_Y)$, удовлетворяющее естественным требованиям универсальности.

Дадим конструкцию $(Z,\mathcal{O}_Z)$, как замкнутого подсуперпространства в $(X,\mathcal{O}_X)\times(Y,\mathcal{O}_Y)$. Положим $Z:=X\times_S Y:=\{(x,y)\in X\times Y \mid f(x)=g(y)\}$, а $\mathcal{O}_Z:=\mathcal{O}_{X\times Y}/J$, где J — пучок идеалов в $\mathcal{O}_{X\times Y}$, порожденный разностями $f^*(\sigma)-g^*(\sigma)$, где σ — сечение структурного пучка $\mathcal{O}_S$ над некоторым открытым множеством. Пучок J локально конечно порожден, поэтому мы получаем замкнутое комплексное подсуперпространство в $(X\times Y, \mathcal{O}_{X\times Y})$. Легко проверяется, что ограничения проекций на $(Z,\mathcal{O}_Z)$ удовлетворяют требованию универсальности.

§ 1.2. РОСТКИ СУПЕРПРОСТРАНСТВ И ЛОКАЛЬНЫЕ АНАЛИТИЧЕСКИЕ СУПЕРАЛГЕБРЫ

Для изучения локальных свойств комплексных суперпространств удобно использовать еще один тип суперпространств, обобщающий обычное понятие ростка аналитического множества.

1.2.1. Ростки. Пусть $(U_1, \mathcal{O}_1)$ и $(U_2, \mathcal{O}_2)$ — два модельных комплексных подсуперпространства $\mathbf{C}^{p|q}$. Они называются эквивалентными в точке $x \in \mathbf{C}^{p|q}$, если существует окрестность U точки x, содержащаяся в $U_1 \cap U_2$, и идеал J в $\mathcal{O}(U)[\xi_1, \ldots, \xi_q]$ такие, что $\mathcal{O}_1|_U = \mathcal{O}_2|_U = \mathcal{O}(U)[\xi_1, \ldots, \xi_q]/J$. Класс эквивалентности суперпространства U называется *ростком* комплексного суперпространства $(U, \mathcal{O}_1)$ в точке x. Любое комплексное суперпространство M локально изоморфно модельному, поэтому для любой точки $x \in M$ можно определить росток M в точке x. Пусть U_1, U_2 — представители ростка суперпространства M в точке x, а V_1, V_2 — представители ростка суперпространства N в точке y. Два морфизма суперпространств $f_1 : U_1 \to V_1$ и $f_2 : U_2 \to V_2$, переводящих x в y, называются эквивалентными, если они совпадают в некоторой окрестности $x \in U \subset U_1 \cap U_2$. Морфизм ростков — это класс эквивалентности морфизмов суперпространств.

Как правило, мы будем задавать ростки комплексных суперпространств и их морфизмы предъявлением представителей соответствующих классов без каких-либо дополнительных оговорок, если это не сможет привести к недоразумениям.

1.2.2. Пусть (M, x) — росток комплексного суперпространства. Обозначим через $\mathcal{O}_M = \mathcal{O}_{U,x}$ локальное суперкоммутативное кольцо точки x для какого-нибудь представителя $(U, \mathcal{O}_U)$ ростка M. Супералгебра $\mathcal{O}_M$ не зависит от выбора представителя U и называется *локальным кольцом ростка M*.

1.2.3. Локальные аналитические супералгебры. Пусть $\mathbf{C}\{x, \xi\} = \mathbf{C}\{x_1, \ldots, x_p, \xi_1, \ldots, \xi_q\}$ — супералгебра сходящихся рядов от p четных и q нечетных переменных. Из определения комплексного суперпространства следует, что локальное кольцо любого ростка изоморфно факторалгебре супералгебры $\mathbf{C}\{x, \xi\}$ при некоторых p и q. *Локальной аналитической супералгеброй* называется произвольная факторалгебра супералгебры $\mathbf{C}\{x, \xi\}$.

Локальное кольцо ростка комплексного суперпространства может быть получено из супералгебры $\mathbf{C}\{x, \xi\}$ факторизацией по конечно порожденному идеалу. Оказывается, это верно для любой локальной аналитической супералгебры.

1.2.4. Предложение. Локальная аналитическая супералгебра нётерова.

Доказательство. Сначала докажем нётеровость супералгебры $\mathbf{C}\{x_1, \ldots, x_p, \xi_1, \ldots, \xi_q\}$. При $q=0$ это известный факт [6]. Применим индукцию по q. Пусть $A = \mathbf{C}\{x_1, \ldots, x_p, \xi_1, \ldots, \xi_q\}$ нётерова, докажем, что тогда и $A' = \mathbf{C}\{x_1, \ldots, x_p, \xi_1, \ldots, \xi_q, \xi\}$ нётерова. Рассмотрим идеал I в A'. Образ идеала I при проекции $\pi : A' \to A \cdot \xi \mapsto 0$ конечно порожден. Пусть $f_1, \ldots, f_n$ — образующие идеала $\pi(I)$, а $f_1', \ldots, f_n' \in I$ таковы, что $\pi(f_i') = f_i$. Дополним набор $f_1', \ldots, f_n'$ до семейства образующих $\{f_1', \ldots$

$\ldots, f_n', g_1, \ldots, g_i, \ldots\}$ идеала I. Так как $\pi(g_i)=\sum_{j=1}^{n} a_{ij}f_j$, $a_{ij}\in A$, вычитая из g_i линейную комбинацию элементов f_j', мы получим элементы $g_i'\in I$, для которых $\pi(g_i')=0$ и $I=(f_1', f_2', \ldots, f_n', g_1, \ldots, g_i, \ldots)=(f_1', \ldots, f_n', g_1', \ldots, g_i', \ldots)$. Из $\pi(g_i')=0$ следует, что $g_i'\in\xi A'\cap I$. Произвольный элемент $a'\in\xi A'$ однозначно представим в виде $a'=\xi a$, где a не зависит от ξ и потому может рассматриваться как элемент из A. Построенное отображение $\rho:\xi A'\to A: a'\mapsto a$ является нечетным изоморфизмом A-модулей, поэтому, выбрав конечный набор однородных образующих (h_k) в идеале $\rho(\xi A'\cap I)$, мы получим и конечную систему образующих $\{f_1', f_2', \ldots, f_n', \rho^{-1}(h_1), \ldots, \rho^{-1}(h_k), \ldots\}$ в I. Итак, нётеровость супералгебры $\mathbf{C}\{x, \xi\}$ доказана.

Пусть теперь B — произвольная локальная аналитическая супералгебра, I — идеал в B. Супералгебра B является фактор-алгеброй супералгебры $A=\mathbf{C}\{x_1, \ldots, x_p, \xi_1, \ldots, \xi_q\}$ при некоторых p и q. Пусть $\sigma: A\to B$ — эпиморфизм и $f_1', \ldots, f_n'$ — образующие идеала $\sigma^{-1}(I)$ в нётеровой супералгебре A. Тогда $\sigma(f_1'), \ldots, \sigma(f_n')$ порождают идеал I и, следовательно, супералгебра B нётерова. □

Свойства ростка M комплексного суперпространства полностью определяются его локальной супералгеброй $\mathcal{O}_M$. Поэтому росток можно рассматривать как одноточечное суперпространство $(\{m\}, \mathcal{O}_M)$.

1.2.5. Предложение. Категория Alg локальных аналитических супералгебр двойственна категории $\mathcal{A}n$ ростков комплексных суперпространств.

Доказательство. Морфизм ростков $f:(M, x)\to(N, y)$ представляется морфизмом комплексных суперпространств $(U, \mathcal{O}_U)\to(V, \mathcal{O}_V)$, представляющих M и N, для которого $f(x)=y$. Поэтому определен гомоморфизм слоев $f^*\mathcal{O}_{V,y}\to\mathcal{O}_{U,x}$ над x и y. Изоморфизмы $\mathcal{O}_{V,y}\simeq\mathcal{O}_N$ и $\mathcal{O}_{U,x}\simeq\mathcal{O}_M$ дают гомоморфизм локальных аналитических супералгебр, не зависящий от выбора представителей U, V и f.

Пусть теперь A — произвольная аналитическая супералгебра, $\pi:\mathbf{C}\{x_1, \ldots, x_p, \xi_1, \ldots, \xi_q\}\to A$ — эпиморфизм. Росток комплексного суперпространства M_A определим как подсуперпространство в $\mathbf{C}^{p|q}$, заданное в окрестности точки $0\in U\subset\mathbf{C}^{p|q}$ уравнениями $f_1=0, \ldots, f_n=0$, где $\{f_i\}$ — образующие идеала $\operatorname{Ker}\pi$ (в силу 1.2.4, он конечно порожден), голоморфные в U. Пусть $h: A\to B$ — морфизм локальных аналитических супералгебр $A=\mathbf{C}\{x_1, \ldots, x_p, \xi_1, \ldots, \xi_q\}/I$ и $B=\mathbf{C}\{y_1, \ldots, y_m, \eta_1, \ldots, \eta_n\}/J$. Поднимем элементы $h(\pi(x_i))$ и $h(\pi(\xi_j))$ супералгебры B до элементов b_i и β_j в $\mathbf{C}\{y_1, \ldots, y_m, \eta_1, \ldots, \eta_n\}$. Морфизм супералгебр $\mathbf{C}\{x, \xi\}\to\mathbf{C}\{y, \eta\}$: $x_i\mapsto b_i$ $\xi_j\mapsto\beta_j$ определяет морфизм ростков в нуле суперпространств $\mathbf{C}^{m|n}\to\mathbf{C}^{p|q}$, ограничение которого на

$M_B \subset \mathbf{C}^{m|n}$ отображает M_B в M_A, так как $g(b_1, \ldots, b_p, \beta_1, \ldots, \beta_q) = 0$ для любого $g \in I$.

Контравариантные функторы $M \mapsto \mathcal{O}_M$ и $A \mapsto M_A$ и задают двойственность категорий An и Alg. □

1.2.6. Ростки семейств. Морфизм суперпространств $f: X \to Y$ можно рассматривать как семейство суперпространств с параметрами из Y. Ростки семейств естественно возникают, когда мы интересуемся поведением слоев морфизма f в окрестности фиксированной точки базы Y. Более строго ростки морфизмов определяются как классы при очевидном отношении эквивалентности. Мы часто будем рассматривать ростки семейств как морфизмы над ростками суперпространств, то есть как суперпространства специального вида. Для этого в определении модельного комплексного суперпространства надо вместо супералгебр $\mathbf{C}\{x, \xi\}$ рассматривать супералгебры $A\{x, \xi\}$, где $A = \mathcal{O}_{Y, y}$ — локальное кольцо точки $y \in Y$, а склеивая из них глобальные объекты, требовать, чтобы все морфизмы были A-гомоморфизмами.

1.2.7. Касательные векторы. Пусть M — комплексное суперпространство, $\mathcal{O}_x = \mathcal{O}_{M,x}$ — локальное кольцо точки $x \in M$ и $\mathfrak{m}_x$ — его максимальный идеал. Касательным пространством к M в точке x называется суперпространство $\mathrm{T}_x M = \mathrm{Hom}(\mathfrak{m}_x/\mathfrak{m}_x^2, \mathbf{C})$. Размерностью M в точке x называется размерность векторного суперпространства $\mathrm{T}_x M$. Одноточечное суперпространство $\mathrm{D} = (\{*\}, \mathcal{O}_D)$, где $\mathcal{O}_D = \mathbf{C}[x, \xi]/(x^2, x\xi)$, олицетворяет в суперслучае идею касательного вектора. Более точно, D копредставляет функтор $\mathrm{T}: (M, m) \to \mathrm{T}_m M$ из категории комплексных суперпространств с отмеченной точкой в категорию Vect векторных суперпространств.

1.2.8. Предложение. Пусть M — комплексное суперпространство с отмеченной точкой $m \in M$. Множество морфизмов из суперпространства D в M, переводящих $*$ в m, наделяется естественной структурой векторного суперпространства над $\mathbf{C}$, относительно которой функторы $\mathrm{Mor}(\mathrm{D}, \cdot)$ и T из категории An в категорию Vect изоморфны.

Доказательство. Произвольный морфизм суперпространств $f: \mathrm{D} \to M$ определяется гомоморфизмом $f^{\#} \mathcal{O}_{M,m} \to \mathcal{O}_\mathrm{D}$ локальных супералгебр. Пусть $f_1^{\#}$ и $f_2^{\#}$ — два таких гомоморфизма, $\lambda_1, \lambda_2 \in \mathbf{C}$, $\mathfrak{m}_m$ и $\mathfrak{m}_\mathrm{D}$ — максимальные идеалы алгебр $\mathcal{O}_{M,m}$ и $\mathcal{O}_\mathrm{D}$. Проверим, что отображение $g: \mathcal{O}_{M,m} \to \mathcal{O}_\mathrm{D}: (k+a) \mapsto k + \lambda_1 f_1^{\#}(a) + \lambda_2 f_2^{\#}(a)$, $k \in \mathbf{C}$, $a \in \mathfrak{m}_m$ является гомоморфизмом супералгебр. Действительно, так как $f_i^{\#}(\mathfrak{m}_m) \cdot f_j^{\#}(\mathfrak{m}_m) \subset \mathfrak{m}_D^2 = 0$, то

$$g((k+a)(k'+a)) = g(kk' + (ka' + k'a + aa')) =$$

$$= kk' + k(\lambda_1 kf_1^{\#}(a') + \lambda_2 f_2^{\#}(a')) + k'(\lambda_1 f_1^{\#}(a) + \lambda_2 f_2^{\#}(a)) =$$

$$=(k+(\lambda_1 f_1^{\#}(a)+\lambda_2 f_2^{\#}(a)))\,(k'+(\lambda_1 f_1^{\#}(a')+\lambda_2 f_2^{\#}(a')))=$$
$$=g(k+a)\,g(k'+a').$$

Это вычисление, в частности, показывает, что произвольный четный гомоморфизм векторных суперпространств $h:\mathfrak{m}_m\to\mathfrak{m}_{\mathrm{D}}$, для которого $h(\mathfrak{m}_m^2)=0$, происходит из некоторого гомоморфизма локальных суперрлгебр $\mathcal{O}_{M,m}\to\mathcal{O}_{\mathrm{D}}$. Итак, для произвольного ростка (M, m) суперпространства $\mathrm{Mor}_{\mathrm{An}}(\mathrm{D}, M)$ и $\mathrm{Hom}_{\bar 0}(\mathfrak{m}_m/\mathfrak{m}_m^2, \mathfrak{m}_{\mathrm{D}})$ канонически изоморфны. Но четный гомоморфизм $h:\mathfrak{m}_m/\mathfrak{m}_m^2\to\to\mathfrak{m}_{\mathrm{D}}$ однозначно представляется в виде $a\mapsto f(a)\,\varepsilon+\varphi(a)\,\xi$, где ε и ξ — четная и нечетная образующие кольца $\mathcal{O}_{\mathrm{D}}=\mathbf{C}[x, \xi]/(x^2, x\xi)$, а f и φ, — соответственно, четный и нечетный элементы суперпространства $\mathrm{Hom}(\mathfrak{m}_m/\mathfrak{m}_m^2, \mathbf{C})=(\mathfrak{m}_m/\mathfrak{m}_m^2)^*$. В итоге, мы получили требуемый изоморфизм $\mathrm{Mor}(\mathrm{D}, M)$ и $\mathrm{T}M$. □

§ 1.3. КОГЕРЕНТНЫЕ ПУЧКИ НА СУПЕРПРОСТРАНСТВАХ

1.3.1. Определение. Пусть $(X, \mathcal{O}_X)$ — комплексное суперпространство. Пучок $\mathcal{O}_X$-модулей $\mathcal{F}$ называется когерентным, если у любой точки $x\in X$ существует окрестность U такая, что

(i) существует четный эпиморфизм пучков $\mathcal{O}|_U$-модулей $\mathcal{O}^{p|q}|_U\to\mathcal{F}|_U$ (то есть пучок $\mathcal{F}$ локально конечно порожден) и

(ii) для любого гомоморфизма $\mathcal{O}^{m|n}|_U\to\mathcal{F}|_U$ его ядро локально конечно порождено.

1.3.2. Предложение. Пучок $\mathcal{O}_X^{a|b}$ на комплексном суперпространстве $(X, \mathcal{O}_X)$ когерентен.

Доказательство. Достаточно доказать, что для любого открытого $U\subset X$ и любого четного гомоморфизма $\varphi:\mathcal{O}_X^{m|n}|_U\to\to\mathcal{O}_X^{a|b}|_U$ его ядро $\mathrm{Ker}\,\varphi$ — локально конечно порождено. Пусть $\mathcal{O}_X|_U=\mathcal{O}_{\bar 0}\oplus\mathcal{O}_{\bar 1}$ — разложение на четные и нечетные элементы. Рассматривая φ как гомоморфизм $\mathcal{O}_{\bar 0}$-модулей, представим $\mathrm{Ker}\,\varphi$ в виде прямой суммы двух подмодулей $\mathrm{Ker}\,\varphi_0\oplus\mathrm{Ker}\,\varphi_1$, где

$$\varphi_0:\mathcal{O}_{\bar 0}^m\oplus\mathcal{O}_{\bar 1}^n\to\mathcal{O}_{\bar 0}^a\oplus\mathcal{O}_{\bar 1}^b \quad\text{и}\quad \varphi_{\bar 1}:\mathcal{O}_{\bar 1}^n\oplus\mathcal{O}_{\bar 0}^m\to\mathcal{O}_{\bar 0}^b\oplus\mathcal{O}_{\bar 1}^a$$

— однородные составляющие гомоморфизма φ.

Пучок $\mathcal{O}_{\bar 1}$ на комплексном пространстве $(U, \mathcal{O}_{\bar 0})$ когерентен, в силу предложения 1.1.3, а $\mathcal{O}_{\bar 0}$ — когерентен по теореме Ока. Таким образом, пучок $\mathrm{Ker}\,\varphi_i$ является ядром гомоморфизма когерентных $\mathcal{O}_{\bar 0}$-модулей и, следовательно, (см., например, [6]), локально конечно порожден. Заменяя при необходимости U меньшим открытым множеством, найдем два эпиморфизма $\mathcal{O}_{\bar 0}^p\to\mathrm{Ker}\,\varphi_{\bar 0}$ и $\mathcal{O}_{\bar 0}^q\to\mathrm{Ker}\,\varphi_{\bar 1}$. Если сечения $a_1,\ldots,a_p$ порождают $\mathrm{Ker}\,\varphi_0$, а $b_1,\ldots,b_q$ — порождают $\mathrm{Ker}\,\varphi_1$, то объединение наборов сечений

a_i, b_j порождает $\operatorname{Ker}\varphi$ как $\mathcal{O}_X|_U$-модуль. Учитывая, что a_i — четные, а b_j — нечетные образующие, мы получаем требуемый эпиморфизм $\mathcal{O}_X^{p|q}|_U \to \operatorname{Ker}\varphi$. □

Из когерентности пучков $\mathcal{O}_X^{a|b}$ стандартными рассуждениями (см., например, [6]) выводится, что условие (*ii*) в определении когерентности можно заменить более слабым.

1.3.3. Следствие. Пучок $\mathcal{O}_X$-модулей $\mathcal{F}$ на комплексном суперпространстве $(X, \mathcal{O}_X)$ когерентен тогда и только тогда, когда у любой точки $x \in X$ найдется окрестность U, над которой пучок $\mathcal{F}|_U$ изоморфен коядру четного гомоморфизма свободных конечно порожденных $\mathcal{O}_X|_U$-модулей. □

Пользуясь таким определением когерентности, мы легко можем перенести на суперпространства известные свойства когерентных аналитических пучков на комплексных пространствах (см. [6]). В частности, когерентные пучки на комплексном суперпространстве X образуют абелеву категорию, которую мы будем обозначать $\mathfrak{Coh}_X$.

Выведем еще несколько результатов, для которых нет аналогов в чисто четном случае.

1.3.4. Лемма. Пусть $(X, \mathcal{O}_X)$ — комплексное суперпространство. Тогда $\mathcal{O}_{\mathrm{rd}}$ — структурный пучок четного подпространства X_{rd} — когерентен.

Доказательство. По определению пучка $\mathcal{O}_{\mathrm{rd}}$, имеем точную последовательность $0 \to \mathcal{O}_{X,1} + \mathcal{O}_{X,1}^2 \to \mathcal{O}_X \to \mathcal{O}_{\mathrm{rd}} \to 0$. Поэтому достаточно доказать локальную конечную порожденность пучка $\mathcal{O}_{X,\bar{1}} + \mathcal{O}_{X,1}^2$. Но пучок $\mathcal{O}_{X,\bar{1}}$ конечно порожден как модуль над $\mathcal{O}_{X,\bar{0}}$. Пусть $x \in X$ и в окрестности $U \ni x$ определены сечения $\varphi_1, \ldots, \varphi_q$, порождающие $\mathcal{O}_{X,\bar{1}}|_U$ над $\mathcal{O}_{X,\bar{0}}|_U$. Тогда набор $\{\varphi_i, \varphi_j\varphi_k \mid i, j, k = 1, \ldots, q\}$ порождает $(\mathcal{O}_{X,\bar{1}} + \mathcal{O}_{X,\bar{1}}^2)|_U$ над $\mathcal{O}_{X,\bar{0}}|_U$ и, следовательно, над $\mathcal{O}_X|_U$. □

1.3.5. Критерий когерентности. С каждым пучком $\mathcal{F}$ на суперпространстве $(X, \mathcal{O}_X)$ связан пучок $\mathcal{O}_{\mathrm{rd}}$-модулей $\operatorname{Gr}\mathcal{F} = \bigoplus_k F_k$, где $F_k = J^k\mathcal{F}/J^{k+1}\mathcal{F}$, $J = \mathcal{O}_{X,\bar{1}} + \mathcal{O}_{X,1}^2$. Следующий результат связывает понятия когерентности на суперпространствах $(X, \mathcal{O}_X)$, $(X, \mathcal{O}_{X,\bar{0}})$ и $(X, \mathcal{O}_{\mathrm{rd}})$.

Предложение. Пусть $\mathcal{F}$ — пучок $\mathcal{O}_X$-модулей на комплексном суперпространстве $(X, \mathcal{O}_X)$. Тогда следующие условия эквивалентны:

(*i*) $\mathcal{F}$ — когерентный $\mathcal{O}_X$-модуль;

(*ii*) $\mathcal{F}$ — когерентный $\mathcal{O}_{X,\bar{0}}$-модуль;

(*iii*) $\operatorname{Gr}\mathcal{F}$ — когерентный $\mathcal{O}_{\mathrm{rd}}$-модуль.

Доказательство. Обозначим окольцованные пространства $(X, \mathcal{O}_X)$, $(X, \mathcal{O}_{\bar{0}})$ и $(X, \mathcal{O}_{\mathrm{rd}})$ через X, X_0 и X_{rd} соответственно.

Канонические вложения $j: X_{\mathrm{rd}} \to X$, $j_0: X_{\mathrm{rd}} \to X_0$ и проекция $\pi: X \to X_0$ образуют коммутативную диаграмму

$$\begin{tikzcd} & X \arrow[d, "\pi"] \\ X_{rd} \arrow[ur, "j"] \arrow[r, "j_0"'] & X_0 \end{tikzcd}$$

Пучок идеалов $J = \mathcal{O}_{X,\bar{1}} + \mathcal{O}^2_{X,\bar{1}}$ является пучком локальных уравнений замкнутого подсуперпространства X_{rd} в X и поэтому когерентен как $\mathcal{O}_X$-модуль. Аналогично мы получаем когерентность пучка J^{k+1}, $k \geqslant 0$, задающего вложение k-й инфинитезимальной окрестности $X^{(k)}_{\mathrm{rd}}$ в X. Если $\mathcal{F}$ — когерентный пучок на X, то $J^{k+1}\mathcal{F}$ тоже когерентен как ядро эпиморфизма когерентных пучков $\mathcal{F} \to \mathcal{F}/J^{k+1}\mathcal{F}$, а $j^{(k)*}\mathcal{F}$, где $j^{(k)}: X^{(k)}_{\mathrm{rd}} \hookrightarrow X$ — замкнутое вложение. Поэтому пучки $J^k\mathcal{F}/J^{k+1}\mathcal{F}$ — когерентные $\mathcal{O}_X$-модули. Но F_k является $\mathcal{O}_{\mathrm{rd}}$-модулем, изоморфным $j^*(J^k\mathcal{F}/J^{k+1}\mathcal{F})$ и потому когерентным. Итак, из (i) следует (iii).

По определению комплексного суперпространства, проекция $\pi: X \to X_0$ является конечным морфизмом. Известное свойство сохранения когерентности прямого образа для конечных морфизмов в применении к $\mathcal{F}$ дает когерентность $\pi_*\mathcal{F}$, то есть пучка $\mathcal{F}$, рассматриваемого как $\mathcal{O}_0$-модуль. Этим установлена импликация $(i) \Rightarrow (ii)$.

Если теперь $\mathcal{F}$ — когерентный $\mathcal{O}_{\bar{0}}$-модуль, то возьмем эпиморфизм $\mathcal{O}^A_{\bar{0}}|_U \to \mathcal{F}|_U$, определенный в некоторой окрестности U точки $x \in X$. Уменьшив, если потребуется U, выберем сечения $f_1, f_2, \ldots, f_{a_1}, \varphi_1, \ldots, \varphi_{a_2}$, порождающие $\mathcal{F}|_U$ над $\mathcal{O}_{\bar{0}}|_U$. Тогда они порождают $\mathcal{F}|_U$ и над $\mathcal{O}_X|_U$. Пусть K — ядро полученного гомоморфизма $\mathcal{O}^A_X|_U \to \mathcal{F}|_U$-модулей. Пучок K — когерентный $\mathcal{O}_{\bar{0}}|_U$-модуль, так как $\mathcal{O}_X|_U$ и $\mathcal{F}|_U$ когерентны. Тогда, еще раз уменьшив U, можно найти эпиморфизм $\mathcal{O}^B_0|_U \to K$ и продолжить его до эпиморфизма $\mathcal{O}_X|_U$-модулей $\mathcal{O}^B_X|_U \to K$ (при этом, возможно, снова придется сузить окрестность U). Точность последовательности $\mathcal{O}^B_X|_U \to \mathcal{O}^A_X|_U \to \mathcal{F} \to 0$ доказывает импликацию $(ii) \Rightarrow (i)$.

Осталось доказать, что (iii) влечет (i). Индукцией по k докажем, что пучок $\mathcal{O}_X$-модулей $\mathcal{F}/J^k\mathcal{F}$ когерентен. Для $k=1$ это верно в силу того, что $j_*F_0 = \mathcal{F}/J\mathcal{F}$. Пусть $\mathcal{F}/J^k\mathcal{F}$ когерентен, тогда из точности последовательности $\mathcal{O}_X$-модулей $0 \to J^k\mathcal{F}/J^{k+1}\mathcal{F} \to \mathcal{F}/J^{k+1} \to \mathcal{F}/J^k \to 0$ и когерентности ее крайних членов (слева стоит пучок j_*F_k) следует когерентность $\mathcal{F}/J^{k+1}\mathcal{F}$. Любая точка $x \in X$ имеет окрестность U, в которой $J|_U$ порождается конечным числом нечетных сечений

$\varphi_1, \ldots, \varphi_q$. Но тогда $J^{q+1}|_U=0$ и $(\mathcal{F}/J^{q+1}\mathcal{F})|_U=\mathcal{F}|_U$ в меньшей окрестности точки x изоморфен коядру эпиморфизма свободных модулей. □

1.3.6. Теоремы конечности. Следующее предложение обобщает классическую теорему Грауэрта о когерентности высших прямых образов.

Предложение. Пусть $f:(X,\mathcal{O}_X)\to(Y,\mathcal{O}_Y)$ — собственный *морфизм комплексных суперпространств, $\mathcal{F}$ — когерентный пучок* $\mathcal{O}_X$-*модулей. Тогда пучки* $\mathcal{O}_Y$-*модулей* $R^i f_*(\mathcal{F})$ *когерентны.*

Доказательство. Гомоморфизм $f^\#:\mathcal{O}_Y\to f_*\mathcal{O}_X$ сохраняет градуировку в супералгебрах и поэтому переводит $\mathcal{O}_{Y,\bar{0}}$ в $f_*\mathcal{O}_{X,\bar{0}}$. Это означает, что существует морфизм $f_0:(X,\mathcal{O}_{X,\bar{0}})\to(Y,\mathcal{O}_{Y,\bar{0}})$, для которого коммутативна диаграмма

$$\begin{array}{ccc} X & \xrightarrow{f} & Y \\ {\scriptstyle \pi_X}\downarrow & & \downarrow{\scriptstyle \pi_Y} \\ X_0 & \xrightarrow[f_0]{} & Y_0 \end{array}.$$

Морфизмы π_X и π_Y конечны, поэтому $R^i\pi_{X_*}(\mathcal{F})=0$ и $R^i\pi_{Y_*}(\mathfrak{G})=0$ для любых $\mathcal{F}\in\mathrm{Coh}_X$, $\mathfrak{G}\in\mathrm{Coh}_Y$ и $i\geqslant 1$. Тогда из спектральной последовательности для композиций $\pi_Y\circ f=f_0\circ\pi_X$ получаем, что $\pi_{Y_*}(R^i f_*\mathcal{F})=R^i f_{0*}(\pi_{X_*}\mathcal{F})$. Дважды применяя критерий когерентности 1.4.5 и один раз обычную теорему о высших прямых образах [28], получаем последовательно, что пучки $\pi_{X_*}\mathcal{F}$, $\pi_{Y*}(R^i f_*\mathcal{F})$ и, наконец, $R^i f_*\mathcal{F}$ когерентны. □

В случае, когда X компактно, а Y — точка, получаем важное утверждение о конечности.

1.3.7. Следствие. *Группы когомологий когерентного пучка модулей на компактном комплексном суперпространстве конечномерны.*

1.3.8. Суперпространства Штейна. Комплексное суперпространство $(X,\mathcal{O}_X)$ мы будем называть суперпространством Штейна, если комплексное пространство X_{rd} является пространством Штейна.

Для штейновых суперпространств справедливы аналоги классических теорем А и В Картана [6].

1.3.9. Предложение. *Пусть* $(X,\mathcal{O}_X)$ — *суперпространство Штейна,* $\mathcal{F}$ — *когерентный пучок* $\mathcal{O}_X$-*модулей. Тогда* $H^i(X,\mathcal{F})=0$ *для любого* $i>0$ *и пучок* $\mathcal{F}$ *порождается своими глобальными сечениями.*

Доказательство. Пучок $\mathcal{F}$, рассматриваемый как $\mathcal{O}_0$-модуль, когерентен по 1.3.5. Применяя теорему В к комплексному пространству $(X,\mathcal{O}_0)$ с пучком $\mathcal{F}$, получаем $H^i(X,\mathcal{F})=0$ при $i>0$. Из теоремы А следует существование сечений $f_1,\ldots,f_p,\ \varphi_1,\ldots,\varphi_q\in H^0(X,\mathcal{F})$, порождающих $\mathcal{F}$ над $\mathcal{O}_0$. Но тогда эти же сечения порождают его и над пучком $\mathcal{O}_X$. □

1.3.10. Штейновы компакты. Подсуперпространство комплексного суперпространства называется *штейновым компактом*, если оно компактно и имеет базис окрестностей, состоящих из пространств Штейна. Любое комплексное суперпространство можно покрыть штейновыми компактами. Такие покрытия полезны из-за следующего факта.

Предложение. Пусть $(Y, \mathcal{O}_Y)$ — штейновый компакт в комплексном суперпространстве $(X, \mathcal{O}_X)$, $\mathcal{O}_Y = \mathcal{O}_X|_Y$, $\mathcal{F}$ — когерентный $\mathcal{O}_X$-модуль $\mathcal{F}_Y = \mathcal{F}|_Y$. Тогда

(*i*) супералгебра $H^0(Y, \mathcal{O}_Y)$ нётерова.

(*ii*) $H^0(Y, \mathcal{F}_Y)$ — нётеров $H^0(Y, \mathcal{O}_Y)$-модуль.

(*iii*) $H^i(Y, \mathcal{F}_Y) = 0$ при $i > 0$.

Доказательство. Утверждение (*iii*) непосредственно следует из 1.3.9, а (*i*) и (*ii*) получаются индукцией по максимальной степени идеала J, порожденного нечетными переменными из соответствующих чисто четных результатов и точной последовательности $\mathcal{O}_Y$-модулей

$$0 \to J^{k-1}\mathcal{F}_Y/J^k\mathcal{F}_Y \to \mathcal{F}_Y/J^k\mathcal{F}_Y \to \mathcal{F}_Y/J^{k-1}\mathcal{F}_Y \to 0. \ \square$$

§ 1.4. ПЛОСКИЕ ПУЧКИ И МОРФИЗМЫ

Определение плоских модулей, пучков и морфизмов и доказательства их основных свойств переносятся на суперслучай без каких-либо изменений. Поэтому мы просто перечислим факты, которые будут использованы в дальнейшем.

1.4.1. Модуль M над суперкоммутативным кольцом A называется *плоским*, если функтор $\otimes M$ точен в категории A-модулей. Пусть $f: (X, \mathcal{O}_X) \to (Y, \mathcal{O}_Y)$ — морфизм суперпространств. Пучок $\mathcal{O}_X$-модулей $\mathcal{F}$ на X называется *плоским* над точкой $y \in Y$, если для любой точки $x \in f^{-1}(y)$ слой $\mathcal{F}_x$ является плоским $\mathcal{O}_{Y,y}$-модулем. Пучок $\mathcal{F}$ называется плоским над Y, если он плоский над любой точкой $y \in Y$. Морфизм f называется *плоским*, если $\mathcal{O}_X$ — плоский пучок над Y.

1.4.2. Пусть $f: (X, \mathcal{O}_X) \to (Y, \mathcal{O}_Y)$ — морфизм комплексных суперпространств, $\mathcal{F}$ — когерентный $\mathcal{O}_X$-модуль. Доказательства следующих результатов аналогичны чисто четному случаю [1], [17], [23], [27].

1. Пусть $\mathcal{F}$ — плоский над Y, $g: (Y', \mathcal{O}_{Y'}) \to (Y, \mathcal{O}_Y)$ произвольный морфизм. Тогда индуцированный на $X' := X \times_Y Y'$ пучок $\mathcal{F}'_{Y'} := p_1^* \mathcal{F}$ является плоским над Y'.

2. Множество точек $x \in X$, таких что $\mathcal{F}_x$ не плоский над $f(x)$, является аналитическим подмножеством в X.

3. Существует комплексное суперпространство Z и морфизм $g: Z \to Y$ такие, что $\mathcal{F}_Z$ — плоский над Z пучок $\mathcal{O}_{X \times_Y Z}$-модулей и любой морфизм $g': Y' \to Y$, для которого пучок $\mathcal{F}_{Y'}$ является плоским над Y', однозначно пропускается через морфизм $g: Z \to Y$.

4. Если $\mathcal{F}$ имеет собственный над Y носитель, является

плоским над $y \in Y$, а его ограничение на слой $f^{-1}(y)$ локально свободно, то существует окрестность $U \ni y$, для которой пучок $\mathcal{F}|_{f^{-1}(U)}$ локально свободен.

5. Если морфизм f собственный и плоский, а его слой над точкой $y \in Y$ гладкий (т. е. изоморфен супермногообразию), то и над некоторой окрестностью точки y морфизм f является гладким.

1.4.3. Пусть A — локальная аналитическая суперкоммутативная алгебра, $M^\cdot = \ldots \to M^{i+1} \to M^i \to \ldots \to M^1 \to M^0 \to 0$ — комплекс плоских A-модулей, тогда он точен тогда и только тогда, когда точен комплекс $\ldots \to M^i/\mathfrak{m}M^i \to \ldots \to M^1/\mathfrak{m}M^1 \to \to M^0/\mathfrak{m}M^0 \to 0$, где $\mathfrak{m}$ — максимальный идеал A. В частности, гомоморфизм $L \to M$ плоских A-модулей является изоморфизмом тогда и только тогда, когда является изоморфизмом индуцированный гомоморфизм векторных суперпространств $L/\mathfrak{m}L \to M/\mathfrak{m}M$.

§ 1.5. ДВОЙСТВЕННОСТЬ И ЗАМЕНА БАЗЫ

1.5.1. Предложение. Пусть X — комплексное суперпространство, обозначим через D_X^b производную категорию когерентных $\mathcal{O}_X$-модулей. Существует единственный с точностью до квазиизоморфизма комплекс $K_X \in D_X^b$, такой что для любого пучка $\mathcal{F} \in \mathrm{Coh}_X$ с компактным носителем пространства $H^i(X; \mathcal{F})^*$ и $\mathrm{Ext}^{-i}(X; \mathcal{F}, K_X)$ канонически изоморфны. Кроме того, функтор $D_X := \mathrm{R\,Hom}(\cdot, K_X)$ из D_X^b в D_X^b является инволютивной автоэквивалентностью категории D_X^b. Если $f: X \to Y$ — собственный морфизм комплексных суперпространств, то имеет место относительная двойственность:

$$\mathrm{R}f_* \mathrm{R\,Hom}(X; \mathcal{F}; K_X) \simeq \mathrm{R\,Hom}(Y; \mathrm{R}f_* \mathcal{F}, K_Y),$$

для любого $\mathcal{F}^\cdot \in D_X$.

Доказательство. Функтор двойственности можно сначала построить локально, определяя дуализирующий комплекс над штейновой областью U образ как пучка K_U в D_X^b, где $K_U V) := \Gamma_c(V; \mathcal{O}_X)^*$. Из локальной двойственности следует, во-первых, единственность комплексов K_U с точностью до квазиизоморфизма, в силу чего они согласованы на пересечениях, а во-вторых, что $\mathrm{Ext}^i(U; K_U, K_U) = 0$ при $i < 0$.

Поэтому (см. [20]) комплексы K_U можно склеить, получив комплекс $K_X^\cdot \in D_X^b$.

Повторяя конструкцию, основанную на использовании комплекса Кузена [31], [33], можно построить комплекс $K_X^\cdot$ каноническим образом (а не с точностью до квазиизоморфизма). □

1.5.2. Послойные Ext. Пусть $f: X \to Y$ — морфизм комплексных суперпространств, $\mathcal{F}$ и $\mathcal{L}$ — когерентные $\mathcal{O}_X$-модули. Пучок

$\mathrm{Ext}^i_Y(f; \mathscr{F}, \mathscr{L})$ — это пучок, ассоциированный с предпучком $U \mapsto \mathrm{Ext}_X(V; \mathscr{F}|_V, \mathscr{L}|_V)$, где U — открытое подмножество в Y, а $V = f^{-1}(U)$. По другому, $\mathrm{Ext}^i_Y(f; \mathscr{F}, \cdot)$ — это правые производные функтора $f_* \mathrm{Hom}(X; \mathscr{F}, \cdot)$. Спектральная последовательность для композиции функторов в этом случае дает $\mathrm{R}^p f_* \mathrm{Ext}^q_X(\mathscr{F}, \mathscr{L}) \Rightarrow \mathrm{Ext}^{p+q}_Y(f; \mathscr{F}, \mathscr{L})$, откуда (по 1.3.8) пучки $\mathrm{Ext}^i_Y(f; \mathscr{F}, \mathscr{L})$ когерентны.

При замене базы $g: Z \to Y$ возникает естественный гомоморфизм $\mathcal{O}_Y$-модулей $g^{\#}: \mathrm{Ext}^i_Y(f; \mathscr{F}, \mathscr{L}) \to \mathrm{Ext}^i_Z(f_Z; \mathscr{F}_Z, \mathscr{L}_Z)$, где f_Z — проекция $X_Z := X \times_Y Z$ на второй сомножитель, $\mathscr{F}_Z = p_1^* \mathscr{F}$, $\mathscr{L}_Z = p_1^* \mathscr{L}$. Поэтому при фиксированных $\mathscr{F}$ и $\mathscr{L}$ мы получаем функтор на категории суперпространств над Y. Во многих задачах бывает полезно научиться вычислять этот функтор. В случае, когда один из пучков $\mathscr{F}$ или $\mathscr{L}$ плоский над Y, а пересечение их носителей собственно, это можно сделать с помощью следующего результата Фленнера [25].

1.5.3. Предложение. Пусть $f: X \to Y$ — морфизм комплексных суперпространств, $\mathscr{F}$ и $\mathscr{L}$ — когерентные пучки на X, один из которых плоский над Y, а $\operatorname{supp} \mathscr{F} \cap \operatorname{supp} \mathscr{L}$ собственно. Тогда существует локально по Y ограниченный справа комплекс $M^{\cdot}$ свободных конечно порожденных $\mathcal{O}_Y$-модулей такой, что для любого морфизма $g: Z \to Y$ суперпространств существует функториальный по g изоморфизм $\mathcal{O}_Z$-модулей $\mathrm{Ext}^i(f_Z; \mathscr{F}_Z, \mathscr{L}_Z)$ и $\mathrm{H}^i(M^{\cdot} \otimes_{\mathcal{O}_Y} \mathcal{O}_Z)$.

Доказательство. Рассмотрим функтор $\mathrm{L} f_{\#} := \mathrm{D}_Y \mathrm{R} f_* \mathrm{R}\,\mathrm{Hom}_X(\cdot, \mathscr{L} \otimes f^*(\mathrm{K}_Y))$ из D^-_X в D^-_Y. Из свойств двойственности следует, что он перестановочен с заменой базы $g: Z \to Y$: $\mathrm{L}g^* \mathrm{L} f_{\#} \simeq \mathrm{L} f_{\#} \cdot \mathrm{L}g^*$ и для любых $\mathscr{F}^{\cdot} \in \mathrm{D}^-_X$ и $N^{\cdot} \in \mathrm{D}^+_Y$ $\mathrm{R} f_* \mathrm{R}\,\mathrm{Hom}_X(\mathscr{F}; \mathscr{L} \otimes f^*(N^{\cdot})) \simeq \mathrm{R}\,\mathrm{Hom}_Y(\mathrm{L} f_{\#}(\mathscr{F}^{\cdot}), N^{\cdot})$. Поэтому в случае плоского $\mathscr{L}$ и $N^{\cdot} = \mathcal{O}_Y$ получаем функториально по $g: \mathrm{Ext}^i(f_Z; \mathscr{F}_Z, \mathscr{L}_Z) \simeq \mathrm{Ext}^i_Z(\mathrm{L}^{\cdot}_Z, \mathcal{O}_Z) = \mathrm{H}^i(M^{\cdot}_Z)$, где $\mathrm{L}^{\cdot} := \mathrm{L} f_{\#}(\mathscr{F})$, $M^{\cdot} := \mathrm{Hom}_Y(L^{\cdot}, \mathcal{O}_Y)$. Используя покрытие Y штейновыми компактами (см. 1.3.10), можно локально по Y заменить комплекс $M^{\cdot}$ с когерентными когомологиями комплексом свободных конечных $\mathcal{O}_Y$-модулей. □

Глава 2

ДЕФОРМАЦИИ

В этой главе мы определим деформации различных структур на комплексных суперпространствах, таких как комплексная структура на супермногообразии, векторное расслоение на супермногообразии, росток суперпространства и т. д. Во всех перечисленных случаях (и во многих других) существует версальная деформация. Формулировки соответствующих результатов без изменений переносятся с чисто четной ситуации, но их доказательства (которым посвящена глава 4) совсем иные.

Здесь же доказывается важная для приложений теорема о существовании версальной деформации элемента группы $\operatorname{Ext}(X;\ \mathcal{F},\ \mathcal{L})$, а также рассматривается несколько примеров деформаций структур, не имеющих чисто четных аналогов.

§ 2.1. ДЕФОРМАЦИИ КОМПЛЕКСНЫХ СТРУКТУР

2.1.1. Деформации суперпространств. Следующее определение принадлежит Гротендику. Пусть $(X, \mathcal{O}_X)$ — комплексное суперпространство, S — росток суперпространства с отмеченной точкой $s \in S$. *Деформацией комплексного суперпространства* X с базой S называется тройка $(\mathscr{X}, \pi, i)$, где $\pi : \mathscr{X} \to S$ — плоский морфизм, а $i : X \to \mathscr{X}$ — вложение, отождествляющее X со слоем $\pi^{-1}(s)$. Этот набор данных удобно изображать в виде декартова квадрата

$$\begin{tikzcd} X \arrow[r, hook, "i"] \arrow[d] & \mathscr{X} \arrow[d, "\pi"] \\ * \arrow[r] & S, s \end{tikzcd}$$

Пусть $(\mathscr{X}, \pi, i)$ и $(\mathscr{X}', \pi', i')$ — две деформации суперпространства X с базами S и S' соответственно. Морфизм деформаций — это пара морфизмов $f : \mathscr{X} \to \mathscr{X}'$ и $\varphi : S \to S'$ такая, что следующая диаграмма коммутативна

$$\begin{tikzcd} \mathscr{X} \arrow[rr, "f"] \arrow[dd] & & \mathscr{X}' \arrow[dd] \\ & X \arrow[ul, "i"'] \arrow[ur, "i'"] \arrow[dd] & \\ S, s \arrow[rr, "\varphi"] & & S', s' \\ & \{*\} \arrow[ul] \arrow[ur] & \end{tikzcd}$$

В дальнейшем, говоря о деформации, мы будем указывать только морфизм π.

Деформация суперпространства X с базой S называется *тривиальной*, если она изоморфна деформации

$$\begin{tikzcd} X \arrow[r, hook] \arrow[d] & X \times S \arrow[d] \\ * \arrow[r] & S \end{tikzcd}$$

Пусть $\varphi : S' \to S$ — морфизм ростков, тогда проекция $\pi' : \mathscr{X} \times_S S' \to S'$ является плоским морфизмом по 1.4, слой которого над s' совпадает со слоем π над s, то есть с X. Таким образом, мы получили деформацию суперпространства X над ростком S'. Она называется деформацией, *индуцированной* из деформации π при помощи морфизма φ и обозначается $\varphi^*\pi$.

Деформация π с базой S называется *полной*, если любая другая деформация суперпространства X с базой S' изоморфна деформации, индуцированной из π при помощи некоторого отображения баз $\varphi : S' \to S$. Деформация π называется *универсальной*, если морфизм φ единствен, и версальной, если все такие морфизмы имеют один и тот же дифференциал $d\varphi : \mathrm{T}_0 S' \to \mathrm{T}_0 S$.

Деформация с базой D, где $\mathrm{D} = \{*, \mathbf{C}[x, \xi]/(x^2, x\xi)\}$ — «супервектор» (см. 1.2.7), называется *инфинитезимальной*. Пусть $\mathrm{Def}(\mathrm{D})$ — множество всех (с точностью до изоморфизма) инфинитезимальных деформаций X. Как мы увидим в главе 4, множество инфинитезимальных деформаций наделяется естественной структурой векторного суперпространства. Произвольная деформация π над S задает отображение $\mathrm{ks} : \mathrm{T}_0 S \to \mathrm{Def}(D)$, которое называется *отображением Кодаиры—Спенсера*. Отображение Кодаиры—Спенсера определяется следующим образом. Элемент $v \in \mathrm{T}_0 S$ можно, по 1.2.8, рассматривать как морфизм ростков $\mathrm{D} \to S$. Индуцированная этим морфизмом инфинитезимальная деформация $v^*\pi$ — это и есть образ v при отображении Кодаиры—Спенсера.

Пусть X — росток комплексного суперпространства. Деформация X с базой S — это плоский над S морфизм ростков $\mathscr{X} \to S$, слой которого над $s_0 \in S$ отождествлен с X. Все приведенные выше определения дословно переносятся на случай ростков. Вопрос о существовании версальных деформаций суперпространств и ростков решается следующей теоремой, доказательство которой приводится в главе 4. Напомним, что через $\mathrm{T}^{\bullet}_X$ обозначается касательный комплекс X.

2.1.2. Теорема. Пусть X — компактное комплексное суперпространство или росток комплексного суперпространства, для которого суперпространство $\mathrm{H}^1(\mathrm{T}^{\bullet}_X)$ конечномерно. Тогда

(*i*) суперпространство инфинитезимальных деформаций X изоморфно $\mathrm{H}^1(\mathrm{T}^{\bullet}_X)$;

(*ii*) у X существует версальная деформация, база S которой имеет размерность $a|b = \dim \mathrm{H}^1(\mathrm{T}^{\bullet}_X)$;

(*iii*) если $\mathrm{H}^2(\mathrm{T}^{\bullet}_X) = 0$, то S — росток супермногообразия $\mathbf{C}^{a|b}$.

Если X — компактное супермногообразие, то, по 1.4.2, деформация его в категории суперпространств является гладким морфизмом, а касательный комплекс $\mathrm{T}^{\bullet}_X$ квазиизоморфен пучку векторных полей $\mathscr{T}_X$. Получаем такой результат.

Следствие. Компактное супермногообразие X имеет версальную деформацию, размерность базы S которой равна $\dim H^1(X; \mathcal{T}_X)$. Если $H^2(X; \mathcal{T}_X)=0$, то S — росток супермногообразия.

2.1.3. Деформации подсуперпространств. *Деформацией замкнутого подсуперпространства* Y комплексного суперпространства X с базой S называется замкнутое подсуперпространство $\mathcal{Y}\subset X\times S$ такое, что ограничение π проекции $X\times S\to S$ на $\mathcal{Y}$ плоско над S и слой $\pi^{-1}(s)\subset X\times\{s\}$ совпадает с $Y\times\{s\}$.

Морфизмом деформаций $(\mathcal{Y}, S)\to(\mathcal{Y}', S')$ подсуперпространства $Y\subset X$ называется пара морфизмов $f:\mathcal{Y}\to\mathcal{Y}'$ и $\varphi: S\to S'$ таких, что коммутативна диаграмма

$$\begin{tikzcd}
 & X\times S \arrow[rr, "id\times\varphi"] \arrow[dd] & & X\times S' \arrow[dd] \\
\mathcal{Y} \arrow[ur, hook] \arrow[rr, "f"] \arrow[dr, "\pi"'] & & \mathcal{Y}' \arrow[ur, hook] \arrow[dr, "\pi'"] & \\
 & S,s \arrow[rr, "\varphi"] & & S',s'
\end{tikzcd}$$

Индуцирование, полнота, версальность и отображение Кодаиры—Спенсера определяются аналогично деформациям суперпространств.

Следующая теорема, доказываемая в гл. 4, является обобщением на суперслучай теоремы Дуади [22].

2.1.4. Теорема. Пусть Y — компактное подсуперпространство комплексного суперпространства X, выделяемое пучком идеалов $I\subset\mathcal{O}_X$. Тогда

(i) суперпространство инфинитезимальных деформаций Y в X изоморфно $\mathrm{Hom}_Y(I/I^2, \mathcal{O}_Y)$;

(ii) существует универсальная деформация Y в X, база которой имеет размерность $a|b=\dim \mathrm{Hom}_Y(I/I^2, \mathcal{O}_Y)$;

(iii) если $\mathrm{Ext}_Y^1(I/I^2, \mathcal{O}_Y=0$, то S — росток супермногообразия $\mathbb{C}^{a|b}$.

В случае, когда X — супермногообразие, а Y — компактное подсупермногообразие, $\mathrm{Hom}_Y(I/I^2, \mathcal{O}_Y)$ и $\mathrm{Ext}_Y^1(I/I^2, \mathcal{O}_Y)$ можно заменить соответственно на $H^0(Y; N_{Y/X})$ и $H^1(X; N_{Y/X})$, где $N_{Y/X} := \mathcal{T}_X|_Y/\mathcal{T}_Y$ — нормальный пучок Y в X.

2.1.5. Деформации пучков. Пусть X — комплексное суперпространство, S — росток комплексного суперпространства.

Деформацией когерентного пучка F на X с базой S называется пара $(\mathcal{F}, \alpha)$, где $\mathcal{F}$ — когерентный S-плоский пучок на $X\times S$, а α — изоморфизм между F и слоем $\mathcal{F}_s=i^*\mathcal{F}$ над S', $s\in S$, $i: X\hookrightarrow X\times S$ — стандартное вложение X в качестве слоя над s.

Морфизм $(\mathcal{F}, S)\to(\mathcal{F}', S')$ двух деформаций пучка F состоит из морфизма ростков $\varphi:(S, s)\to(S', s')$ и гомоморфизма $f:\mathcal{F}\to(id_X\times\varphi)^*\mathcal{F}'$ пучков на $X\times S$, согласованного с изоморфизмами $\alpha: F\xrightarrow{\sim}\mathcal{F}_s$ и $\alpha': F\xrightarrow{\sim}\mathcal{F}'_{s'}$.

Деформация $(\mathcal{F}, S)$ называется *тривиальной,* если она изоморфна деформации $(p_1{}^*F, S)$, где $p_1: X\times S\to X$ — проекция на первый сомножитель. Если $(\mathcal{F}, S)$ — деформация когерентного пучка F, а $\varphi: S'\to S$ — произвольный морфизм ростков, то пучок $\mathcal{F}' := (id_X\times\varphi)^*\mathcal{F}$ на $X\times S'$ является когерентным и плоским над S' (по 1.4.2), а его слой над s_0' совпадает с F. Таким образом, $\mathcal{F}'$ представляет собой деформацию пучка F с базой S', которую мы будем называть индуцированной с помощью морфизма φ. Полнота, версальность и отображение Кодаиры—Спенсера определяются теперь стандартным образом.

В главе 4 мы построим версальную деформацию, обобщив чисто четный результат Сиу и Траутманна [37].

2.1.6. Теорема. Пусть $\mathcal{F}$ — когерентный пучок с компактным носителем на комплексном суперпространстве X. Тогда

(*i*) суперпространство инфинитезимальных деформаций $\mathcal{F}$ изоморфно $\mathrm{Ext}^1_X(\mathcal{F}, \mathcal{F})$;

(*ii*) существует версальная деформация $\mathcal{F}$ на X, база S которой имеет размерность $a|b = \dim \mathrm{Ext}^2_X(\mathcal{F}, \mathcal{F})$;

(*iii*) если $\mathrm{Ext}_X{}^2(\mathcal{F}, \mathcal{F}) = 0$, то S — росток супермногообразия $\mathbf{C}^{a|b}$.

Если пучок $\mathcal{F}$ локально свободен, а X компактно, то близкие к $\mathcal{F}$ слои любой его деформации тоже локально свободны. В этом случае $\mathrm{Ext}^i_X(\mathcal{F}, \mathcal{F}) = H^i(X; \mathrm{End}\,\mathcal{F})$, и мы можем переписать теорему 2.1.6 для векторных расслоений.

§ 2.2. ФУНКТОРНАЯ ТОЧКА ЗРЕНИЯ

2.2.1. Пусть S — росток комплексного суперпространства. Обозначим через $\mathrm{DSp}(X, S)$ (соответственно $\mathrm{DSub}(Y, S)$, $\mathrm{Dsh}(F, S)$) множество классов изоморфных деформаций над S комплексного суперпространства X (соответственно подсуперпространства $Y\subset X$, когерентного пучка F на X). Операция индуцирования позволяет рассматривать $\mathrm{DSp}(X, \cdot)$, $\mathrm{DSub}(Y, \cdot)$ и $\mathrm{Dsh}(F, \cdot)$ как контравариантные функторы из категории An ростков комплексных суперпространств в категорию множеств Ens. Категорный язык очень удобен при работе с различными типами деформаций. Дадим необходимые определения.

2.2.2. Пусть R — росток комплексного суперпространства. Пусть $\mathcal{C}$ обозначает одну из четырех категорий An, An^0, An_R, $\mathrm{An}_R{}^0$, где An_R — категория ростков комплексных суперпространств над R, а An^0 и $\mathrm{An}_R{}^0$ — подкатегории An и An_R, состоящие из четных суперпространств (то есть из ростков «обычных» комплексных пространств). Пусть Φ — контравариантный функтор из категории $\mathcal{C}$ в категорию Ens, для которого множество $\Phi(*)$ состоит из одного элемента. Функтор Φ называется *квазипредставимым,* если существуют росток V из $\mathcal{C}$ и элемент v множества $\Phi(V)$ такие, что для любой пары $S\in\mathscr{C}$, $\gamma\in\Phi(S)$ существует морфизм $\varphi: S\to V$, для которого $\Phi(\varphi)(v)=$ $=\gamma$. В этом случае говорят, что пара (V, v) квазипредставляет Φ. Как правило, на практике $\Phi(S)$ оказывается множеством деформаций над S какого-либо аналитического объекта; при этом пара (V, v) становится версальной деформацией. Мы иногда будем использовать эту терминологию и в общем случае, называя элементы множества $\Phi(S)$ деформациями (инфинитезимальными, если $S=\mathrm{D}$), а квазипредставляющую пару (v, V) — версальной деформацией и ее базой. Для морфизма $f: S'\to S$ ростков из $\mathscr{C}$ и $\gamma\in\Phi(S)$ мы будем называть деформацией, индуцированной из γ при помощи f, элемент $f^*\gamma:=$ $:=\Phi(f)(\gamma)\in\Phi(S')$. Для любой деформации $\gamma\in\Phi(S)$ индуцирование определяет отображение Кодаиры—Спенсера $\mathrm{T}_0S\to\Phi(\mathrm{D})$.

Мы будем изучать квазипредставимость не только функторов DSp, DSub и DSh, но и других. Некоторые из них (например, функторы деформаций ростков или когомологических классов) аналогичны соответствующим функторам в чисто четной теории, другие же связаны со спецификой суперслучая. К числу последних относятся функторы $\mathrm{DRd}(X,\cdot)$ и $\mathrm{DGr}(X,\cdot)$ на категории An^0, определяемые следующим образом.

Пусть X — комплексное суперпространство $S\in\mathrm{An}^0$. Положим

$$\mathrm{DRd}(X, S)=\{\mathscr{X}\in\mathrm{DSp}(X, S)\mid \mathscr{X}_{\mathrm{rd}}\simeq X_{\mathrm{rd}}\times S\},$$
$$\mathrm{DGr}(X, S)=\{\mathscr{X}\in\mathrm{DSp}(X, S)\mid \mathrm{Gr}\,\mathscr{X}\simeq\mathrm{Gr}\,X\times S\}.$$

Тогда $\mathrm{DRd}(X,S)$ — это множество классов изоморфных деформаций X над ростком S, меняющих только суперструктуру, а $\mathrm{DGr}(X,S)$ содержит деформации X над S, не затрагивающие нормальный пучок X_{rd} в X. Квазипредставимость функторов DRd и DGr, устанавливаемая в главе 3, позволяет в принципе описывать все суперпространства X с данными X_{rd} или $\mathrm{Gr}\,X$.

§ 2.3. ДЕФОРМАЦИИ КОГОМОЛОГИЧЕСКИХ КЛАССОВ

Различные аналитические объекты часто описываются в терминах элементов групп когомологий когерентных аналитических пучков или более общих групп $\mathrm{Ext}^i(X; F, G)$. Для решения задач, связанных с продолжением или деформацией таких объектов, бывает полезно уметь деформировать элементы этих групп. Цель этого параграфа — доказать существование версальной деформации элементов групп $H^i(X, F)$ и $\mathrm{Ext}^i(X; F, G)$ для когерентных аналитических пучков с компактными носителями на комплексном пространстве X.

2.3.1. Пусть X — комплексное суперпространство, F, G — когерентные $\mathcal{O}_X$-модули. Предположим еще, что задана деформация $\pi:\mathscr{X}\to R$ суперпространства X над ростком комплексного суперпространства и деформации $\mathcal{F}$ и $\mathcal{L}$ пучков F и G на $\mathcal{X}$. Это означает, что $\mathcal{F}$ и $\mathcal{L}$ являются R-плоскими $\mathcal{O}_{\mathcal{X}}$-модулями с собственным над R носителем, ограничение которых на $\pi^{-1}(r_0) \simeq X$ отождествлено с F и G соответственно. Определим еще один функтор деформаций.

2.3.2. Пусть суперпространство X, морфизм $\pi: \mathcal{X} \to R$, пучки F, G, $\mathcal{F}$, $\mathcal{L}$ — те же, что и в предыдущем пункте, а ω — фиксированный элемент векторного суперпространства $\operatorname{Ext}_X{}^i(F, G)$. Деформацией ω над ростком $S \in \mathrm{An}_R$ называется сечение $\mathcal{O}_S$-модуля $\operatorname{Ext}^i(\pi_S, \mathcal{F}_S, \mathcal{L}_S)$, ограничение которого на X совпадает с ω.

Обозначим через $\operatorname{DExt}(\omega, S)$ множество всех деформаций ω над ростком $S \in \mathrm{An}_R$. Произвольный R-морфизм ростков $h: S' \to S$ переводит множество $\operatorname{DExt}(\omega, S)$ в $\operatorname{DExt}(\omega, S')$ (см. 1.5.3), поэтому $\operatorname{DExt}(\omega, \cdot)$ является контравариантным функтором из категории An_R в Ens.

Частным случаем этого определения является деформация элемента суперпространства когомологий когерентного пучка G на X, так как $\operatorname{Ext}^i_{\mathcal{O}_X}(X, \mathcal{O}_X, G) = H^i(X, G)$ и $\operatorname{Ext}^i_{\mathcal{O}_{\mathcal{X}}}(\pi; \mathcal{O}_{\mathcal{X}}, \mathcal{L}) = R^i\pi_*(\mathcal{L})$. Ввиду важности этого частного случая, мы введем для него специальное обозначение $\mathrm{D}H(\omega, \cdot)$.

Выполнение естественных условий компактности оказывается достаточным для существования версальной деформации.

2.3.3. Теорема. Пусть X — комплексное суперпространство, $\pi: \mathcal{X} \to R$ — его деформация, $\mathcal{F}$ и $\mathcal{L}$ — когерентные R-плоские $\mathcal{O}_{\mathcal{X}}$-модули с собственными над R носителями, $\omega \in \operatorname{Ext}^i_{\mathcal{O}_X}(X; i^*\mathcal{F}, i^*\mathcal{L})$, где $i: X \hookrightarrow \mathcal{X}$ — вложение X в качестве слоя над $r \in R$. Тогда функтор $\operatorname{DExt}(\omega, \cdot)$ квазипредставим.

Следствие. Если $\mathcal{F}$ — собственный над R плоский пучок на комплексном суперпространстве $\mathcal{X}$, $\omega \in H^i(X, F)$, то функтор $\mathrm{DH}(\omega, \cdot)$ квазипредставим.

2.3.4. Доказательство. По 1.5.4 существует ограниченный справа комплекс $\mathrm{L}^{\cdot} = (\ldots \to \mathrm{L}^i \xrightarrow{d^i} \mathrm{L}^{i+1} \to \ldots \to \mathrm{L}^p)$ свободных конечных $\mathcal{O}_R$-модулей такой, что для любого морфизма $g: S \to R$ существует функториальных (по g) изоморфизм $\mathcal{O}_s$-модулей φ_s: $\operatorname{Ext}^i_{\mathcal{O}_{\mathcal{X}}}(\pi_S; \mathcal{F}_S, \mathcal{L}_S) \simeq \mathrm{H}^i(\mathrm{L}^{\cdot}_S)$. Любой морфизм $h: S' \to S$ ростков над R определяет гомоморфизм модулей $h^{\#}: \mathrm{H}^i(\mathrm{L}^{\cdot}_S) \to \mathrm{H}^i(\mathrm{L}^{\cdot}_{S'})$. Пусть $\bar{\omega}$ — образ класса ω при изоморфизме $\varphi_*: \operatorname{Ext}_{\mathcal{O}_X}(X; F, G) \simeq \mathrm{H}^i(\mathrm{L}^{\cdot}_{\{r\}}) = H^i(\mathrm{L}^{\cdot} \otimes \mathcal{O}_R\mathrm{C})$. Для $(S, s) \in \mathrm{An}_R$ положим $\Phi(S) = j^{\#-1}(\bar{\omega})$, где $j: \{r\} \to S: r \mapsto s$. Так как соответствие $h \mapsto h^{\#}$ функториально, то Φ оказывается контравариантным функтором на категории An_R.

2.3.5. Лемма. Функторы $\mathrm{DExt}(\omega, \cdot)$ и Φ изоморфны.

Доказательство. Пусть $S \in \mathrm{An}_R$ и $\omega_S \in \mathrm{DExt}(\omega, S)$. Это означает, что $\omega_S \in H^0(S, \mathrm{Ext}^i(\pi_S; \mathcal{F}_S; \mathcal{L}_S))$ и $j^*(\omega_S) = \omega \in \mathrm{Ext}^i_{\mathcal{O}_{\mathcal{X}}}(X, F, G)$. Тогда $j^{\#}(\varphi_S(\omega_S)) = \varphi_r(j^*(\omega_S)) = \varphi_r(\omega) = \overline{\omega}$ и $\varphi_S(\omega_S) \in \Phi(S)$. Обратно, если $\varphi_S(\gamma) \in \Phi(S), \gamma \in H^0(S, \mathrm{Ext}^i \mathcal{O}_{\mathcal{X}_S}(\pi_S; \mathcal{F}_S, \mathcal{L}_S))$, то $\varphi_r(\omega) = \overline{\omega} = j^{\#}(\varphi_S(\gamma)) = \varphi_r(j^*(\gamma))$, откуда $\omega = j^*(\gamma)$, так как φ_r — изоморфизм, и $\gamma \in \mathrm{DExt}(\omega, S)$.□

Из леммы следует, что вместо версальной деформации для функтора $\mathrm{DExt}(\omega, S)$ достаточно построить версальную деформацию для функтора Φ. Доказательство квазипредставимости функтора Φ мы проведем в несколько шагов. При этом, основываясь на 1.2, мы будем иногда рассматривать Φ как ковариантный функтор на двойственной к An_R категории Alg_A локальных аналитических супералгебр над $A = \mathcal{O}_R$.

Пусть A — локальное суперкоммутативное кольцо, $\mathfrak{m}$ — его максимальный идеал, k — поле вычетов. Для произвольного гомоморфизма $A \to B$ суперкоммутативных локальных колец и A-модуля M через M_B обозначим B-модуль $M \otimes_A B$. В частности, M_k — это k-векторное суперпространство $M/\mathfrak{m}M$.

2.3.6. Лемма. Пусть $L^{\cdot} = (L^1 \xrightarrow{d^1} L^2 \xrightarrow{d^2} L^3)$ — комплекс свободных конечных модулей над локальным суперкоммутативным кольцом A. Существует разложение $L^{\cdot} = L'^{\cdot} \oplus L''^{\cdot}$ комплекса $L^{\cdot}$ в прямую сумму двух подкомплексов свободных А-модулей таких, что дифференциалы комплекса $L'^{\cdot}_k = L'^{\cdot} \otimes_A k$ равны нулю, а $L''^{\cdot}$ — расщепляемая точная последовательность A-модулей.

Доказательство. Сначала разложим комплекс $L^{\cdot}_k = (L^1_k \xrightarrow{\overline{d}_1} L^2_k \xrightarrow{\overline{d}^2} L^3_k)$ векторных суперпространств. Положим $\overline{K}^1 = \mathrm{Ker}\, \overline{d}^1$ и фиксируем дополнение $\overline{M}^1$ к суперпространству $\overline{K}^1$ в L^1_k. В суперпространстве L^2_k рассмотрим подсуперпространства $\overline{N}^2$ — дополнение к $\mathrm{Ker}\, \overline{d}^2$, $\overline{I}^2 = \mathrm{Im}\, \overline{d}^1$, $\overline{M}^2 = \overline{I}^2 \oplus \overline{N}^2$ и $\overline{K}^2$ — дополнение к $\overline{I}^2$ в суперпространстве $\mathrm{Ker}\, \overline{d}^2$. Наконец, пусть $\overline{M}^3 = \mathrm{Im}\, \overline{d}^2$ и $\overline{K}^3$ есть дополнение к $\overline{M}^3$ в L^3_k. В результате получаем, что $L^i_k = \overline{K}^i \oplus \overline{M}^i$, $i = 1, 2, 3$; $\overline{d}^i|_{\overline{K}^i} = 0$ при $i = 1, 2$ и $\mathrm{Im}(\overline{d}^1|_{\overline{M}^1}) = \mathrm{Ker}(\overline{d}^2|_{\overline{M}^2})$, то есть разложение $L^{\cdot}_k = \overline{K}^{\cdot} \oplus \overline{M}^{\cdot}$ удовлетворяет условию леммы.

Выберем однородные базисы в суперпространствах $\overline{M}^1$, $\overline{K}^1$, $\overline{N}^2$, $\overline{K}^2$, $\overline{K}^3$ и поднимем их до элементов модулей L^1, L^2 и L^3. В результате мы получим свободные подмодули M^1 и K^1 в L^1, N^2 и K^2 в L^2 и K^3 в L^3. Ограничения дифференциалов $d^1|_{M^1}$ и $d^2|_{N^2}$ — мономорфизмы, так как это верно для их редукций

$\bar{d}^1|_{\bar{M}^1}$ и $\bar{d}^2|_{\bar{N}^2}$, поэтому ранги свободных подмодулей $I^2=d^1(M^1)\subset$ $\subset L^2$ и $M^3=d^2(N^2)\subset L^3$ такие же, как и размерности суперпространств $I_k{}^2=\bar{I}^2$ и $M_k{}^3=\bar{M}^3$. После редукции по модулю $\mathfrak{m}$ включения $M^1+K^1\subset L^1$, $I^2+K^2+N^2\subset L^2$ и $M^3+K^3\subset L^3$ обращаются в равенства, а суммы становятся прямыми. Из леммы Накаямы следует теперь существование разложений $L^1=$ $=M^1\oplus K^1$, $L^2=I^2\oplus K^2\oplus N^2$, $L^3=M^3\oplus K^3$.

Пусть $m_1,\ldots,m_s$ — базис модуля M^1, а $n_1,\ldots,n_t$ — базис модуля N^2, тогда элементы $d^1(m_1),\ldots,d^1(m_s)$ образуют базис I^2, а $d^2(n_1),\ldots,d^2(n_t)$ — базис модуля M^3. Выбрав произвольным образом базисы в модулях K^1, K^2 и K^3, приведем матрицы гомоморфизмов d^1 и d^2 в этих базисах к блочному виду

$$d^1=\begin{array}{cc} \begin{array}{cc} M^1 & K^1 \end{array} & \\ \left(\begin{array}{c|c} 1 & d^{1'} \\ \hline 0 & d^{1''} \\ \hline 0 & 0 \end{array}\right) & \begin{array}{c} I^2 \\ K^2 \\ N^2 \end{array} \end{array} \quad \text{и} \quad d^2=\begin{array}{cc} \begin{array}{ccc} I^2 & K^2 & N^2 \end{array} & \\ \left(\begin{array}{c|c|c} 0 & d^{2'} & 1 \\ \hline 0 & d^{2''} & 0 \end{array}\right) & \begin{array}{c} M^3 \\ K^3 \end{array} \end{array}.$$

Компонента d^1, соответствующая отображению $K^1\to N^2$, равна нулю в силу условия $d^2d^1=0$, так как $d^2|_{N^2}:N^2\xrightarrow{\sim}M^3$. Точно так же $d^2|_{I^2}=0$ из-за того, что $d^1|_{M^1}:M^1\xrightarrow{\sim}I^2$.

Если бы гомоморфизмы $d^{1'}:K^1\to I^2$ и $d^{2'}:K^2\to M^3$ были нулевыми, мы бы уже получили требуемое разложение комплекса L. Этого можно добиться, изменяя подмодули K^1 и K^2. Пусть $k_1,\ldots,k_r$ — базис K^2 и $d^{2'}(k_i)=\sum_{j=1}^{t}a_{ij}d^2(n_j)$. Все коэффициенты a_{ij} матрицы $d^{2'}$ принадлежат $\mathfrak{m}$, так как $\bar{d}^2|_{\bar{K}^2}=0$. Положим $k_i'=k_i-\sum_{j=1}^{t}a_{ij}n_j$, тогда $d_2(k_i')\in K^3$. Пусть $K^{2'}$ — подмодуль L^2, порожденный элементами $k_1',\ldots,k_r'$. Так как $k_i'\equiv k_i \bmod \mathfrak{m}L^2$, получаем, что $k_1',\ldots,k_r'$ — базис в $K^{2'}$. Еще раз применяя лемму Накаямы, убеждаемся в том, что по-прежнему существует разложение $L^2=I^2\oplus K^{2'}\oplus N^2$. Теперь проделаем аналогичную процедуру с модулем K^1. Пусть $l_1,\ldots,l_p$ — базис K^1, а (b_{ij}), $i=1,\ldots,p$, $j=1,\ldots,s$ — матрица гомоморфизма $K^1\to I^2$ — композиции $d^1|_{K^1}:K^1\to L^2$ и проекции $L^2=I^2\oplus K^{2'}\oplus N^2\to I^2$. Тогда, взяв подмодуль $K^{1'}$, свободно порожденный элементами $l_i'=$ $=l_i-\sum_{j=1}^{s}b_{ij}m_j$, мы получим разложение $L^1=M^1\oplus K^{1'}$, для которого $d^1(K^{1'})\subset K^{2'}$. Поскольку $d^2(K^{2'})\subset K^3$, окончательно находим подкомплексы $L' = (K^{1'} \to K^{2'} \to K^3)$ и $L'' = (M^1 \to I^2 \oplus N^2 \to M^3)$, обладающие требуемыми свойствами. □

Теперь у нас все готово для заключительного шага в доказательстве теоремы 2.3.3.

2.3.7. Предложение. Пусть $L^{\cdot} = (L^1 \xrightarrow{d^1} L^2 \xrightarrow{d^2} L^3)$ — комплекс свободных конечных A-модулей, где A — локальная аналитическая супералгебра, $\omega_0 \in H(L^{\cdot} \otimes_A \mathrm{C})_{\bar{0}} = [\mathrm{Ker}\, \bar{d}^2 / \mathrm{Im}\, \bar{d}^1]_{\bar{0}}$ — четный элемент суперпространства когомологий. Тогда функтор $\Phi(B) = \{\omega \in H(L^{\cdot} \otimes_A B)_{\bar{0}} \mid \bar{\omega} = \omega_0\}$ на категории Alg_A квазипредставим.

Доказательство. Пусть $L^{\cdot} = L'^{\cdot} \oplus L''^{\cdot}$ — разложение в сумму двух подкомплексов из леммы 2.3.6. Комплекс $L''^{\cdot}$ имеет вид $0 \to L^{1''} \to L^{1''} \oplus L^{3''} \to L^{3''} \to 0$, поэтому для любой A-алгебры B когомологии комплекса $L''^{\cdot} \otimes_A B$ тривиальны и существует канонический изоморфизм B-модулей $H(L^{\cdot} \otimes_A B) \xrightarrow{\sim} H(L'^{\cdot} \otimes_A B)$. Таким образом, мы можем считать в дальнейшем, что $L^{\cdot}$ совпадает с $L'^{\cdot}$, то есть дифференциалы $\bar{d}^1$ и $\bar{d}^2$ комплекса $L^{\cdot} \otimes_A \mathrm{C}$ равны нулю.

Выберем однородные базисы $u_1, \ldots, u_{m+n}$ и $v_1, \ldots, v_t$ свободных A-модулей L^2 и L^3, где элементы $u_1, \ldots, u_m$ — четные, а $u_{m+1}, \ldots, u_{m+n}$ — нечетные, и пусть (a_{ij}), $i = 1, \ldots, t$; $j = 1, \ldots, m+n$ — матрица гомоморфизма d^2 в этих базисах, $d^2(u_j) = \sum_{i=1}^{t} v_i a_{ij}$. Поскольку $\bar{d}^1 = 0$ и $\bar{d}^2 = 0$, суперпространство $H(L^{\cdot} \otimes_A \mathrm{C})$ можно отождествить с $L^2 \otimes_A \mathrm{C}$ и разложить $\omega_0 \in H(L^{\cdot} \otimes_A \mathrm{C})_{\bar{0}}$ по базису $\bar{u}_1, \ldots, \bar{u}_{m+n}$ суперпространства $L^2 \otimes_A \mathrm{C}$: $\omega_0 = k_1 \bar{u}_1 + \ldots + k_{m+n} \bar{u}_{m+n}$, $k_i \in \mathrm{C}$, $k_i = 0$ при $i > m$.

Представим супералгебру A в виде фактора кольца $\mathrm{C}\{x^1, \ldots, x^p, \xi^1, \ldots, \xi^q\}$ по идеалу с однородными образующими $f_1, \ldots, f_r$ и рассмотрим в алгебре $\mathrm{C}\{x^1, \ldots, x^p, t^1, \ldots, t^m, \xi^1, \ldots, \xi^q, \theta^1, \ldots, \theta^n\}$ сходящихся степенных рядов от $p+m$ четных и $q+n$ нечетных переменных идеал I, порожденный элементами f_k, $k = 1, \ldots, r$, и $g_i = \sum_{j=1}^{m} a_{ij}(k_j + t^j) + \sum_{j=1}^{n} a_{i,j+m} \theta^j$. Образы элементов t^j, $j = 1, \ldots, m$, и θ^i, $i = 1, \ldots, n$, в фактор-алгебре $R = \mathrm{C}\{x, t, \xi, \theta\}/I$ будем обозначать теми же буквами.

Рассмотрим элемент $\Omega = \sum_{j=1}^{m} u_j (k_j + t^j) + \sum_{j=1}^{n} u_{j+m} \theta^j$ модуля $L_2 \otimes_A R$. Имеем

$$d_R^2(\Omega) = \sum_{j=1}^{m} d^2(u_j)(k_j + t^j) + \sum_{j=1}^{n} d^2(u_{j+m})\, \theta^j =$$

$$=\sum_{j=1}^{m}\left(\sum_{l=1}^{t} v_l a_{lj}\right)(k_j+t^j)+\sum_{j=1}^{n}\left(\sum_{l=1}^{t} v_l a_{l,j+m}\right)\theta^j=$$
$$=\sum_{l=1}^{t} v_l\left(\sum_{j=1}^{m} a_{lj}(k_j+t^j)+\sum_{1\leqslant j\leqslant n} a_{l,j+m}\theta_j\right)=0.$$

Поэтому Ω определяет некоторый класс $\tilde{\Omega}\in H(L^{\cdot}\otimes_A R)_{\bar{0}}$. При этом $\tilde{\Omega}\in\Phi(R)$, так как образ Ω при редукции $R\to\mathbf{C}$ равен $\sum_{i=1}^{m} u_j k_j=\omega_0$.

Покажем, что пара $(R, \tilde{\Omega})$ квазипредставляет функтор Φ. Пусть даны A-алгебра B и класс $\tilde{\omega}\in\Phi(B)$. Поднимем $\tilde{\omega}$ до элемента $\omega\in\operatorname{Ker}(d_B^2)_{\bar{0}}$, для которого $\bar{\omega}=\omega_0\in H(L\otimes\mathbf{C})=L^2\otimes_A\mathbf{C}$. Тогда разложение ω по базису $u_1\otimes 1, \ldots, u_{m+n}\otimes 1$ суперпространства $L^2\otimes_A B$ имеет вид $\omega=u_1\otimes(k_1+b_1)+\ldots+u_m\otimes(k_m+b_m)+$ $+u_{m+1}\otimes\beta_1+\ldots+u_{m+n}\otimes\beta_n$, где $b_1, \ldots, b_m$ — четные, а $\beta_1, \ldots, \beta_n$ — нечетные элементы максимального идеала $\mathfrak{m}_B$. Условие $\omega\in\operatorname{Ker} d^2B$ в координатах выглядит так $\sum_{j=1}^{m} a_{lj}(k_j+b_j)+\sum_{j=1}^{n} a_{l,j+m}\beta_j=0$. Из этого следует, что существует единственный A-гомоморфизм аналитических супералгебр $h: R\to B$, переводящий t^j в b_j и θ^l в β_l. При этом гомоморфизм модулей $h^{\#}: \mathrm{H}(L^{\cdot}\otimes_A R)\to\mathrm{H}(L^{\cdot}\otimes_A B)$ переводит $\tilde{\Omega}$ в $\tilde{\omega}$.

Осталось убедиться в версальности пары $(R, \tilde{\Omega})$, то есть в том, что гомоморфизм суперпространств $dh: (\mathfrak{m}_R/\mathfrak{m}_R^2+\mathfrak{m}_A R)\to$ $\to(\mathfrak{m}_B/\mathfrak{m}_B^2+\mathfrak{m}_A B)$, индуцированный гомоморфизмом h, не зависит от произвола в определении h, связанного с неоднозначностью выбора представителя класса $\tilde{\omega}\in H(L^{\cdot}\otimes_A B)$. Пусть $\omega'\in(\operatorname{Ker} d_B^2)_{\bar{0}}$ — другой представитель класса $\tilde{\omega}$ и

$$\omega'=u_1\otimes(k_1+b_1')+\ldots+u_m\otimes(k_m+b_m')+u_{m+1}\otimes\beta_1'+\ldots+u_{m+n}\otimes\beta_n'$$

— его разложение по базису. Тогда, так как $\omega-\omega'\in(\operatorname{Im} d_B^1)_{\bar{0}}$ и $d_{\mathbf{C}}^1=0$, получаем, что $b_i'-b_i\in(\mathfrak{m}_A B)_{\bar{0}}$ и $\beta_j'-\beta_j\in(\mathfrak{m}_A B)_{\bar{1}}$. Поэтому гомоморфизм h определен по модулю $\mathfrak{m}_A B$ однозначно. □

§ 2.4. ПОЛНОТА И ГЛАДКОСТЬ

База версальной деформации для квазипредставимого функтора, вообще говоря, имеет особенности. Тем не менее, в случае, когда все препятствия к продолжению обращаются в нуль, база является ростком комплексного супермногообразия. Это утверждение следует из аналога теоремы Артина [18] о разрешимости систем аналитических уравнений. Из этой же теоремы выводится и критерий полноты 4.6.3, утверждающий, что деформация, содержащая все инфинитезимальные деформации и имеющая гладкую базу, является полной.

2.4.1. Теорема. Пусть $f_i(z, w)$, $i=1, 2, \ldots, N$, — сходящиеся степенные ряды от переменных $z \in \mathbf{C}^{m|n}$, $w \in \mathbf{C}^{p|q}$ без свободных членов. Если для любого $k \in \mathbf{N}$ существуют m четных и n нечетных многочленов $w_j^{(k)}(z) \in \mathbf{C}[z]$ без свободных членов, для которых

$$f_i(z, w_1^{(k)}(z), \ldots, w_p^{(k)}(z), w_{p+1}^{(k)}(z), \ldots, w_{p+q}^{(k)}(z)) \equiv 0 \bmod (z)^k,$$
$$i=1, 2, \ldots, N,$$

то существуют ряды $w_j(z) \in \mathbf{C}\{z\}$, удовлетворяющие системе уравнений $f_i(z, w(z))=0$. Более того, если $\overline{w}_j(z) \in \mathbf{C}[[z]]$, $j=1, 2, \ldots, p+q$, — формальное решение этой системы, то для любого $k \in \mathbf{N}$ существует такое решение $(w_1(z), \ldots, w_{p+q}(z)) \in \mathbf{C}\{z\}^{p|q}$ системы, что $w_j(z) \equiv \overline{w}_j(z) \bmod (z)^k$.

Доказательство. Введем обозначения $u_i = z_i$, $i=1, \ldots, m$, $\xi_i = z_{m+i}$, $i=1, \ldots, n$. Каждый сходящийся или формальный степенной ряд от $z_1, \ldots, z_{m+n}$ представляется тогда в виде $h(z) = \sum_I h_I(u)\xi^I$, где $I=(\varepsilon_1, \ldots, \varepsilon_n)$, $\varepsilon_i \in \{0, 1\}$, $\xi^I = \xi_1^{\varepsilon_1}\ldots\xi_n^{\varepsilon_n}$. Вместо $p+q$ неизвестных рядов $w_j(z)$ мы будем искать $(p+q)\cdot 2^n$ рядов $v_{j,I}(u_1, \ldots, u_m) \in \mathbf{C}\{u\}$ таких, что ряды $w_j(u, \xi) = \sum_I v_{j,I}(u)\xi^I \in \mathbf{C}\{u, \xi\}$ удовлетворяют системе $f_i(z, w)=0$.

Разложим ряды $f_i \in \mathbf{C}\{z, w_1, \ldots, w_{p+q}\}$ по переменным u_k, $v_{j,I}$, ξ_i и соберем вместе члены при одинаковых степенях ξ. Получим $f_i(z, w) = \sum g_{i,I}(u, v)\cdot\xi^I$, где $g \in \mathbf{C}\{u, v\}$. Условие $f_i(z, w(z))=0$, $i=1, \ldots, N$, равносильно $g_{i,I}(u, v)=0$, $i=1, \ldots, N$, $I \in \{0, 1\}^n$. Таким образом, мы свели исходную систему к системе из $N\cdot 2^n$ уравнений относительно $(p+q)\cdot 2^n$ неизвестных функций $v_{j,I} \in \mathbf{C}\{u\}$. Многочлены $w_j^{(n+k)}(z)$ (соответственно, формальные ряды $\overline{w}_j(z)$), удовлетворяющие $f_j(z, w^{(n+k)}(z)) \equiv 0 \bmod (z)^{n+k}$ (соответственно, $f_j(z, \overline{w}(z))=0$), $j=1, \ldots, N$, дают решение $v_{j,I}^{(k)}(u) \bmod (u)^k$ (соответственно формальное решение $\overline{v}_{j,I}(u)$) системы $g_{i,I}(u, v(u))=0$. Следовательно, по обычной теореме об аналитических уравнениях [39], существует решение этой системы в сходящихся рядах. Но тогда и исходная система имеет сходящиеся решения. □

Теорема 2.4.1. имеет два важных приложения в теории деформаций.

2.4.2. Предложение. Пусть Φ — контравариантный квазипредставимый функтор из категории An в Ens, для которого все препятствия к продолжению деформаций равны нулю, то есть для любого роста $S \in \mathrm{An}$ у любой деформации $\xi_k \in \Phi(S^k)$ над k-й инфинитезимальной окрестностью точки $* \in S$ существует продолжение $\xi_{k+1} \in \Phi(S^{(k+1)})$ на $k+1$-ю окрестность. Тогда база версальной деформации функтора Φ является ростком комплексного супермногообразия.

2.4.3. Предложение (Теорема версальности). Пусть база версальной деформации функтора Φ из 2.4.2 является ростком комплексного супермногообразия. Тогда деформация $\xi \in \Phi(s)$ над гладким ростком S полна тогда и только тогда, когда гомоморфизм Кодаиры—Спенсера $\mathrm{ks}: TS \to \Phi(\mathrm{D}) : \mathrm{Mor}(\mathrm{D}, S) = TS \ni v \mapsto v^*(\xi) \in \Phi(\mathrm{D})$ является эпиморфизмом.

Доказательства. Предложения 2.4.2 и 2.4.3 выводятся из теоремы 2.4.1 точно так же, как и при доказательстве в [39] аналогичных результатов для чисто четного случая. □

После того, как в главе 4 будет построена теория препятствий для функторов DSp, DSub и DSh и доказана их квазипредставимость, предложение 2.4.2 даст утверждения (*iii*) теорем 2.1.2, 2.1.4, 2.1.6. Из теоремы версальности следует также такой результат.

2.4.4. Следствие (*теорема жесткости*). Пусть для квазипредставимого функтора Φ пространство инфинитезимальных деформаций $\Phi(\mathrm{D})$ состоит из одного элемента — тривиальной деформации. Тогда любая деформация $\xi \in \Phi(S)$ тривиальна.

В частности, компактное комплексное суперпространство X (соответственно, подсуперпространство $Y \subset X$; когерентный пучок $\mathcal{F}$ на X) не имеет нетривиальных деформаций, если $H^1(T_X^{\cdot}) = 0$ (соотв. $\mathrm{Hom}_Y(I/I^2; \mathcal{O}_Y) = 0$; $\mathrm{Ext}_X^1(\mathcal{F}, \mathcal{F}) = 0$).

Глава 3

ПРИМЕРЫ И ПРИЛОЖЕНИЯ

Здесь мы рассмотрим несколько примеров и следствий из теорем существования версальных деформаций, доказательству которых посвящена следующая глава.

§ 3.1. МОДУЛИ СУПЕРМНОГООБРАЗИЙ

Как известно (см., например, [12]), любое $\mathscr{C}^\infty$-супермногообразие расщепимо, поэтому классификация $\mathscr{C}^\infty$-супермногообразий M с данным подстилающим многообразием M_{rd} сводится к описанию расслоений на M_{rd}. В комплексно-аналитическом случае это перестает быть верным. Существуют семейства неизоморфных супермногообразий M с одним и тем же $\mathrm{Gr}\, M$. В этом параграфе мы с помощью четноверсальной деформации супермногообразия M (она существует по теореме 4.3.1) построим семейство, содержащее все супермногообразия с данным $\mathrm{Gr}\, M$. Любое супермногообразие M можно получить, деформируя $\mathrm{Gr}\, M$ (предложение 3.1.4), что дает возможность описать в принципе все супермногообразия с данным $\mathrm{Gr}\, M$ (а не только близкие к нему).

3.1.1. Теорема. Пусть M — компактное комплексное супермногообразие. Тогда функторы $\mathrm{DRd}\,(M, \cdot)$ и $\mathrm{DGr}\,(M, \cdot)$ (см. § 2.2) квазипредставимы.

Доказательство. Пусть $\pi : \mathcal{M} \to S$ — четноверсальная деформация супермногообразия M. Так как $S \in \mathrm{An}^0$, редукция $\pi_{\mathrm{rd}} : \mathcal{M}_{\mathrm{rd}} \to S_{\mathrm{rd}} = S$ задает деформацию многообразия M_{rd} над S. Рассмотрим версальную деформацию $\rho : \hat{M} \to B$ многообразия M_{rd} с четной базой $(B, b_0) \in \mathrm{An}^0$, тогда существует морфизм $f : S \to B$, индуцирующий π_{rd} из ρ. Пусть $\pi^0 : \mathcal{M}^0 \to S^0$ — ограничение деформации π на подпространство $S^0 = f^{-1}(b_0)$. Тогда, как следует из диаграммы

$$\begin{tikzcd}
 & \mathcal{M}^0 \arrow[rr] \arrow[dd, "\pi^0"] & & \mathcal{M} \arrow[dd, "\pi"] & & \\
\mathcal{M}^0_{\mathrm{rd}} \arrow[ur] \arrow[rr] \arrow[dr, "\pi^0_{\mathrm{rd}}"'] & & \mathcal{M}_{\mathrm{rd}} \arrow[ur] \arrow[dr] \arrow[rr] & & \hat{M} \arrow[dr, "\rho"] & \\
 & S^0 \arrow[rr, "j^0"] & & S \arrow[rr, "f"] & & B
\end{tikzcd},$$

деформация $\pi^0_{\mathrm{rd}} : \mathcal{M}^0_{\mathrm{rd}} \to S^0$ многообразия M_{rd} индуцируется из ρ отображением $f \cdot j^0 : S^0 \to \{b_0\} \subset B$. Поэтому деформация π^0_{rd} тривиальна, то есть существует изоморфизм

$$\begin{tikzcd}
\mathcal{M}^0_{\mathrm{rd}} \arrow[rr, "\sim"] \arrow[dr, "\pi^0_{\mathrm{rd}}"'] & & M_{\mathrm{rd}} \times S^0 \arrow[dl] \\
 & S^0 &
\end{tikzcd}$$

и $\pi^0 \in \mathrm{DRd}\,(M, S^0)$. Чуть позже мы увидим, что π_0 является версальной деформацией для функтора $\mathrm{DRd}\,(M, \cdot)$. Рассмотрим теперь нормальное расслоение $N = N_{M_{\mathrm{rd}}|M}$ M_{rd} в M. Расслоение ΠN не имеет нечетных образующих, поэтому пучок его сечений $F = \Pi\left(\mathcal{O}_{M, \bar{1}} / \mathcal{O}^3_{M, \bar{1}}\right)$ локально свободен и имеет версальную (четную) деформацию $\mathcal{F}$ — когерентный локально свободный пучок на $M_{\mathrm{rd}} \times R$, где $(R, r_0) \in \mathrm{An}^0$. Пучок $\mathcal{F}^0 = \Pi\left(\mathcal{O}_{\mathcal{M}^0, \bar{1}} / \mathcal{O}^3_{\mathcal{M}^0, \bar{1}}\right)$ на $\mathcal{M}^0_{\mathrm{rd}}$ также локально свободен, а его ограничение на M_{rd} совпадает с F. Так как $\mathcal{M}^0_{\mathrm{rd}}$ изоморфно $M_{\mathrm{rd}} \times S^0$, пучок $\mathcal{F}^0$ является деформацией F с базой S^0. Пусть $g : S^0 \to R$ — морфизм, индуцирующий $\mathcal{F}^0$ из версальной деформации $\mathcal{F} \in \mathrm{DSh}\,(F, R)$. Рассмотрим ограничение деформации $\pi^0 : \mathcal{M}^0 \to S^0$ на росток $S^1 = g^{-1}(r_0) \subset S^0$ и диаграмму морфизмов деформаций

$$\begin{tikzcd}
\mathcal{M} \arrow[rr] \arrow[ddr, "\pi^1"'] & & \mathcal{M}^0 \arrow[ddr, "\pi^0"'] & & \mathcal{F}^0 = (id_M \times g)^* \mathcal{F} \arrow[dl, dash] & & \mathcal{F} \arrow[dl, dash] \\
 & M_{rd} \times S^1 \arrow[ul] \arrow[rr] \arrow[d] & & M^0_{rd} \arrow[ul] \arrow[rr] \arrow[d] & & M_{rd} \times R \arrow[d] & \\
 & S^1 \arrow[rr, "j^1"] & & S^0 \arrow[rr, "g"] & & R &
\end{tikzcd}.$$

Тогда из того, что композиция $g\cdot j^1$ постоянна, получаем

$$\mathcal{F}^1=\Pi(\mathcal{O}_{\mathcal{M}^1,\bar{1}}/\mathcal{O}^3_{\mathcal{M}^1,\bar{1}})=\Pi(id_{M_{rd}}\times j^1)^*(\mathcal{O}_{\mathcal{M}^0,\bar{1}}/\mathcal{O}^3_{\mathcal{M}^0,\bar{1}})=$$

$$=(id_{M_{rd}}\times j^1)^*\mathcal{F}^0=(id_{M_{rd}}\times(g\cdot j^1))^*\mathcal{F}=p^*F,$$

где $p:M_{rd}\times S^1\to M_{rd}$ — каноническая проекция. Итак, деформация $\mathcal{F}^1$ пучка F тривиальна и возникает S^1 — изоморфизм $\operatorname{Gr}\mathcal{M}^1=(M_{rd}\times S^1,\ \wedge^{\cdot}\mathcal{F}^1)\xrightarrow{\sim}\operatorname{Gr}M\times S^0$. Следовательно, деформация $\pi^1:\mathcal{M}^1\to S^1$ индуцирует тривиальную деформацию супермногообразия $\operatorname{Gr}M$ и определяет элемент из $\operatorname{DGr}(M, S^1)$.

Докажем, что деформации π^0 и π^1 квазипредставляют функторы $\operatorname{DRd}(M,\cdot)$ и $\operatorname{DGr}(M,\cdot)$.

Пусть $S'\in\mathrm{An}^0$ и $\pi':\mathcal{M}'\to S'$ принадлежит $\operatorname{DRd}(M, S')$, то есть π' — деформация M над ростком S', для которой существует S'-изоморфизм $\mathcal{M}'_{rd}\xrightarrow{\sim}M_{rd}\times S'$. Так как деформация $\pi:\mathcal{M}\to S$ четноверсальна, существует морфизм $h:S'\to S$, индуцирующий $\mathcal{M}'$ из $\mathcal{M}$. Но тогда h индуцирует деформацию π'_{rd} из π_{rd}, которая, в свою очередь, индуцирована из $\rho:\hat{M}\to B$ морфизмом $f:S\to B$. Следовательно, морфизм $f\circ h:S'\to B$ индуцирует деформацию π'_{rd} из ρ, но деформация ρ версальна, а π'_{rd} — тривиальная, поэтому в силу следствия из леммы 3.1.2 морфизм $f\cdot h$ отображает S' в $b_0\in B$. Вспомнив, что $S^0=f^{-1}(b_0)$, мы получим, что h пропускается через $g^0:S^0\hookrightarrow S$ и существует морфизм $h^0:S'\to S^0$, для которого $h=j^0\cdot h^0$. Отсюда $\pi'=h^*(\pi)=h^{0*}\cdot j^{0*}(\pi)=h^{0*}(\pi^0)$, то есть π' индуцируется из π^0. Если $\mathfrak{m}^2_{S'}=0$, и морфизм $\tilde{h}^0:S'\to S^0$ индуцирует π' из π^0, то $\pi'=\tilde{h}^{0*}(\pi^0)=(j^0\tilde{h}^0)^*(\pi)$. Из четноверсальности π следует, что $j^0h^0=h=j^0\tilde{h}^0$. Но j^0 — вложение, поэтому $\tilde{h}^0=h^0$ и деформация $\pi^0\in\operatorname{DRd}(M, S^0)$ квазипредставляет функтор $\operatorname{DRd}(M,\cdot)$.

Предположим теперь еще, что и деформация $\operatorname{gr}\pi':\operatorname{Gr}\mathcal{M}'\to S'$ тривиальна, то есть $\pi'\in\operatorname{DGr}(M, S')$. Тогда морфизм $g\cdot h^0:S'\to R$ индуцирует из версальной деформации $\mathcal{F}$ пучка F на M тривиальную деформацию $\mathcal{F}'=\pi(\mathcal{O}_{\mathcal{M}',\bar{1}}/\mathcal{O}^3_{\mathcal{M}',\bar{1}})$ над S'. Еще раз применяя следствие 3.1.3, получаем, что $g\cdot h^0$ отображает S' в точку $r_0\in R$ и, следовательно, морфизм h^0 пропускается через $S^1=g^{-1}(r_0)\overset{j_1}{\hookrightarrow}S^0$. Пусть $h^0=j^1\cdot h^1$, тогда $\pi'=h^{0*}(\pi^0)=h^{1*}j^{1*}(\pi^0)=h^{1*}(\pi^1)$, то есть π' индуцируется из π^1 морфизмом h^1. Если $\mathfrak{m}^2_{S'}=0$ и $\tilde{h}^1:S'\to S^1$ морфизм, такой что $\tilde{h}^{1*}(\pi^1)=\pi'$, то $\pi'=\tilde{h}^{1*}(\pi^1)=\tilde{h}^{1*}\cdot j^{1*}(\pi^0)=\tilde{h}^{1*}j^{1*}j^{0*}(\pi)=(j^0j^1\tilde{h}^1)^*(\pi)=h^*(\pi)$. Деформация π четноверсальна, поэтому $j^0j^1\tilde{h}^1=h=j^0\cdot h^0=j^0j^1\cdot h^1$ и $\tilde{h}^1=h^1$, так как j^0 и j^1 — вложения. Итак, π^1 квазипредставляет функтор $\operatorname{DGr}(M,\cdot)$. □

Нам осталось установить следующий результат.

3.1.2. Лемма. Пусть Φ — квазипредставимый функтор и $(R, r_0)\in\mathrm{An}$ — база версальной деформации $\xi\in\Phi(R)$. Пусть

$(S, s_0)\in\mathrm{An}$ и морфизмы f_1 и $f_2: S\to R$ индуцируют изоморфные деформации над S. Предположим, что f_1 и f_2 отображают k-ю инфинитезимальную окрестность $S^{(k)}$ точки $s_0\in S$ в $r_0\in R$. Тогда ограничения морфизмов f_1 и f_2 на $S^{(k+1)}$ совпадают.

Доказательство. Условие $f_i: S^{(k)}\to\{r_0\}$, $i=1, 2$, означает, что соответствующий морфизму f_i гомоморфизм локальных супералгебр $\varphi_i:\mathcal{O}_R\to\mathcal{O}_S$ переводит $\mathfrak{m}_R$ в $\mathfrak{m}_S^{k+1}$. Но тогда гомоморфизмы $\varphi_i^{(k+1)}:\mathcal{O}_R\to\mathcal{O}S^{(k+1)}=\mathcal{O}_S/\mathfrak{m}_S^{k+2}$, $i=1, 2$, пропускаются через канонический мономорфизм $\beta: \mathbf{C}[\mathfrak{m}_S^{k+1}/\mathfrak{m}_S^{k+2}]\hookrightarrow\mathcal{O}S^{(k+1)}$, то есть существуют гомоморфизмы $\psi_2:\mathcal{O}_R\to A$, $i=1, 2$, где $A=\mathbf{C}[\mathfrak{m}_S^{k+1}/\mathfrak{m}_S^{k+2}]$ такие, что $\varphi_i^{(k+1)}=\beta\cdot\psi_i$. Деформации $\varphi_{1*}^{(k+1)}(\xi)$ и $\varphi_{2*}^{(k+1)}(\xi)$ над $\mathcal{O}S^{(k+1)}$ изоморфны по условию, поэтому деформации $\psi_{1*}(\xi)$ и $\psi_{2*}(\xi)$ тоже изоморфны. Но так как $\mathfrak{m}_A^2=0$, из версальности деформации ξ следует, что $\psi_1=\psi_2$, а тогда и $\varphi_1^{(k+1)}=\beta\cdot\psi_1=\beta\cdot\psi_2=\varphi_2^{(k+1)}$. Итак, $k+1$-струи морфизмов ростков f_1 и f_2 совпадают. □

3.1.3. Следствие. Пусть Φ, R, S, ξ — те же, что и в условии леммы. Предположим, что морфизм $f: S\to R$ индуцирует из ξ тривиальную деформацию. Тогда f — постоянный морфизм $f: S\to\{r_0\}\hookrightarrow R$.

Доказательство. Постоянный морфизм $f_0: S\to\{r_0\}$ тоже индуцирует на S тривиальную деформацию. Так как ξ версальна, ограничения f и f_0 на $S^{(1)}$ совпадают. Теперь, из леммы индукцией по k получаем, что морфизм f отображает все инфинитезимальные окрестности $S^{(k)}$ точки $s_0\in S$ в $r_0\in R$. Но тогда f постоянен и на S. □

Следующий простой факт позволяет использовать теорему 3.1.1. для описания всех супермногообразий M с фиксированным $\mathrm{Gr}\,M$.

3.1.4. Предложение. Для любого супермногообразия M существует деформация $\pi: \mathscr{M}=\{M_t\}\to\mathbf{C}_{,0}$ супермногообразия $\mathrm{Gr}\,M$ с одномерной гладкой базой такая, что $M_0=\mathrm{Gr}\,M$, $M_1=M$, $\pi\in\mathrm{DGr}\,(M_0, \mathbf{C})$.

Доказательство. Пусть (U_α) — атлас на супермногообразии M. Структура комплексного супермногообразия на M задается набором функций перехода — голоморфных изоморфизмов супероблaстей $g^{\beta\alpha}: U_\alpha\to U_\beta$, удовлетворяющих условию $g^{\gamma\beta}g^{\beta\alpha}=g^{\gamma\alpha}$. Выберем системы координат (x_α, ξ_α) в супероблaстях и запишем в них функции перехода

$$x_\beta=g_0^{\beta\alpha}(x_\alpha)+g_2^{\beta\alpha}(x_\alpha)\xi_\alpha\xi_\alpha+g_4^{\beta\alpha}(x_\alpha)\xi_\alpha\xi_\alpha\xi_\alpha\xi_\alpha+\dots,$$
$$\xi_\beta=g_1^{\beta\alpha}(x_\alpha)\xi_\alpha+g_3^{\beta\alpha}(x_\alpha)\xi_\alpha\xi_\alpha\xi_\alpha+\dots.$$

У супермногообразия $\mathrm{Gr}\,M$ в этом случае будут такие функции перехода: $x_\beta=g_0^{\beta\alpha}(x_\alpha)$; $\xi_\beta=g_1^{\beta\alpha}(x_\alpha)\xi_\alpha$. Зададим теперь на семействе супероблaстей $U_\alpha\times\mathbf{C}$ с координатами $(x_\alpha, \xi_\alpha, t)$ новый набор функций перехода $g^{\beta\alpha}$:

$$x_\beta = g_0^{\beta\alpha}(x_\alpha) + t^2 g_2^{\beta\alpha}(x_\alpha)\,\xi_\alpha\xi_\alpha + t^4 g_4^{\beta\alpha}(x_\alpha)\,\xi_\alpha\xi_\alpha\xi_\alpha\xi_\alpha + \ldots,$$

$$\xi_\beta = g_1^{\beta\alpha}(x_\alpha)\,\xi_\alpha + t^2 g_3^{\beta\alpha}(x_\alpha)\,\xi_\alpha\xi_\alpha\xi_\alpha + \ldots.$$

В результате мы получим супермногообразие $\mathcal{M}$ и корректно определенный морфизм $\pi:\mathcal{M}\to\mathbf{C}$; $(x_\alpha, \xi_\alpha, t)\mapsto t$, являющийся деформацией супермногообразия $\pi^{-1}(0)=\mathrm{Gr}\,M$. При $t\neq 0$ отображение $(x_\alpha, \xi_\alpha)\mapsto\left(x_\alpha, \frac{1}{t}\xi_\alpha\right)$ представляет собой голоморфный изоморфизм супермногообразий $M=M_1$ и M_t. □

Для практических целей необходимо уметь вычислять размерность базы версальной деформации. Ответ на этот вопрос для функтора DGr содержится в следующем утверждении.

3.1.5. Предложение. Пусть M — компактное комплексное многообразие, F — локально свободный $\mathcal{O}_M$-модуль. Обозначим через M_F расщепимое комплексное супермногообразие $(M, \wedge^\cdot(F))$. Тогда размерность базы S^1 деформации, версальной в классе деформаций M_F, не меняющих Gr (то есть квазипредставляющего объекта функтора $\mathrm{DGr}(M_F, \cdot)$), равна $n=\dim H^1(M, T_2)$, где $\mathrm{T}_2=[\wedge_2\cdot\Pi M_F]_{\bar 0}\subset \mathrm{T}M_F$, а $\wedge_2=\sum\limits_{i\geqslant 2}\Lambda^\cdot(F)\subset\mathcal{O}_{M_F}$ — это $\mathcal{O}_M$-модуль четных векторных полей на M_F, обращающихся в нуль на первой инфинитезимальной окрестности M в M_F. Если $H^2(M, T_2)=0$, то S^1 — окрестность нуля в $\mathbf{C}^n$.

Доказательство. Воспользуемся конструкцией версального семейства, проведенной в 3.1.1. Пусть, как и прежде, S — база четноверсальной деформации супермногообразия M_F, B — база версальной деформации многообразия M, а R — база версальной деформации пучка F на M, S^0 — база версальной деформации для функтора $\mathrm{DRd}(M_F, \cdot)$, S^1-база версальной деформации для функтора $\mathrm{DGr}(M_F, \cdot)$. Тогда $S^0=f^{-1}(b_0)$, $S^1=g^{-1}(r_0)$, где $f:S\to B$ и $g:S^0\to R$. Наша задача найти $\dim S^1$, поэтому морфизмы и ростки комплексных пространств в диаграмме

$$\begin{tikzcd}
S^1 \arrow[r, "j^1"] & S^0 \arrow[r, "g"] \arrow[dr, "j^0"'] & R & \\
 & & S \arrow[dr, "f"'] & \\
 & & & B
\end{tikzcd}$$

можно заменить их дифференциалами и касательными пространствами. В результате для вычисления $\dim S^1=\dim \mathrm{T}S^1$ мы получаем две точные последовательности

$$\begin{tikzcd}
 & & 0 \arrow[d] & & \\
0 \arrow[r] & TS^1 \arrow[r, "dj^1"] & TS^0 \arrow[r, "dg"] \arrow[dr, "dj^0"'] & TR & \\
 & & & TS \arrow[dr, "df"'] & \\
 & & & & TB
\end{tikzcd}$$

Касательные пространства к B; S и R — суть $\mathrm{T}B=\mathrm{H}^1(M, \mathrm{T}M)$, $\mathrm{T}S=\mathrm{H}^1(M, (\mathrm{T}M_F)_{\bar 0})$ и $\mathrm{T}R=\mathrm{H}^1(M, F^*\otimes F)$. Отображение Кодаиры — Спенсера df для морфизма $f: S\to B$ — это гомоморфизм $\mathrm{H}^1(M, (\mathrm{T}M_F)_{\bar 0})\xrightarrow{\alpha_*}\mathrm{H}^1(M, \mathrm{T}M)$, индуцированный гомоморфизмом ограничения $(\mathrm{T}M_F)_{\bar 0}\xrightarrow{\alpha}\mathrm{T}M$. Пусть $\mathrm{T}_1=\mathrm{Ker}\,\alpha$ — пучок четных векторных полей на M_F, равных нулю на M. В точной последовательности когомологий

$$\begin{tikzcd}[column sep=small] & & & \mathrm{T}S \arrow[r, "df"] \arrow[d, equal] & \mathrm{T}B \arrow[d, equal] \\ \mathrm{H}^0(M, (\mathrm{T}M_F)_{\bar 0}) \arrow[r, "\alpha"] & H^0(M, \mathrm{T}M) \arrow[r, "\delta"] & \mathrm{H}^1(M, \mathrm{T}_1) \arrow[r] & \mathrm{H}^1(M, (\mathrm{T}M_F)_{\bar 0}) \arrow[r, "\alpha_*"] & \mathrm{H}^1(M, \mathrm{T}M)\end{tikzcd}$$

граничный гомоморфизм δ нулевой, так как с помощью проекции $M_F\to M$ любое векторное поле на M можно продолжить до векторного поля на M_F, то есть α — эпиморфизм. Но тогда $\mathrm{T}S^0=\mathrm{Ker}\, df=H^1(M, T_1)$. Рассмотрим теперь гомоморфизм Кодаиры—Спенсера для морфизма $g: S^0\to R$. Он индуцируется эпиморфизмом β в точной последовательности $\mathcal{O}_M$-модулей:

$$0\to \mathrm{T}_2\to \mathrm{T}_1\xrightarrow{\beta} F^*\otimes F\to 0,$$

и из точной последовательности

$$\begin{tikzcd}[column sep=small] & & & \mathrm{T}S^0 \arrow[r, "dg"] \arrow[d, equal] & \mathrm{T}R \arrow[d, equal] \\ \mathrm{H}^0(M, \mathrm{T}_1) \arrow[r, "\beta"] & \mathrm{H}^0(M, F^*\otimes F) \arrow[r, "\delta'"] & \mathrm{H}^1(M, \mathrm{T}_2) \arrow[r] & \mathrm{H}^1(M, \mathrm{T}_1) \arrow[r, "\beta^*"] & \mathrm{H}^1(M, F^*\otimes F)\end{tikzcd}$$

находим, что $\mathrm{Ker}\, dg=\mathrm{Ker}\,\beta_*=\mathrm{H}^1(M, \mathrm{T}_2)$, так как граничный гомоморфизм δ' равен нулю из-за существования проекции $M_F\to M^{(1)}=(M, \mathcal{O}M_F/\Lambda_2)$ (любое векторное поле на $M\gamma^{(1)}$ в этом случае можно продолжить на M_F, а сечения $F^*\otimes F$ — это четные поля, обращающиеся в нуль на M, поэтому они продолжаются до сечений T_1). Итак, $\mathrm{T}S^1=\mathrm{H}^1(M, \mathrm{T}_2)$.

Проведя аналогичное рассмотрение для вторых групп когомологий, мы получим, что препятствия к продолжению деформаций $\mathcal{M}$ супермногообразия M_F, не затрагивающих Gr, лежат в группе $H^2(M, T_2)$. Поэтому, применяя теорему Каврика [39] (см. также 2.4.2), мы получим утверждение о гладкости базы S^1 в случае, когда $\mathrm{H}^2(M, \mathrm{T}_2)=0$. □

§3.2. ДЕФОРМАЦИИ ПОДСУПЕРПРОСТРАНСТВ

Докажем теорему 2.14 о существовании универсальной деформации компактного подсуперпространства Y комплексного суперпространства X.

3.2.1. Замкнутое подсуперпространство $Y \subset X$ определяет когерентный пучок $F = \mathcal{O}_Y$ на X и эпиморфизм $\varphi: \mathcal{O}_X \to F$. Обратно, по эпиморфизму $\varphi: \mathcal{O}_X \to F$ когерентных $\mathcal{O}_X$-модулей однозначно восстанавливается подсуперпространство $Y \subset X$, задаваемое идеалом $I = \operatorname{Ker} \varphi$.

Подсуперпространство Y компактно, поэтому пучок $F = \mathcal{O}_Y$ на X имеет компактный носитель и по теореме 2.1.6. у него существует версальная деформация $\mathcal{F}$ с базой $R \in \mathrm{An}$. Рассмотрим эпиморфизм φ как сечение когерентного пучка $\mathrm{Hom}_{\mathcal{O}_X}(\mathcal{O}_X, F)$. Пучок $\mathrm{Hom}_{\mathcal{O}_{X \times R}}(\mathcal{O}_{X \times R}, \mathcal{F})$ когерентен и R-плоский, поэтому, по теореме 2.3.3, существует росток S над R, $\lambda: S \mapsto R$ и сечение $\tilde{\varphi}$ пучка $\mathrm{Hom}_{\mathcal{O}_{X \times S}}(\mathcal{O}_{X \times S}, \mathcal{F}_S)$, являющееся версальной деформацией элемента $\varphi \in H^0(X; \mathrm{Hom}(\mathcal{O}_X, F))$. Тензорно умножив гомоморфизм $\tilde{\varphi}: \mathcal{O}_{X \times S} \to \mathcal{F}_S$ на $\mathcal{O}_X = \mathcal{O}_{X \times S} / \mathfrak{m}_S \mathcal{O}_{X \times S}$, мы получим эпиморфизм $\varphi: \mathcal{O}_X \to F$, поэтому по следствию из леммы Накаямы [1] $\tilde{\varphi}$ — тоже эпиморфизм, и его ядро, таким образом, задает подсуперпространство $\mathcal{Y} \subset X \times S$, являющееся деформацией $Y \subset X$.

Докажем, что деформация $\mathcal{Y} \subset X \times S$ версальна. Пусть $\mathcal{Y}' \subset X \times S'$ — деформация подсуперпространства $Y \subset X$ над ростком $S' \in \mathrm{An}$. Тогда пучок $\mathcal{O}_{\mathcal{Y}'}$ является деформацией над S' когерентного пучка $F = \mathcal{O}_Y$. В силу версальности деформации $\mathcal{F}$ над R существует морфизм ростков $\lambda': S' \to R$ такой, что $(\mathrm{id}_X \times \lambda')^* \mathcal{F} = \mathcal{O}_{\mathcal{Y}'}$. Эпиморфизм $\tilde{\varphi}': \mathcal{O}_{X \times S'} \to \mathcal{O}_{\mathcal{Y}'}$ в таком случае является деформацией с базой S' элемента $\varphi \in H^0(X, \mathrm{Hom}\, \mathcal{O}_X(\mathcal{O}_X, F))$ и, следовательно, существует морфизм $j: S' \to S$ ростков над R, индуцирующий деформацию $\tilde{\varphi}'$ из версальной. Но тогда и $\mathcal{O}_{\mathcal{Y}'} = (\mathrm{id}_X \times \lambda')^* \mathcal{F} = (\mathrm{id}_X \times (\lambda \cdot j))^* \mathcal{F} = (\mathrm{id}_X \times j)^* (\mathrm{id}_X \times \lambda)^* \mathcal{F} = (\mathrm{id}_X \times j)^* \mathcal{F}_S$, поэтому морфизм j индуцирует и деформацию $\mathcal{Y}'$ из $\mathcal{Y}$.

Пусть $j': S' \to S$ — другой морфизм, индуцирующий $\mathcal{Y}'$ из $\mathcal{Y}$, и $\mathfrak{m}^2_{S'} = 0$. Два морфизма $\lambda_0 j$ и $\lambda \cdot j': S' \to R$ индуцируют над S' одну и ту же деформацию $\mathcal{F}_{S'} = \mathcal{O}_{Y'}$ пучка F. Из версальности теперь следует, что морфизмы $\lambda \cdot j$ и $\lambda \cdot j'$ совпадают и задают на S' одинаковые структуры ростка над R. Но в таком случае морфизмы j и j' индуцируют один и тот же гомоморфизм $\tilde{\varphi}' \mathcal{O}_{X \times S'} \to \mathcal{O}_{\mathcal{Y}'} = \mathcal{F}_{S'}$. Из версальности $\tilde{\varphi}$ получаем, что $j = j'$, то есть деформация $\mathcal{Y}$ версальна. Ее универсальность и утверждение о размерности базы мы выводим из следующего результата.

3.2.2. Предложение. Пусть $Y \subset X \times S$ — деформация компактного подсуперпространства $Y \subset X$, а $S' \supset S$ — инфинитезимальное расширение ростков комплексных суперпространств,

$A=\mathcal{O}_S$, $A'=\mathcal{O}_{S'}$,

$$J=\operatorname{Ker}(A'\to A),\quad \mathfrak{m}_{A'}J=0,\quad I_0=\operatorname{Ker}(\mathcal{O}_X\to\mathcal{O}_Y),$$
$$I=\operatorname{Ker}(\mathcal{O}_{X\times S}\to\mathcal{O}_{\mathcal{Y}}).$$

Тогда, если существует продолжение деформации $\mathcal{Y}$ до деформации $\mathcal{Y}'$ над S', то на множестве всех таких продолжений (с точностью до эквивалентности) транзитивно и эффективно действует группа $\operatorname{Hom}_{\mathcal{O}_Y}(I_0/I_0^2, \mathcal{O}_Y\otimes J)_{\bar{0}}$.

Доказательство. Пучок $\mathcal{O}_{\mathcal{Y}}$ является плоским A'-модулем, поэтому все члены точной последовательности $0\to I'\to\mathcal{O}_{X\times S'}\to\mathcal{O}_{\mathcal{Y}'}\to 0$ плоские A'-модули. Тензорно умножив ее над A' на точную последовательность $0\to J\to A'\to A\to 0$, соответствующую вложению $S\subset S'$, мы, таким образом, получим коммутативную диаграмму с точными строчками и столбцами

$$\begin{tikzcd}
 & 0 \arrow[d] & 0 \arrow[d] & 0 \arrow[d] & \\
0 \arrow[r] & I_0\otimes J \arrow[r] \arrow[d] & \mathcal{O}_X\otimes J \arrow[r] \arrow[d] & \mathcal{O}_Y\otimes J \arrow[r] \arrow[d] & 0 \\
0 \arrow[r] & I' \arrow[r] \arrow[d] & \mathcal{O}_{X\times S'} \arrow[r] \arrow[d] & \mathcal{O}_{\mathcal{Y}'} \arrow[r] \arrow[d] & 0 \\
0 \arrow[r] & I \arrow[r] \arrow[d] & \mathcal{O}_{X\times S} \arrow[r] \arrow[d] & \mathcal{O}_{\mathcal{Y}} \arrow[r] \arrow[d] & 0 \\
 & 0 & 0 & 0 &
\end{tikzcd}$$

Профакторизовав по $I_0\otimes J$, получаем, что задание продолжения $\mathcal{Y}'$ равносильно заданию четного гомоморфизма $\mathcal{O}_{X\times S'}$-модулей $\varphi: I\to\mathcal{O}_{X\times S'}/I_0\otimes J$, делающего коммутативной диаграмму

$$\begin{tikzcd}
 & & I \arrow[d, "\varphi"'] \arrow[dr] & & \\
0 \arrow[r] & \mathcal{O}_Y\otimes_{A'} J \arrow[r] & \mathcal{O}_{X\times S'}/I_0\otimes_{A'} J \arrow[r] & \mathcal{O}_{X\times S} \arrow[r] & 0
\end{tikzcd}$$

Разность двух таких гомоморфизмов — это элемент группы $\operatorname{Hom}_{\mathcal{O}_{X\times S'}}(I, \mathcal{O}_Y\otimes_{A'}J)_{\bar{0}}$. И обратно, эта группа действует на множестве рассматриваемых гомоморфизмов. Утверждение предложения теперь следует из равенства

$$\operatorname{Hom}_{\mathcal{O}_{X\times S'}}(I, \mathcal{O}_Y\otimes_{A'}J)_{\bar{0}}=\operatorname{Hom}_{\mathcal{O}_X}(I_0, \mathcal{O}_Y\otimes J)_{\bar{0}}=$$
$$=\operatorname{Hom}_{\mathcal{O}_Y}(I_0/I_0^2, \mathcal{O}_Y\otimes J)_{\bar{0}}.\ \square$$

3.2.3. Окончание доказательства теоремы.

Пусть R — база версальной деформации $\mathcal{Y}\to R$ для функтора $\mathrm{D\,Sub}(Y,\cdot)$. Касательное пространство TR тогда совпадает с суперпространством инфинитезимальных деформаций $\mathrm{D\,Sub}(Y, \mathrm{D})$, где $\mathcal{O}_D = \mathbf{C}[x, \xi]/(x^2, x\xi)$. Применив к инфинитезимальному расширению $\{*\} \hookrightarrow \mathrm{D}$ предложение 3.2.2 и учитывая, что одно (тривиальное) продолжение $Y \to \{*\}$ до деформации над D заведомо существует, мы получим, что $\mathrm{D\,Sub}(Y, \mathrm{D}) = \mathrm{Hom}_{\mathcal{O}_Y}(I_0/I_0^2, \mathcal{O}_Y \otimes \mathfrak{m}_\mathrm{D})_{\bar 0}$ и изоморфизм векторных суперпространств $TR = \mathrm{Hom}_{\mathcal{O}_Y}(I_0/I_0^2, \mathcal{O}_Y)$. Осталось доказать, что версальная деформация является в действительности универсальной. Для этого достаточно проверить, что она формально универсальна. Это следует из такой леммы.

3.2.4. Лемма. Пусть $S \subset S'$ — инфинитезимальное расширение ростков комплексных суперпространств, $\alpha' \in \mathrm{DSub}(Y, S')$ — деформация Y над S', $\alpha \in \mathrm{DSub}(Y, S)$ — ограничение α' на S. Рассмотрим ограничения $\beta_{k+1} \in \mathrm{DSub}(Y, R_{k+1})$ и $\beta_k \in \mathrm{DSub}(Y, R_k)$ версальной деформации $\beta \in \mathrm{DSub}(Y, R)$ на $k+1$-ю и k-ю инфинитезимальные окрестности точки $*$ в R. Пусть морфизм $f: S \to R_k$ такой, что $f^*(\beta_k) = \alpha$. Тогда существует не более одного морфизма $f': S' \to R_{k+1}$ такого, что $f'|_S = f$ и $f'^*(\beta_{k+1}) = \alpha'$.

Доказательство. Рассмотрим супералгебры $A = \mathcal{O}_S$, $A' = \mathcal{O}_{S'}$, $B_k = \mathcal{O}_{R_k}$, $B_{k+1} = \mathcal{O}_{R_{k+1}}$ и гомоморфизм $\varphi: B_k \to A$, отвечающий морфизму $f: S \to R_k$. Пусть φ', $\varphi': B_{k+1} \to A'$ — два гомоморфизма супералгебр, для которых коммутативна диаграмма

$$\begin{tikzcd} B_{k+1} \arrow[r, "\varphi'{,}\varphi''"] \arrow[d] & A' \arrow[d] \\ B_k \arrow[r, "\varphi"'] & A \end{tikzcd}$$

и таких, что $\varphi'_*(\beta_{k+1}) = \varphi''_*(\beta_{k+1}) = \alpha'$. Разность $\Delta = \varphi'' - \varphi'$ отображает B_{k+1} в $J = \mathrm{Ker}(A' \to A)$, и с учетом структуры A-модуля в J получаем, что

$$\begin{aligned} \Delta(b_1 b_2) &= \varphi''(b_1 b_2) - \varphi'(b_1 b_2) = \varphi''(b_1)\varphi''(b_2) - \varphi'(b_1)\varphi'(b_2) = \\ &= (\varphi'(b_1) + \Delta(b_1))(\varphi'(b_2) + \Delta(b_2)) - \varphi'(b_1)\varphi'(b_2) = \\ &= \varphi'(b_1)\Delta(b_2) + \Delta(b_1)\varphi'(b_2) = \varphi(b_1)\Delta(b_2) + (-1)^{b_1 b_2}\varphi(b_2)\Delta(b_1), \end{aligned}$$

то есть Δ является четным дифференцированием супералгебры B_{k+1} со значениями в J и, следовательно, принадлежит пространству $[(\mathfrak{m}_B/\mathfrak{m}_B^2)^* \otimes J]_{\bar 0} = [TR \otimes J]_{\bar 0}$.

Мы построили действие группы $[TR \otimes J]_{\bar 0}$ на множестве продолжений φ до гомоморфизма супералгебр $B_{k+1} \to A'$, согласованное с ее действием на множестве продолжений деформации α до деформации над A'. Пусть Δ — элемент этой группы, для которого $\Delta\varphi' = \varphi''$. Тогда $\Delta(\alpha') = \Delta(\varphi'_*(\beta_{k+1})) = (\Delta\varphi')_*(\beta_{k+1}) = \varphi''_*(\beta_{k+1}) = \alpha'$, то есть α' — неподвижная точка для Δ и, по предложению 3.2.2, элемент Δ тривиален. Поэтому $\varphi'' = \Delta\varphi' = \varphi'$ и лемма доказана. □

Если $f: S \to R$ морфизм, индуцирующий деформацию $\alpha \in \mathrm{DSub}(Y, S)$ из версальной деформации β, то его единственность можно теперь установить, рассматривая поочередно пары инфинитезимальных окрестностей $S_k \subset S_{k+1}$. Действительно, $f(S_k) \subset R_k$, а единственность морфизма $f_k = f|_{S_k}$, индуцирующего α_k из β_k, следует из леммы по индукции. Теорема доказана. □

3.2.5. Замечания. 1) Предложение 3.2.2 — это не что иное, как фрагмент теории препятствий (см. § 4.2) для функтора DSub. Такая теория действительно существует, но нам она не понадобится, поэтому мы этого не доказываем.

2) Доказательство леммы 3.2.4 представляет собой по существу вариант рассуждений Шлезингера [36], проведенных при несколько более слабых предположениях о функторе.

3) При доказательстве квазипредставимости функтора $\mathrm{DSub}(Y, \cdot)$ не использовался аналогичный чисто четный результат. Таким образом, мы получили новое доказательство теоремы Дуади [22], не основанное на теории банаховых аналитических пространств.

§ 3.3. ПРИМЕРЫ

3.3.1. Модули супермногообразий (см. § 3.1).

(1) Пусть $\mathrm{rk}\, F = 1$, тогда первая инфинитезимальная окрестность многообразия M в супермногообразии M_F совпадает с M_F. Поэтому $\mathrm{T}_2 = 0$ и любое $m|1$-мерное супермногообразие расщепимо.

(2) Пусть $\mathrm{rk}\, F = 2$, тогда $\mathrm{T}_2 = \bigwedge^2 F \otimes \mathrm{T}M$, и мы получаем известный результат о том, что супермногообразия $\mathscr{M}$ с $\mathrm{Gr}\, \mathscr{M} = M_F$ описываются элементами группы $\mathrm{H}^1(M; \bigwedge^2 F \otimes \mathrm{T}M)$ (см. [10], [15]). Если $M = \mathbf{P}^m$, а $F = \mathcal{O}(a) \oplus \mathcal{O}(b)$, то, как следует из теоремы Серра, $\mathrm{H}^1(M, \mathrm{T}_2) \neq 0$ только при $m = 1$, $a + b \leqslant -4$. В этом случае базой версальной деформации служит $\mathbf{C}^{-a-b-3}$, а нерасщепимые супермногообразия $\mathscr{M}$, для которых $\mathrm{Gr}\, \mathscr{M} = M_F$, параметризуются точками многообразия $\mathbf{P}^{-a-b-4} = \mathbf{P}(H^1(M, T_2))$.

(3) Если $\mathrm{rk}\, F = 3$, то для вычисления T_2 имеем следующую точную последовательность пучков $\mathcal{O}_M$-модулей:

$$0 \to \bigwedge^3 F \otimes F^* \to \mathrm{T}_2 \to \bigwedge^2 F \otimes \mathrm{T}M \to 0.$$

Точная когомологическая последовательность в этом случае показывает, что при $\mathrm{H}^2(M, \bigwedge^3 F \otimes F^*) = 0$ $\dim \mathrm{H}^1(M, T_2) = \dim \mathrm{H}^1(M, \bigwedge^2 F \otimes \mathrm{T}M) + \dim \mathrm{H}^1(M, \bigwedge^3 F \otimes F^*) - r$, где r — размерность пространства векторных полей на второй инфинитезимальной окрестности M в супермногообразии M_F, которые равны нулю на первой инфинитезимальной окрестности M и не продолжаются на все M_F. Проводя вычисления для $M = \mathbf{P}^m$, $F = \mathcal{O}(a) \oplus \mathcal{O}(b) \oplus \mathcal{O}(c)$ с использованием теоремы Серра, получаем, что $H^1(M, T_2) \neq 0$ только при $m = 1$. В этом случае $H^2(M, T_2) = 0$ и $\dim H^1(M, T_2) = d(a+b, c) + d(b+c, a) + d(c+$

$+a, b)$, где $d(x,y)=-2x-4$ при $x\leqslant -4$, $d(x,y)=1$ при $x=-3$ или $(x,y)=(-2,0)$ и $d(x,y)=0$ в остальных случаях.

3.3.2. Деформации супермногообразий. (1) Пусть $M=\mathbf{P}^{m|n}=\mathbf{P}(V)$ — проективное суперпространство (см. [12]). Тогда, применяя для вычисления TM точную последовательность $\mathcal{O}_M$-модулей, $0\to\mathcal{O}\to\tilde{V}^*\otimes\mathcal{O}(1)\to T\mathbf{P}^{m|n}\to 0$ (см. [12]), получаем следующий результат.

Супермногообразие $\mathbf{P}^{m|n}$ при $m\geqslant 2$ или при $n\leqslant 3$ является жестким (то есть любая его деформация тривиальна). База версальной деформации супермногообразия $\mathbf{P}^{1/n}$, $n\geqslant 4$, изоморфна окрестности нуля в суперпространстве $S^{n-3}(V)\otimes V/S^{n-2}(V)$, размерность которого равна $\left(2^{n-2}(n^2-3n-6)+\frac{n^2+3}{2}+2n+(-1)^n\times\right.$ $\left.\times\frac{n^2-4n+3}{2}\,\middle|\,2^{n-2}(n^2-3n-6)+\frac{n^2+3}{2}+2n-(-1)^n\frac{n^2-4n+3}{2}\right)$. В частности, $\mathbf{P}^{1|4}$ имеет $11|8$-мерную версальную деформацию.

(2) Пусть X — компактная риманова поверхность рода g, а F — обратимый пучок на X степени 0. Супермногообразие $X_F=(X, \Lambda' F)$ при $g=0$ жесткое. Так как X одномерно $\mathrm{H}^2(X, \mathrm{T}X_F)=0$, для вычисления $\mathrm{H}^1(X;\mathrm{T}X_F)$ используем теорему Римана—Роха. Тогда при $g=1$ база версальной деформации $2|2$-мерна, если $F=\mathcal{O}_X$, и $2|0$-мерна, если пучок F нетривиален. При $g\geqslant 2$ и $F\neq\mathcal{O}_X$ база B версальной деформации имеет размерность $4g-3|4g-4$. В этом случае B можно рассматривать как расслоение над $3g-3$-мерным многообразием модулей $\mathfrak{M}_g$ компактных римановых поверхностей рода g. Слой $S(x)$ расслоения $B\to\mathfrak{M}_g$ над точкой $x\in\mathfrak{M}_g$ — это $g|4g-4$-мерное супермногообразие, для которого подстилка $S(x)_{\mathrm{rd}}$ — это якобиево многообразие поверхности, соответствующей точке x. Если же $F=\mathcal{O}_X$, то база B версальной деформации $4g-3|4g-3$-мерна.

3.3.3. Деформации подсупермногообразий. (1) Пусть $X=\mathbf{P}^{m|n}=\mathbf{P}(V)$, $Y=\mathbf{P}^{a|b}=\mathbf{P}(W)$ и вложение $Y\subset X$ индуцировано вложением векторных суперпространств $V\hookleftarrow W$. Тогда нормальный пучок $N_{Y/X}$ изоморфен $\widetilde{V/W}\otimes\mathcal{O}_Y(1)$ и $H^0(Y;N_{Y/X})=V^*\otimes\otimes V/W$. В этом случае $H^1(Y;N_{Y/X})=0$, поэтому универсальная деформация подсупермногообразия Y в X имеет гладкую базу размерности $(a+1)(m-a)+b(n-b)\,|\,(a+1)(n-b)+b(m-a)$. Отображение Кодаиры—Спенсера для деформации Y с базой $\mathrm{Gr}(a+1|b, m+1|n)$ — моноформизм, поэтому она является универсальной, как и в чисто четном случае.

(2) Пусть теперь $X=\mathbf{C}^{0|n}$, $Y=\mathbf{C}^{0|b}$ и $Y\subset X$ — вложение векторных суперпространств. Тогда сечения $N_{Y/X}$ — это элементы факторпространств $W(0|n)/W(0|b)$, где $W(0|k)$ — суперпространство векторных полей на супермногообразии $\mathbf{C}^{0|k}$. Размерность суперпространства $\mathrm{H}^0(Y;N_{X/Y})$ равна $(n-b)2^{n-1}|$ $|(n-b)2^{n-1}$ и искривленный суперграссманиан, рассмотренный

в [8] (однородное пространство супергруппы $W(0|k)$, является базой универсальной деформации подсупермногообразия $\mathbf{C}^{0|b}$ в $\mathbf{C}^{0|n}$.

§ 3.4. СОВМЕСТНЫЕ ДЕФОРМАЦИИ И SUSY-СТРУКТУРЫ

В § 3.2 мы, занимаясь построением версальной деформации подсуперпространства, деформировали два разных аналитических объекта — пучок и сечение другого когерентного пучка. Аналогичным образом в § 4.3 строится четноверсальная деформация суперпространства, которое рассматривается как составной объект, состоящий из комплексного пространства, когерентного пучка и сечения другого пучка. Сейчас мы рассмотрим несколько задач об одновременной деформации нескольких структур, которые представляют самостоятельный интерес (в том числе и с точки зрения применений в физике).

3.4.1. Совместные деформации суперпространства и пучка. Пусть X — комплексное суперпространство, F — когерентный $\mathcal{O}_X$-модуль. Деформацией пары (X, F) над ростком суперпространства S называется набор, состоящий из деформации $\pi: \mathcal{X} \to S$ суперпространства X над S, когерентного S-плоского $\mathcal{O}_{\mathcal{X}}$-модуля $\mathcal{F}$ и изоморфизма $i: F \xrightarrow{\sim} \mathcal{F}|_{\pi^{-1}(*)}$. Морфизмы деформаций и индуцирование определяются стандартным образом. Деформацию, индуцированную из $(\mathcal{X}, \mathcal{F})$ при помощи отображения $T \to S$, мы будем обозначать $(\mathcal{X}_T, \mathcal{F}_T)$. Следующая теорема является аналогом соответствующего четного результата Сиу и Траутманна [37].

Теорема. Если X — компактное комплексное суперпространство, а F — когерентный $\mathcal{O}_X$-модуль, то у пары (X, F) существует версальная деформация.

Доказательство. Пусть $\pi: \mathcal{X} \to S$ — версальная деформация суперпространства X; рассмотрим когерентный пучок $F_0 := i_* F$ на $\mathcal{X}$, где $i: X = \pi^{-1}(*) \hookrightarrow \mathcal{X}$. Носитель F_0 компактен, поэтому у F_0 существует версальная деформация — когерентный пучок $\mathcal{F}$ на суперпространстве $\mathcal{X} \times T$. Выбрав теперь морфизм ростков $j: R \to T \times S$, универсальный относительно требования плоскости над R пучка $\mathcal{F}_R$ на суперпространстве $(\mathcal{X} \times T)_R$ (см. 1.4.2.3), мы получим деформацию $((\mathcal{X} \times T)_R, \mathcal{F}_R)$ пары (X, F) с базой R. Эта деформация версальна, что доказывается точно так же как в [37] или в 4.3.2. □

3.4.2. Совместные деформации суперпространства и подсуперпространства. Пусть X — комплексное суперпространство, Y — его подсуперпространство. Их совместной деформацией над ростком суперпространства S называется набор, состоящий из двух деформаций $\mathcal{X} \to S$ и $\mathcal{Y} \to S$ и S — вложения $\mathcal{Y} \hookrightarrow \mathcal{X}$, которое над точкой $* \in S$ совпадает с вложением $Y \hookrightarrow X$. Определения морфизма деформаций и индуцирования стандартны.

Теорема. У компактного комплексного суперпространства X и компактного подсуперпространства Y существует совместная версальная деформация.

Прежде, чем приступить к доказательству, рассмотрим несколько более общую ситуацию.

3.4.3. Естественные пучки. Пусть X — комплексное суперпространство, $\mathscr{D}$ — категория всех деформаций X, а $\mathscr{P}$ — категория пар $(\pi, \mathscr{F})$, где $\pi: \mathscr{X} \to S$ — деформация X, а $\mathscr{F}$ — когерентный S-плоский пучок на $\mathscr{X}$. Морфизм объекта $(\pi, \mathscr{F})$ в $(\pi', \mathscr{F}')$ в категории $\mathscr{P}$ — это пара $(f; i)$, где $f \in \mathrm{Mor}(\pi, \pi')$, а i — изоморфизм $i: \mathscr{F} \xrightarrow{\sim} f^*\mathscr{F}'$. Естественный пучок на X — это функтор из $\mathscr{D}$ в $\mathscr{P}$, переводящий π в пару $(\pi, \widehat{F}(\pi))$. Иными словами, естественный пучок на X — это согласованное относительно индуцирования семейство когерентных плоских пучков на деформациях X. Стандартный пример естественного пучка — это пучок вертикальных векторных полей. Пусть теперь $\widehat{F}$ — естественный пучок на X, а $F := \widehat{F}(X \to *)$ — когерентный пучок на X, соответствующий тривиальной деформации. Зафиксируем когерентный пучок G на X и гомоморфизм $\mathcal{O}_X$-модулей $f: G \to F$ и рассмотрим функтор Φ на категории $\mathscr{A}n$ ростков суперпространств, для которого $\Phi(S)$ — это множество троек $(\mathscr{X}, \mathscr{L}, \widehat{F})$, где $(\mathscr{X}, \mathscr{L})$ — деформация пары (X, G), а $\tilde{f}: \mathscr{L} \to \widehat{F}(\mathscr{X})$ — гомоморфизм, совпадающий над $*$ с f, с точностью до изоморфизма.

Теорема. Если X — компактное суперпространство, то функтор Φ квазипредставим.

Доказательство. Пусть S — база версальной деформации $(\mathscr{X}, \mathscr{L})$ пары (X, G), существующая по теореме 3.4.1. Рассматривая f как сечение пучка $\mathrm{Hom}(G, F)$, найдем по теореме 2.3.3 росток R над S и сечение $\tilde{f}$ пучка $\mathrm{Hom}(\mathscr{L}_R, \widehat{F}(\mathscr{X}_R))$, являющееся версальной деформацией f. Легко видеть, что тройка $(\mathscr{X}_R, \mathscr{L}_R, \tilde{f})$ квазипредставляет функтор Φ. □

3.4.4. Доказательство теоремы 3.4.2. Она немедленно следует из 3.4.3 в случае, когда $\hat{F}(\mathscr{X}) = \mathcal{O}_{\mathscr{X}}$, а G — пучок идеалов, задающий подсуперпространство $Y \subset X$, так как деформация мономорфизма $f: G \hookrightarrow \mathcal{O}_X$, в силу свойств плоских модулей, тоже является мономорфизмом. □

3.4.5. SUSY-семейства. Пусть S — комплексное суперпространство. Гладкий морфизм суперпространств $\mathscr{X} \to S$ относительной размерности $1|1$ вместе с локально свободным локально прямым подпучком $\mathscr{T}_1$ ранга $0|1$ пучка вертикальных векторных полей $\mathscr{T}_{\mathscr{X}/S}$ называется SUSY-семейством с базой S, если композиция скобки Пуассона—Фробениуса $[\ ,\ ]: \mathscr{T}_1^{\otimes 2} \to \mathscr{T}_{\mathscr{X}/S}$ и проекции $\mathscr{T}_{\mathscr{X}/S} \to \mathscr{T}_{\mathscr{X}/S}/\mathscr{T}_1$ является изоморфизмом. SUSY-семейство над точкой называется SUSY-кривой [13]. Деформация SUSY кривой — это SUSY-семейство над ростком S, слой которого над отмеченной точкой совпадает с этой SUSY-кривой. Деформации SUSY — кривых — это еще один пример применения теоремы 3.4.3.

Теорема. Пусть X — компактное $1|1$-мерное супермногообразие, $\mathcal{T}_1 \subset \mathcal{T}_X$ — SUSY-структура на X. Тогда SUSY-кривая $(X, \mathcal{T}_1)$ имеет универсальную деформацию с гладкой базой размерности $3g-3|2g-2$, где g — род комплексной кривой X_{rd}, $g \geqslant 2$.

Доказательство. Существование версальной деформации следует из 3.4.3 для случая $\hat{F}(\mathscr{X}) = \mathcal{T}_{\mathscr{X}/S}$, $G = \mathcal{T}_1$, f: $: \mathcal{T}_1 \hookrightarrow \mathcal{T}_{\mathscr{X}/S}$, так как гомоморфизм плоских $\mathcal{O}_{\mathscr{X}}$-модулей, являющийся мономорфизмом над отмеченной точкой $* \in S$, мономорфен и над S, и то же самое верно для изоморфизмов. Утверждение об универсальности следует из формальной теории деформаций, о гладкости базы — из 2.4.2 и отсутствия препятствий (они все лежат в нулевых группах когомологий), а утверждение о размерности базы следует из явного вычисления пространства инфинитезимальных деформаций (см., например, работу [13]). □

Глава 4

СУЩЕСТВОВАНИЕ ВЕРСАЛЬНЫХ ДЕФОРМАЦИЙ

В этой главе доказываются основные результаты работы — теоремы о существовании версальных деформаций для комплексных суперпространств и когерентных аналитических пучков. Техника конструкции версальных деформаций в обоих случаях по существу одна и та же. Пусть $m|n$ — размерность суперпространства инфинитезимальных деформаций. Сначала строится четноверсальная деформация ξ_0 (версальная в классе деформаций с четными базами), база B_0 которой является подсуперпространством ростка $(\mathbf{C}^m, 0)$. Деформацию ξ_0 всегда можно продолжить до деформации над B, где $B_0 \subset B \subset B_0^{(1)}$, ($B_0^{(q)}$ — q-я инфинитезимальная окрестность ростка B_0 в $\mathbf{C}^{m|n}$). Выбрав из всех таких продолжений «максимальное», мы получим 1-версальную деформацию ξ_1 с базой $B_1 \supset B_0$. Продолжить деформацию ξ_1 до деформации с базой $B \subset B_0^{(2)}$ можно уже не всегда. Для этого необходимо и достаточно, чтобы было равно нулю препятствие, которое в каждом из наших случаев лежит в группе когомологий некоторого комплекса. Условие равенства препятствия нулю выделяет в ростке $B_0^{(2)}$ подсуперпространство B_2 — базу 2-версальной деформации. Так, шаг за шагом, мы построим q-версальную деформацию ξ_q с базой B_q. Остается заметить, что последовательность $\xi_1, \xi_2, \ldots$ стабилизируется, если суперпространство инфинитезимальных деформаций конечномерно, и при $q \geqslant n$ деформации ξ_q являются версальными.

Описанная схема, как показано в §§ 4.1 и 4.2, применима и к другим задачам теории деформаций при условии, что существуют четноверсальная деформация и удовлетворяющая некоторым естественным требованиям техника продолжений и препятствий.

Индивидуальные особенности наших задач — деформаций суперпространств и пучков — проявляются при построении четноверсальных деформаций и теории препятствий. Четноверсальные деформации строятся в § 4.3 для суперпространств, а в § 4.6 для пучков. В § 4.4 приводится конструкция касательного комплекса суперпространства, которая в § 4.5 используется для построения теории препятствий для суперпространств. В § 4.7 строится теория препятствий для деформаций пучков.

§ 4.1. ДЕФОРМАЦИИ q-ВЕРСАЛЬНЫЕ И q-ПОЛНЫЕ

Здесь мы вводим удобные в техническом отношении понятия q-версальности и q-полноты и устанавливаем условия, выполнение которых гарантирует существование формальной q-версальной деформации. Условия эти алгебраические, поэтому вся работа будет вестись в категории локальных аналитических супералгебр Alg, двойственной категории ростков комплексных суперпространств.

4.1.1. Введем обозначения для подкатегорий категории Alg, с которыми мы сейчас будем работать. Пусть $A = A_{\bar 0} \oplus A_{\bar 1} \in \mathrm{Alg}$. Через $\mathfrak{m}_A$ и $\mathfrak{n}_A$ обозначим соответственно максимальный идеал супералгебры A и идеал, порожденный нечетными элементами. Обозначим через C_q и $C_{q,k}$ полные подкатегории категории Alg, состоящие из тех супералгебр A, для которых соответственно $\mathfrak{n}_A^{q+1} = 0$ и $\mathfrak{n}_A^{q+1} = \mathfrak{m}_A^{k+1}\mathfrak{n}_A^q = 0$. По 1.2.4 идеал $\mathfrak{n}_A$ имеет конечное число нечетных образующих $a_1, \ldots, a_n$, поэтому $\mathfrak{n}_A^{n+1} = 0$. Таким образом, любая аналитическая супералгебра принадлежит C_q при некотором q и фильтрация $C_0 \subset C_1 \subset C_2 \subset \ldots \subset C_q \subset \ldots$ категории C является полной.

4.1.2. Определение. Эпиморфизм $p: A' \to A$ локальных аналитических супералгебр называется *инфинитезимальным нечетным расширением* супералгебры A, если $\mathrm{Ker}\, p \cdot \mathfrak{n}'_{A'} = 0$ и $(\mathrm{Ker}\, p)^2 = 0$.

Иногда мы будем опускать слово нечетный и называть инфинитезимальным расширением саму алгебру A'.

Заметим, что идеал $\mathrm{Ker}\, p$ может состоять из одних только четных элементов. Термин нечетный означает лишь, что он аннулируется нечетными элементами (но не любым x из $\mathfrak{m}_{A'}$).

4.1.3. Лемма. Пусть $p: A' \to A$ инфинитезимальное расширение, $J = \operatorname{Ker} p$ и $A_0 = A/\mathfrak{n}_A$. Тогда J наделяется естественной структурой A_0-модуля и если $A \in \mathscr{C}_{q-1}$, то $A' \in \mathscr{C}_q$.

Доказательство. Пусть $j \in J$, $\bar{a} \in A_0$ — образ элемента $a \in A$ при проекции $A \to A/\mathfrak{n}_A = A_0$, $a' \in p^{-1}(a)$. Положим $\bar{a}j = a'j$ и покажем, что это определение корректно. Пусть $a_1 \in A$, $\bar{a}_1 = \bar{a}$ и $a'' \in p^{-1}(a_1)$. Тогда, так как $a_1 - a \in \mathfrak{n}_A$ и $p: \mathfrak{n}_{A'} \to \mathfrak{n}_A$ — эпиморфизм (идеал $\mathfrak{n}_A$ порождается нечетными образующими, прообразы которых в A' лежат в $\mathfrak{n}_{A'}$), мы можем найти элемент $\alpha \in \mathfrak{n}_{A'}$ такой, что $p(a'' + \alpha) = p(a') = a$. Отсюда $a'' + \alpha - a' = \beta \in J$ и $a''j = (a' + \beta - \alpha)j = a'j$.

Пусть теперь $A \in \mathscr{C}_{q-1}$ и $K = J \cap \mathfrak{n}_{A'}$. Тогда из равенства $p(\mathfrak{n}_{A'}) = \mathfrak{n}_A$ следует точность последовательности $0 \to K \to \mathfrak{n}_{A'} \xrightarrow{p} \mathfrak{n}_A \to 0$, откуда $\mathfrak{n}_{A'}^{q+1} = \mathfrak{n}_{A'} \cdot \mathfrak{n}_{A'}^q = \mathfrak{n}_{A'} \cdot p^{-1}(\mathfrak{n}_A^q) = \mathfrak{n}_{A'} \cdot K = 0$. Поэтому $A \in \mathscr{C}_q$. □

4.1.4. Пусть $A \in \mathrm{Alg}$ и M — конечнопорожденный A-модуль. Обозначим через $A[M]$ супералгебру $A \oplus M$ с умножением $(a+m)(a'+m') = aa' + (am' + (-1)^{\bar{a}'\bar{m}} \cdot a'm)$. Проекция $A[M] \to A$ задает инфинитезимальное расширение супералгебры A, если $\mathfrak{n}_A \cdot M = 0$.

Категория $\mathscr{C}_0$ — это не что иное, как категория всех локальных аналитических алгебр Alg_0. Нам понадобится также следующая характеризация подкатегории $\mathscr{C}_1$.

4.1.5. Лемма. Пусть $\mathscr{P}_0$ — категория пар (A, M), где $A \in \mathscr{C}_0$ — локальная аналитическая алгебра, M — конечнопорожденный A-модуль с нечетными образующими, морфизмами в которой являются пары согласованных гомоморфизмов $\alpha: A \to A'$, $\beta: M \to M'$. Тогда соответствие $(A, M) \mapsto A[M]$ задает эквивалентность категорий $\mathscr{P}_0$ и $\mathscr{C}_1$.

Доказательство. Сопоставляя супералгебре $B = B_{\bar{0}} \oplus B_{\bar{1}} \in \mathscr{C}$ пару $(B_{\bar{0}}, B_{\bar{1}}) \in \mathscr{P}_0$, мы получаем функтор $F: \mathscr{C} \to \mathscr{P}_0$, ограничение которого на $\mathscr{C}_1$ является обратным к $(A, M) \mapsto A[M]$. Действительно, если $B \in \mathscr{C}_1$, то умножение $B_{\bar{1}} \otimes B_{\bar{1}} \to B_{\bar{0}}$ нулевое и $B \simeq B_{\bar{0}}[B_{\bar{1}}]$. Обратно, для $A \in \mathscr{C}_0$ расширение $A[M]$ принадлежит $\mathscr{C}_1$ по 4.1.3, при этом $A[M]_{\bar{0}} = A$, $A[M]_{\bar{1}} = M$. □

4.1.6. Обобщая предыдущую конструкцию, рассмотрим категорию $\mathscr{P}_q$ (соответственно $\mathscr{P}$) пар (A, I), где $A \in \mathscr{C}_q$ (соответственно $\mathscr{C}$) локальная аналитическая супералгебра, I — идеал в A такой, что $I^2 = 0$, $\mathfrak{n}_A I = 0$. Морфизм пар $(A, I) \to (A', I')$ — это гомоморфизм супералгебр, переводящий I в I'.

Соответствие $A \mapsto (A, \mathfrak{n}_A{}^q)$ позволяет рассматривать $\mathscr{C}_q$ как полную подкатегорию категории $\mathscr{P}_q$.

С каждой парой $(A, I) \in \mathscr{P}$ связано инфинитезимальное расширение $p: A \to A/I$. Это соответствие задает эквивалентность категории всех инфинитезимальных нечетных расширений (с очевидными морфизмами) и категории $\mathcal{P}$.

Пополнением пары $(A, I)\in\mathcal{P}$ будем называть пару $(\hat{A}, \hat{I})$, где $\hat{A} := \varprojlim_k A/\mathfrak{m}_A^k I$, $\hat{I} := \varprojlim_k I/\mathfrak{m}_A^k I$, категорию полных пар $(\hat{A}, \hat{I})$ обозначим $\hat{\mathcal{P}}$. Пара (A, I) называется *артиновой*, если $\mathfrak{m}^k I = 0$ для некоторого k. Если (A, I) — артинова пара, то $(\hat{A}, \hat{I}) = (A, I)$. Пополнением локальной аналитической супералгебры A будем называть супералгебру $\hat{A} := \varprojlim_k A/\mathfrak{m}_A^k \mathfrak{n}_A^q$, где $q = \min\{n \mid A\in\mathcal{C}_n\}$. Если $A\in\mathcal{C}_0$, то $\hat{A}$ — это обычное пополнение локальной алгебры. Категорию пополненных алгебр обозначим через $\hat{\mathcal{C}}$. Аналогично определяются подкатегории $\hat{\mathcal{P}}_q\subset\hat{\mathcal{P}}$ и $\hat{\mathcal{C}}_q\subset\hat{\mathcal{C}}$.

4.1.7. Лемма. Пусть $p' : A' \to A$, $p'' : A'' \to A$ — инфинитезимальные расширения локальной аналитической супералгебры A. Супералгебра $A' \times_A A'' = \{(a', a'') \mid a'\in A', a''\in A'', p'(a') = p''(a'')\}$ является локальной аналитической супералгеброй, а проекция $A' \times_A A'' \to A$ — инфинитезимальным расширением. Если $A'' = A'$ и $I = \operatorname{Ker} p'$, то $A' \times_A A' \approx A'[I]$.

Доказательство. Выберем эпиморфизм $\pi_0 : \mathbb{C}\{x_1, \ldots, x_l\} \to A$, и поднимем его до эпиморфизмов $\pi' : \mathbb{C}\{x_1, \ldots, x_l, y_1, \ldots, y_m\} \to A'$ и $\pi'' : \mathbb{C}\{x_1, \ldots, x_l, z_1, \ldots, z_n\} \to A''$ таких, что диаграммы

$$\begin{tikzcd} \mathbb{C}\{x, y\} \arrow[r, "\pi'"] \arrow[d] & A' \arrow[d, "p'"] \\ \mathbb{C}\{x\} \arrow[r, "\pi"'] & A \end{tikzcd} \quad \text{и} \quad \begin{tikzcd} \mathbb{C}\{x, z\} \arrow[r, "\pi''"] \arrow[d] & A'' \arrow[d, "p''"] \\ \mathbb{C}\{x\} \arrow[r, "\pi_0"] & A \end{tikzcd}$$

коммутативны и $\pi'(y_i)\in\operatorname{Ker} p'$, $\pi''(z_j)\in\operatorname{Ker} p''$, $i = 1, \ldots, m$, $j = 1, \ldots, n$.

В таком случае мы получим коммутативную диаграмму

$$\begin{tikzcd} & \mathbb{C}\{x,y,z\} \arrow[dl] \arrow[dr] \arrow[dd, dashed, "\pi"] & \\ \mathbb{C}\{x,y\} \arrow[dd, "\pi'"'] & & \mathbb{C}\{x,z\} \arrow[dd, "\pi''"] \\ & A'\times_A A'' \arrow[dl] \arrow[dr] & \\ A' \arrow[dr, "p'"'] & & A'' \arrow[dl, "p''"] \\ & A & \end{tikzcd}$$

и пунктирную стрелку $\pi : \mathbb{C}\{x, y, z\} \to A'\times_A A''$. В силу выбора π' и π'' гомоморфизм π является эпиморфизмом, поэтому $A'\times_A A''$ — локальная аналитическая супералгебра.

Ядро K проекции $A'\times_A A'' \to A$ состоит из пар (i', i''), где $i'\in\operatorname{Ker} p'$, $i''\in\operatorname{Ker} p''$, откуда $K^2 = 0$ и $\mathfrak{n}K = 0$, так как A' и A'' — инфинитезимальные расширения. Поэтому и $A'\times_A A'' \to A$ — тоже инфинитезимальное расширение.

Наконец, если $A''=A'$ и $I=\operatorname{Ker} p'$, то соответствие $(a',a'')\mapsto(a',a''-a')$ задает изоморфизм $A'\times_A A'$ и $A'[I]$. □

4.1.8. Определение. Пусть $\Phi:\mathscr{C}\to\mathrm{Ens}$ — ковариантный функтор. Элементы множества $\Phi(A)$ для $A\in\mathscr{C}$ мы будем называть деформациями над A. Если $f:A\to B$ — морфизм локальных супералгебр и $\alpha\in\Phi(A)$, то деформацию $\beta=\Phi(f)(\alpha)$ над B мы будем иногда обозначать $f_*\alpha$. Морфизм деформаций $\alpha\to\beta$ — это такой морфизм $f:A\to B$, что $f_*\alpha=\beta$. Функтор Φ называется *q-квазипредставимым*, если его ограничение Φ_q на подкатегорию $\mathscr{C}_q$ квазипредставимо. Если $A\in\mathscr{C}_q$, $\alpha\in\Phi(A)$ — пара, квазипредставляющая Φ_q, то деформацию α с базой A будем называть *q-версальной*. Если функтор 0-квазипредставим, то его 0-версальная деформация называется также *четноверсальной*.

4.1.9. Определение. Пусть $(A,I)\in\mathscr{P}_q$. Деформация $\alpha\in\Phi(A)$ называется *q-полной*, если

(i) деформация $\pi_*\alpha\in\Phi(A/I)$ является $q-1$-версальной (здесь $\pi:A\to A/I$ каноническая проекция) и

(ii) пусть $(A',I')\in\mathscr{P}_q$ и $\alpha'\in\Phi(A')$. Тогда для любого морфизма $f:A/I\to A'/I'$, для которого $f_*(\pi_*\alpha)=\pi'_*\alpha'$, существует накрывающий его морфизм $\bar{f}:A\to A'$, для которого $\bar{f}_*\alpha=\alpha'$.

4.1.10. Определения *формальной* q-версальности и формальной q-полноты получаются из определений 4.1.8 и 4.1.9 заменой категорий $\mathscr{C}_q$ и $\mathscr{P}_q$ соответственно на $\hat{\mathscr{C}}_q$ и $\hat{\mathscr{P}}_q$.

4.1.11. Лемма. Пусть $A\in\mathscr{C}_{q+1}$ — база $q+1$-версальной деформации α для функтора Φ. Тогда пара $(A_q,\pi_*\alpha)$, где $A_q:=A/\mathfrak{n}_A^{q+1}$ и $\pi:A\to A_q$ — каноническая проекция, q — квазипредставляет Φ.

Доказательство. Пусть $B\in\mathscr{C}_q$, $\beta\in\Phi(B)$, тогда из $q+1$ — версальности деформации α следует, что существует морфизм $f:A\to B$, для которого $f_*\alpha=\beta$. Поскольку $f(\mathfrak{n}_A^{q+1})\subset\mathfrak{n}_B^{q+1}$, существует морфизм f_q, делающий коммутативной диаграмму

$$\begin{tikzcd} A \arrow[r, "f"] \arrow[d, "\pi"'] & B. \\ A_q \arrow[ur, dashed, "f_q"'] & \end{tikzcd}$$

В таком случае $f_{q*}\cdot\pi_*(\alpha)=(f_q\cdot\pi)_*\alpha=f_*\alpha=\beta$.

При $q\geqslant 1$ гомоморфизм $\mathfrak{m}_A/\mathfrak{m}_A^2\to\mathfrak{m}_{A_q}/\mathfrak{m}_{A_q}^2$ является изоморфизмом, а при $q=0$ — эпиморфизмом суперпространств, поэтому единственность индуцирующего морфизма $f_q:A_q\to B$ на уровне касательных пространств следует из справедливости этого для морфизма $f:A\to B$. □

4.1.12. Лемма. Пусть у функтора Φ существуют q-формально полная деформация $\bar{\alpha}\in\Phi(\bar{A})$ и q — формально версальная деформация $\bar{\beta}\in\Phi(\bar{B})$, $(\bar{A},\bar{I})\in\hat{\mathscr{P}}_q$, $\bar{B}\in\hat{\mathscr{C}}_q$. Тогда существует конечнопорожденный $\hat{B}_0$-модуль $\overline{M}$ такой, что суперальгебра $\overline{A}$ изоморфна $\overline{B}[\overline{M}]$.

Доказательство. В силу q-полноты $\overline{\alpha}$ и q-версальности $\overline{\beta}$ существуют морфизмы $f:\overline{B}\to\overline{A}$ и $q:\overline{A}\to\overline{B}$ такие, что $f_*\overline{\beta}=\overline{\alpha}$, $g_*\overline{\alpha}=\overline{\beta}$ и $g_{q-1}:\overline{A}/I\to\overline{B}_{q-1}$ — изоморфизм. Но тогда $(gf)_*\overline{\beta}=\overline{\beta}$, и из q-версальности $\overline{\beta}$ получаем, что $gf:\overline{B}\to\overline{B}$ — изоморфизм. Пусть $h=(gf)^{-1}$, тогда морфизм $\varphi=f_0h:\overline{B}\to\overline{A}$ является сечением морфизма g, превращающим $\overline{A}$ в $\overline{B}$-алгебру. Пусть $\overline{M}=\operatorname{Ker} g$, тогда $\mathfrak{n}_{\overline{A}}\overline{M}=0$, поэтому изоморфизм $\overline{B}$-модулей $\overline{B}[\overline{M}]\xrightarrow{\sim}\overline{A}$, $(b, m)\mapsto\varphi(b)+m$ является гомоморфизмом аналитических суперальгебр. Отображение $\varphi^{-1}:\overline{A}\to\overline{B}[M]$ является искомым изоморфизмом. □

4.1.13. Сформулируем аналоги условий Шлессингера [36], которые влекут за собой существование формальной q-версальной деформации для функтора Φ. Для любой пары инфинитезимальных расширений $p':A'\to A$ и $p'':A''\to A$ определено отображение $\varphi:\Phi(A'\times_A A'')\to\Phi(A)\times\Phi_{(A)}\Phi(A''):\alpha\mapsto(pr_{1*}\alpha_1\text{-}pr_{2*}\alpha)$. Нас будут интересовать следующие условия на Φ.

($S1$) Если A, A', $A''\in\hat{\mathscr{P}}$, то φ — сюръекция.

($S2$) Если $A=\mathbf{C}$, $A'=\mathbf{C}[M]$, где M — конечномерное векторное суперпространство, $A''\in\hat{\mathscr{P}}$, то φ — биекция.

Условие ($S1$) означает, что пару деформаций $\alpha'\in\Phi(A')$ и $\alpha''\in\Phi(A'')$, согласованных над A (т. е. $p_*'\alpha'=p_*''\alpha''\in\Phi(A)$) можно продолжить до деформации $\alpha\in\Phi(A'\times_A A'')$. Условие ($S2$) утверждает, что в случае, когда $A'=\mathbf{C}[M]$, такое продолжение единственно.

4.1.14. Мы будем использовать следующую интерпретацию этих условий. Пусть $0\to I\to A'\xrightarrow{p}A\to 0$ — инфинитезимальное расширение, для которого $\mathfrak{m}_A I=0$. В таком случае I — конечномерное векторное пространство над $\mathbf{C}$. Гомоморфизм $A'\times_A A'\to A'[I]$, $(a_1, a_2)\mapsto a_1+(a_2-a_1)$ является изоморфизмом аналитических суперальгебр. Применим теперь условия ($S1$) и ($S2$) к декартовым квадратам.

$$\begin{tikzcd} & A'[I] \arrow[dl, "pr_1"'] \arrow[dr, "pr_2"] & \\ A' \arrow[dr, "p"'] & & A' \arrow[dl, "p"] \\ & A & \end{tikzcd} \quad \text{и} \quad \begin{tikzcd} & A'[I] \arrow[dl, "pr_1"'] \arrow[dr, "\pi"] & \\ A' \arrow[dr] & & \mathbf{C}[I] \arrow[dl] \\ & \mathbf{C} & \end{tikzcd}.$$

Обозначим через Φ_I множество $\Phi(\mathbf{C}[I])$ и выберем $\alpha'\in\Phi(A')$, $\gamma\in\Phi_I$. По условию ($S2$), $\Phi(A'\times_A A')=\Phi(A'[I])\simeq\Phi(A')\times\Phi_I$, поэтому существует единственный элемент $\tilde{\alpha}\in\Phi(A'\times'_A A')$, продолжающий α' и γ. Полагая $\gamma(\alpha')=pr_{2*}\tilde{\alpha}\in\Phi(A')$, мы получим отображение $\Phi_I\times\Phi(A')\to\Phi(A')$. По $(S1)$ любые два продолжения деформации $\alpha\in\Phi(A)$ до деформаций $\alpha_1,\alpha_2\in\Phi(A')$ определяют деформацию $\tilde{\alpha}\in\Phi(A'\times_A A')$. Если $\gamma=\pi_*(\tilde{\alpha})$, то $\gamma(\alpha_1)=\alpha_2$. Поэтому отображение $\Phi_I\times\Phi(A')\to\Phi(A')$ сюръективно на слоях морфизма $\Phi(A')\to\Phi(A)$. Если вместо расширения p рассмотреть $0\to I\to \mathbf{C}[I]\to\mathbf{C}\to 0$, то на Φ_I возникнет бинарная операция, превращающая Φ_I в коммутативную группу, транзитивно действующую на множестве продолжений деформации $\alpha\in\Phi(A)$ до деформации $\alpha'\in\Phi(A')$. Гомоморфизм $\mu_t:\mathbf{C}[I]\to\mathbf{C}[I]$, $a+i\mapsto a+ti$, $t\in\mathbf{C}$, индуцирует на Φ_I умножение μ_{t*}, превращая Φ_I в векторное пространство над $\mathbf{C}$. В пространстве $\Phi(\mathrm{D})$ (где $\mathrm{D}=\mathbf{C}[x,\xi]/(x^2,x\xi)$) введем градуировку, индуцированную разложением $\Phi(\mathrm{D})=\Phi(\mathbf{C}[x]/(x^2)\times\mathbf{C}[\xi])\simeq\simeq\Phi(\mathbf{C}[x]/(x^2))\times\Phi(\mathbf{C}[\xi])$, которая наделяет $\Phi(\mathrm{D})$-структурой векторного суперпространства. Это суперпространство мы будем называть касательным суперпространством функтора Φ, обозначать его через t_Φ. Пусть теперь идеал I как векторное суперпространство над $\mathbf{C}$ изоморфен $\mathbf{C}^{m|n}$, а $M_{1|0}$ и $M_{0|1}$ обозначают соответственно суперпространства $\mathbf{C}^{1|0}$ и $\mathbf{C}^{0|1}$. Тогда из $(S2)$ и равенства

$$\mathbf{C}[I]=\underbrace{\mathbf{C}[M_{1|0}]\times_{\mathbf{C}}\ldots\times_{\mathbf{C}}\mathbf{C}[M_{1|0}]}_{m}{}_{\mathbf{C}}\times\underbrace{\mathbf{C}[M_{0|1}]\times_{\mathbf{C}}\ldots\times_{\mathbf{C}}\mathbf{C}[M_{0|1}]}_{n}$$

следует, что $\Phi_I=\Phi_{M_{1|0}}\times\ldots\times\Phi_{M_{1|0}}\times\Phi_{M_{0|1}}\times\ldots\times\Phi_{M_{0|1}}=$ $=[t_\Phi\otimes I]_{\bar{0}}$.

4.1.15. Предложение. Пусть $q\geqslant 2$ и предположим, что функтор Φ имеет $q-1$ версальную деформацию и выполнены условия $(S1)$ и $(S2)$. Тогда Φ формально q-квазипредставим.

Доказательство. Пусть $B_{q-1}\in\mathscr{C}_{q-1}$ — база $q-1$-версальной деформации $\beta_0\in\Phi(B_{q-1})$. Пусть $\dim\mathfrak{m}_{B_{q-1}}/\mathfrak{m}^2_{B_{q-1}}=m\,|\,n$. Представим B_{q-1} в виде факторалгебры супералгебры $A=\mathbf{C}\{x_1,\ldots$ $\ldots,x_m,\xi_1,\ldots,\xi_n\}/J$. Тогда $J\subset\mathfrak{m}^2_A$. Мы построим по индукции последовательность идеалов $I_k\subset A$ и деформаций $\beta_k\in\Phi(A/I_k)$ таких, что $J=I_0\supset I_1\supset I_2\supset\ldots,\mathfrak{m}_A I_k\subset I_{k+1}$ и $\pi_{k*}\beta_{k+1}=\beta_k$, где $\pi_k: A/I_{k+1}\to A/I_k$ — каноническая проекция, а $\hat{\beta}=\varprojlim\beta_k$ является формальной q-версальной деформацией функтора Φ. Пусть I_k и $\beta_k\in\Phi(A/I_k)$ построены. Рассмотрим множество идеалов I, для которых $I_k\supset I\supset\mathfrak{m}_A I_k$ и β_k продолжается до деформации β над A/I. Докажем, что в этом множестве есть минимальный элемент. Так как $\dim I_k/\mathfrak{m}_A I_k<\infty$, достаточно показать, что пересечение двух идеалов I' и I'' из нашего множества принадлежит этому множеству. Пусть элементы $i_1,\ldots,i_r\in I_k$ порождают векторное суперпространство $I_k/(I'+I'')$ над $\mathbf{C}$. Множество

$\widetilde{I}'=I'+\mathbf{C}i_1+\ldots+\mathbf{C}i_r$ является идеалом, так как $\mathfrak{m}i_s \in I'$. При этом β_0 продолжается до деформации β над A/I и $\widetilde{I}'\cap I''=$ $=I'\cap I''$. Поэтому мы можем считать, что $I'+I''=I_k$. В таком случае отображение $A/I'\cap I''\to A/I'\times_{A/I_k}A/I''\colon a \bmod I'\cap I''\mapsto$ $\mapsto(a \bmod I', a \bmod I'')$ является изоморфизмом. Но согласно $(S1)$, существует элемент $\beta\in\Phi(A/I'\times_{A/I}A/I'')$, продолжающий β' и β'', поэтому β_k можно продолжить до деформации над $A/I'\cap I''$. Следовательно, в рассматриваемом множестве идеалов существует минимальный элемент. Пусть это и будет идеал I_{k+1}, а в качестве β_{k+1} возьмем произвольное продолжение деформации β_k на A/I_{k+1}.

Осталось доказать, что получающаяся в результате формальная деформация $\widetilde{\beta}=\varprojlim\beta_k$ является формально q-версальной. Пусть $\widetilde{C}=\varprojlim C_r\in\hat{\mathscr{C}}_q$, $C_r\in\mathscr{C}_q$, $C_0\in\mathscr{C}_{q-1}$ и ядро K инфинитезимального расширения $C_{r+1}\to C_r$ порождено над $\mathbf{C}$ одним элементом. Пусть $\widetilde{\gamma}=\varprojlim\gamma_r\in\Phi(\widetilde{C}_0)$, где $\gamma_r\in\Phi(C_r)$. Морфизм деформаций $\varphi\colon\widetilde{\beta}\to\widetilde{\gamma}$, — это согласованное семейство морфизмов $\varphi_k\colon\widetilde{\beta}\to\gamma_k$. Мы построим его индукцией по k. При $k=0$ супералгебра $C_0\in\mathscr{C}_{q-1}$, поэтому существование морфизма $\beta_0\to\gamma_0$ следует из $q-1$-версальности деформации $\beta_0\in\Phi(B_0)$. Пусть мы уже построили морфизм $\widetilde{\beta}\to\beta_k\xrightarrow{\varphi_k}\gamma_k$. Прежде всего покажем, что существует гомоморфизм локальных супералгебр $\psi\colon A/I_{k+1}\to C_{k+1}$, накрывающий гомоморфизм $\varphi_k\colon A/I_n\to C_k$, то есть

$$\begin{tikzcd} A/I_{k+1} \arrow[r, "\psi"] \arrow[d] & C_{k+1} \arrow[d] \\ A/I_k \arrow[r, "\varphi_k"] & C_k. \end{tikzcd}$$

Действительно, по условию $(S1)$ существует деформация $\delta\in\Phi(A/I_k\times_{C_k}C_{k+1})$, продолжающая деформации β_k и γ_{k+1}. Поднимем эпиморфизм $A\to A/I_k$ до горизонтальной стрелки коммутативного треугольника

$$\begin{tikzcd} A \arrow[rr, dashed, "\rho"] \arrow[dr] & & A/I_k\times_{C_k}C_{k+1} \arrow[dl, "\pi"] \\ & A/I_k & \end{tikzcd}$$

Тогда идеал $M=\operatorname{Ker}\pi$ порожден над $\mathbf{C}$ одним элементом и либо $A/I_k\times_{C_k}C_{k+1}\simeq A/I_k[M]$, либо ρ — эпиморфизм. В первом случае композиция эпиморфизма $A\to A/I_k$ с вложением $A/I_k\hookrightarrow$ $\hookrightarrow A/I_k[M]$ и проекцией $\mathrm{pr}_2\colon A/I_k\times_{C_k}C_{k+1}\to C_{k+1}$ дает требуемый гомоморфизм ψ, а во втором мы получаем изоморфизм $A/I_k\times_{C_k}C_{k+1}\simeq A/J$, где $I_k\supset J\supset\mathfrak{m}I_k$ и деформация $\delta\in\Phi(A/J)$

продолжает β_k. Из свойства минимальности идеала I_{k+1} получим, что $J \supset I_{k+1}$ и гомоморфизм ρ пропускается через проекцию $A \to A/I_{k+1}$, откуда находим требуемый морфизм:

$$\begin{tikzcd}
A \arrow[r] \arrow[d] & A/J = A/I_k \times_{C_k} C_{k+1} \arrow[d] \\
A/I_{k+1} \arrow[ur, dashed] \arrow[r, dashed, "\psi"] & C_{k+1}
\end{tikzcd}$$

Теперь нам осталось подправить гомоморфизм ψ так, чтобы получить морфизм деформаций $\varphi_{k+1}: \beta_{k+1} \to \gamma_{k+1}$. Пусть $\gamma' = \psi_* \beta_{k+1} \in \Phi(C_{k+1})$. В силу условий ($S1$) и ($S2$) два продолжения γ' и γ_{k+1} деформации γ_k с C_k на C_{k+1} переводятся друг в друга под действием некоторого элемента $g \in [t_\Phi \otimes K_{\bar{0}}]$. Но деформация β_{q-1} является $q-1$-версальной и $q \geqslant 2$, поэтому t_Φ канонически отождествляется с $\mathfrak{m}_{B_{q-1}}/\mathfrak{m}^2_{B_{q-1}} = \mathfrak{m}_A/\mathfrak{m}^2_A$. Но группа $[\mathfrak{m}_A/\mathfrak{m}^2_A]_{\bar{0}} = [\mathfrak{m}_{A/I_{k+1}}/\mathfrak{m}^2_{A/I_{k+1}}]_{\bar{0}}$ транзитивно действует на множестве продолжений гомоморфизма $A/I_{k+1} \to C_k$ до гомоморфизма $A/I_{k+1} \to C_{k+1}$. Эти два действия согласованны, поэтому гомоморфизм $\varphi_{k+1} = g \cdot \psi$ дает искомый морфизм деформаций $\beta_{k+1} \to \gamma_{k+1}$. Итак, деформация $\tilde{\beta}$ является q-полной. Ее q-версальность следует из того, что эпиморфизм $A/I_k \to A/I_0 = B_{q-1}$ индуцирует изоморфизм $\mathfrak{m}_{A/I_k}/\mathfrak{m}^2_{A/I_k} \xrightarrow{\sim} \mathfrak{m}_{B_{q-1}}/\mathfrak{m}^2_{B_{q-1}}$ (так как $I_k \subset I_0 \subset \mathfrak{m}^2_A$), а поэтому деформация $\pi_* \beta_k$, где $\pi: A/I_k \to (A/I_k)/\mathfrak{n}^q_{A/I_k} = B'$, является $q-1$-полной, и т. к. $\mathfrak{m}_{B'}/\mathfrak{m}^2_{B'} = \mathfrak{m}_{B_{q-1}}/\mathfrak{m}^2_{B_{q-1}}$, $q-1$-версальной.

4.1.16. Замечание. Повторяя эти рассуждения в чисто формальном случае, мы получим, что условия ($S1$) и ($S2$) позволяют построить формальную q-версальную деформацию, если существует формальная $q-1$-версальная деформация, $q \geqslant 2$. Отсюда следует, что при выполнении этих условий из конечномерности векторного суперпространства t_Φ вытекает формальная квазипредставимость функтора Φ.

§ 4.2. ДОСТАТОЧНОЕ УСЛОВИЕ КВАЗИПРЕДСТАВИМОСТИ

В этом параграфе мы докажем, что при наличии хорошей теории препятствий для функтора Φ из существования четно-версальной деформации следует квазипредставимость Φ.

4.2.1. Будем говорить, что у функтора Φ существует *теория препятствий для инфинитезимальных расширений*, если выполнены следующие условия:

($O1$) Для любой $A \in \mathscr{C}$ существует комплекс конечно порожденных свободных $A_0 = A/\mathfrak{n}_A$-модулей $L^\bullet = (L^1 \xrightarrow{d_1} L^2 \xrightarrow{d_2} L^3)$ такой, что для любого инфинитезимального расширения $0 \to I \to B' \xrightarrow{\pi} B \to 0$

морфизма $\varphi: A \to B$ и деформации $\alpha \in \Phi(A)$ существует класс $\omega_\pi(\alpha) \in \mathrm{H}^2(L^\cdot \otimes I)_0$, функториально зависящий от π, обращение в нуль которого необходимо и достаточно для существования деформации $\beta' \in \Phi(B')$, продолжающей $\beta = \varphi_* \alpha$.

($O2$) Для $A \in \mathscr{C}$ существует комплекс конечнопорожденных свободных A_0-модулей $L^\cdot = (L^0 \to L^1 \to L^2)$ такой, что группа $\mathrm{H}^1(L^\cdot \otimes I)_0$ транзитивно и функториально по π действует на множестве продолжений деформации $\beta = \varphi_* \alpha \in \Phi(B)$ до деформации $\beta' \in \Phi(B')$.

($O3$) В ситуации условия $S2$, если $B \in \mathscr{C}_0$, то множество продолжений деформации β до деформации над $B' = B[I]$ является главным однородным пространством группы $\mathrm{H}^1(L^\cdot \otimes \otimes I)_0$.

4.2.2. Предложение. Если у функтора Φ существует теория препятствий для инфинитезимальных расширений, то Φ удовлетворяет условиям ($S1$) и ($S2$) из 4.1.13.

Доказательство. Пусть $A' \to A$ и $A'' \to A$ инфинитезимальные расширения супералгебры $A \in \mathscr{C}$, а $\alpha' \in \Phi(A')$, $\alpha'' \in \Phi(A'')$ — продолжения деформации $\alpha_0 \in \Phi(A)$.

Рассмотрим коммутативную диаграмму инфинитезимальных расширений

$$\begin{tikzcd}
 & A' \times_A A'' \arrow[dl, "\tilde{\pi}''"'] \arrow[dr, "\tilde{\pi}'"] \arrow[dd, "\pi"] & \\
A' \arrow[dr, "\pi'"'] & & A'' \arrow[dl, "\pi''"] \\
 & A &
\end{tikzcd}$$

и применим ($O1$) к расширениям $\tilde{\pi}''$ и π''. Пусть $I = \mathrm{Ker}\, \tilde{\pi}'' = \mathrm{Ker}\, \pi''$ и $\omega_{\tilde{\pi}''}(\alpha') \in \mathrm{H}^2(L^\cdot \otimes_{A_0} I)_{\bar{0}}$ — препятствие к продолжению α' до деформации над $A' \times_A A''$. Тогда $\pi'_*(\omega_{\tilde{\pi}''}(\alpha')) = \omega_{\pi''}(\alpha_0) = 0$, так как α продолжается на A'', а поэтому и $\omega_{\tilde{\pi}''}(\alpha') = 0$, так как $\pi'_*: \mathrm{H}^2(L^\cdot \otimes \mathrm{Ker}\, \tilde{\pi}'') \xrightarrow{\sim} \mathrm{H}^2(L^\cdot \otimes \mathrm{Ker}\, \pi'')$ — изоморфизм.

Таким образом, α' можно продолжить до деформации $\tilde{\alpha} \in \Phi(A' \times_A A'')$. Пусть $\bar{\alpha}' = \tilde{\pi}'_*(\tilde{\alpha}) \in \Phi(A'')$. Тогда $\pi''_*(\bar{\alpha}') = \pi''_* \tilde{\pi}'_*(\tilde{\alpha}) = (\pi'' \cdot \tilde{\pi}')_*(\tilde{\alpha}) = (\pi' \cdot \tilde{\pi}'')_*(\tilde{\alpha}) = \pi'_* \tilde{\pi}''_*(\tilde{\alpha}) = \pi'_*(\alpha') = \alpha_0 = \pi''_*(\alpha'')$, следовательно, в силу ($O2$) продолжение α'' деформации α_0 можно получить из $\bar{\alpha}'$, действуя элементом $\gamma \in \mathrm{H}^1(L^\cdot \otimes I)_{\bar{0}}$. Пусть $\tilde{\gamma}$ — образ γ при вложении $\mathrm{H}^1(L^\cdot \otimes I)_{\bar{0}} \hookrightarrow \mathrm{H}^1(L^\cdot \otimes \mathrm{Ker}\, \pi)$, тогда, еще раз применяя ($O2$), получаем деформацию $\alpha = \tilde{\gamma}(\tilde{\alpha}) \in \Phi(A' \times_A A'')$ такую, что $\tilde{\pi}'_*(\alpha) = \alpha''$ и $\tilde{\pi}''_*(\alpha) = \alpha'$. Это дает ($S1$). Пусть теперь $A \in \mathscr{C}_0$ и $\beta \in \Phi(A' \times_A A'')$ — еще одно продолжение деформаций α' и α''. Тогда $\beta = \gamma(\alpha)$ для некоторого $\gamma \in \mathrm{H}^1(L^\cdot \otimes \mathrm{Ker}\, \pi)$. Пусть γ'

и γ'' — образы γ в $H^1(L^{\cdot}\otimes \operatorname{Ker}\pi')_{\bar 0}$ и $H^1(L^{\cdot}\otimes \operatorname{Ker}\pi'')_{\bar 0}$ соответственно. Тогда $\gamma'\cdot\tilde\pi''_*(\beta)=\gamma'\alpha'=\tilde\pi''_*(\alpha)=\alpha'$ и $\gamma''\cdot\tilde\pi'_*(\beta)=\gamma''\alpha''=\alpha''$, откуда по (О3) получаем, что $\gamma'=0$ и $\gamma''=0$. Но $\operatorname{Ker}\pi=\operatorname{Ker}\pi'\oplus\oplus\operatorname{Ker}\pi''$, откуда $\gamma=0$ и $\beta=\gamma\cdot\alpha=\alpha$. Тем самым (S2) тоже выполнено. □

4.2.3. Теорема. Пусть функтор Φ удовлетворяет условиям $O1$—$O3$ и имеет четноверсальную деформацию. Тогда Φ квазипредставим.

Доказательство проведем в несколько шагов. Сначала будет доказано существование 1-версальной деформации (лемма 4.2.4). Затем мы покажем, что из q-квазипредставимости функтора Φ при $q\geqslant 1$ следует, что у него существует $q+1$-полная деформация (4.2.7)—(4.2.12). Наконец, в 4.2.13 мы выведем отсюда и из существования формальной $q+1$-версальной деформации (она существует в силу 4.2.2 и 4.1.15), что у Φ существует $q+1$-версальная деформация.

Таким образом, функтор Φ является q-квазипредставимым для любого q. Покажем, что отсюда следует квазипредставимость Φ. Действительно, пусть B_q — база q-версальной деформации $\beta_q\in\Phi(B_q)$. Пусть $\dim B_1=\dim(\mathfrak{m}_{B_1}/\mathfrak{m}^2_{B_1})=m/n$. Покажем, что деформация β_n над B_n является q-версальной для любого q. Поскольку $\mathscr{C}=\bigcup\limits_{q\geqslant 0}\mathscr{C}_q$, отсюда будет следовать, что деформация β_n версальна. По лемме 4.1.11, при $q\geqslant 1$ ограничение деформации β_q на $B_q^{(1)}=B_q/\mathfrak{n}^2_{B_q}$ является 1-версальной деформацией. Поэтому существует морфизм $f:B_1\to B_q^{(1)}$ локальных супералгебр, индуцирующий изоморфизм суперпространств $\mathfrak{m}_{B_1}/\mathfrak{m}^2_{B_1}\to\mathfrak{m}_{B_q^{(1)}}/\mathfrak{m}^2_{B_q^{(1)}}=$ $=\mathfrak{m}_{B_q}/\mathfrak{m}^2_{B_q}$. Отсюда $\dim B_q=\dim B_1=m/n$ и число образующих идеала $\mathfrak{n}_{B_q}$ равно $\dim\Pi(\mathfrak{n}_{B_q}/\mathfrak{n}_{B_1}\cdot\mathfrak{m}_{B_q})=n$. В таком случае $\mathfrak{n}^{n+1}_{B_q}=0$ и $B_q\in\mathscr{C}_n$. Но деформация β_n является n-версальной, поэтому существует морфизм $f_q:B_n\to B_q$, для которого $f_{q*}\beta_n=\beta_q$, что и доказывает q-версальность деформации β_n. □

4.2.4. Лемма. У функтора Φ существует 1-версальная деформация.

Доказательство. Пусть (B_0,β_0) — четноверсальная деформация. Для супералгебры $A\in\mathscr{C}_1$ идеал $\mathfrak{n}_A$ совпадает с $A_{\bar 1}$, поэтому существует вложение $i:A_0=A/\mathfrak{n}_A\to A$. Следовательно, для морфизма $f:B_0\to A_0$ и инфинитезимального расширения $\pi:A\to A_0$ существует каноническое продолжение деформации $f_*\xi_0$ с A_0 на A. Это означает, что во множестве всех продолжений $f_*\beta_0$ с A_0 на A имеется выделенный элемент $i_*f_*\beta_0$, условие (О3) из 4.2.1 означает теперь, что это множество можно отождествить с пространством $H^1(L^{\cdot}\otimes_{B_0}\mathfrak{n}_A)_{\bar{0}}$. Ограничение функтора Φ на категорию супералгебр над B_0, принадлежащих $\mathscr{C}_1$, эквивалентно функтору $F: A\to H^1(L^{\cdot}\otimes_{B_0}\mathfrak{n}_{\bar{A}})_{\bar{0}}$, и для построения 1-версальной деформации достаточно найти пару (A, ν), $\nu\in F(A)$, квазипредставляющую F. Действительно, пусть β — продолжение деформации β_0 с $A_0=A/\mathfrak{n}_A$ на A, соответствующее по (О3) элементу $\gamma\in H^1(L^{\cdot}\otimes_{B_0}\mathfrak{n}_A)_{\bar{0}}$. Пусть $C\in\mathscr{C}_1$, $\pi_C: C\to C_0=C/\mathfrak{n}_C$, $\gamma\in\Phi(C)$ — произвольная деформация. Тогда $\gamma_0=\pi_{C*}(\gamma)\in\Phi(C_0)$ и в силу четноверсальности пары (B_0, β_0) существует морфизм $f: B_0\to C_0$ такой, что $f_*\xi_0=\gamma_0$. Но тогда γ оказывается продолжением $f_*\beta_0$ с C_0 на C, соответствующим по (О3) некоторому элементу $\delta\in H^1(L\otimes_{B_0}\mathfrak{n}_C)_{\bar{0}}$. Из версальности ν следует существование B_0-морфизма $g: A_0\to C_0$ и накрывающего его морфизма $\tilde{g}: A\to C$, переводящего ν в δ. Еще раз применяя (О3) получаем, что $\tilde{g}*\beta=\gamma$. Пусть теперь супералгебра $C\in\mathscr{C}_1$ такова, что $\mathfrak{m}_C^2=0$ и $\tilde{g}': A\to C$ — еще один морфизм, для которого $\tilde{g}'_*\beta=\gamma$. Поскольку $\tilde{g}'(\mathfrak{n}_A)\subset\mathfrak{n}_C$, определен морфизм g' в коммутативной диаграмме

$$\begin{array}{ccc} A & \xrightarrow{\tilde{g}'} & C \\ {\scriptstyle \pi_A}\downarrow & & \downarrow{\scriptstyle \pi_C} \\ A_0 & \xrightarrow{g'} & C_0 \end{array}.$$

Тогда $g'_*\beta_0=\gamma_0$, поэтому из версальности β_0 следует, что $g'=g$ и морфизмы $\tilde{g}$ и $\tilde{g}'$ задают в $\mathfrak{n}_C$ одну и ту же структуру B_0-модуля. Отсюда $\delta=(\mathrm{id}_L\otimes\tilde{g}')(\nu)\leqslant(\mathrm{id}_L\otimes\tilde{g})(\nu)$ и $\tilde{g}=\tilde{g}'$ в силу версальности ν.

Осталось доказать следующее утверждение.

4.2.5. Лемма. Функтор F на категории $\mathscr{C}_1$ квазипредставим.

Доказательство. Согласно лемме 4.1.5, для этого достаточно построить нечетный B_0-модуль V и элемент $\nu\in H^0(L^{\cdot}\otimes_{B_0}V)_{\bar{0}}$ такие, что для любой B_0-алгебры A_0, нечетного A_0-модуля и элемента $\delta\in H(L^{\cdot}\otimes_{B_0}M)_{\bar{0}}$ существует гомоморфизм B_0-модулей $\varphi: V\to M$ (единственный, если $\mathfrak{m}_{B_0}\cdot M=0$), переводящий ν в δ.

В силу 2.3.6, мы можем считать, что дифференциалы $d^0\otimes\mathrm{id}_C$ и $d^1\otimes\mathrm{id}_C$ комплекса $L^0\otimes_{B_0}\mathbf{C}\to L^1\otimes_{B_0}\mathbf{C}\to L^2\otimes_{B_0}\mathbf{C}$ равны нулю. Пусть u_i, $i=1, \ldots, s$, и v_j, $j=1, \ldots, t$, — базисы B_0-модулей $L^1_{\bar{1}}$ и $L^2_{\bar{1}}$, (b_{ij}) — матрица гомоморфизма d^1 в этих базисах. Рассмотрим B_0-модуль $N=\mathrm{Hom}_{B_0}(L^1, B_0)_{\bar{1}}$ и элемент $\beta=\mathrm{id}_{L^2_{\bar{1}}}\in$ $\in\mathrm{End}(L^2_{\bar{1}})=(L^2\otimes N)_{\bar{0}}$.

Если u_i^*, $i=1, \ldots, s$, — базис N, дуальный к базису $\{u_i\}$, то $\tilde{\nu}=\sum_{i=1}^{s} u_i \otimes u_i^*$. Обозначим через I подмодуль N, порожденный элементами $\sum_{i=1}^{s} b_{ij} u_i^*$ и положим $V=N/I$. Пусть $\bar{\nu}$ — образ элемента $\tilde{\nu}$ при эпиморфизме $L^2 \otimes N \to L^2 \otimes V$. Тогда $\bar{\nu} \in \operatorname{Ker}(d^2 \otimes \mathrm{id}_V)$, так как

$$(d^2 \otimes \mathrm{id}_V)(\bar{\nu}) = \sum_{i=1}^{s} d^2(u_i) \otimes \bar{u}_i^* = \sum_{i=1}^{s} \sum_{j=1}^{t} b_{ij} v_j \otimes \bar{u}_i^* =$$

$$= \sum_{j=1}^{t} v_j \otimes \sum_{i=0}^{s} b_{ij} \bar{u}_j^* = 0.$$

Обозначим через ν класс элемента $\bar{\nu}$ в $\mathrm{H}^{\cdot}(L^{\cdot} \otimes V)$. Докажем, что пара (V, ν) квазипредставляет F. Пусть A_0 — локальная *аналитическая B_0-алгебра, M — конечнопорожденный нечетный* A_0-модуль и $\delta \in \mathrm{H}(L \otimes_{B_0} M)$. Пусть $\bar{\delta} \in \operatorname{Ker}(d^2 \otimes \mathrm{id}_M)$ — представитель класса δ, тогда $\bar{\delta}$ однозначно представляется в виде суммы $\bar{\delta}=\sum_{i=1}^{s} u_i \otimes m_i$, $m_i \in M$. Пусть $\bar{\varphi}: N \to M$ — гомоморфизм B_0-модулей $\bar{\varphi}: u_i \mapsto m_i$. Тогда $\mathrm{id}_{L^2} \otimes \bar{\varphi}$ переводит $\tilde{\nu} \in L^2 \otimes_{B_0} N$ в $\bar{\delta} \in L^2 \otimes_{B_0} M$. Из равенства

$$(d^2 \otimes \mathrm{id}_M)(\bar{\delta}) = \sum_{i=1}^{s} \left(\sum_{j=1}^{t} b_{ij} v_j \right) \otimes m_i = \sum_{j=1}^{t} v_j \otimes \left(\sum_{i=1}^{s} b_{ij} m_j \right) = 0$$

следует, что $\sum_{i=1}^{s} b_{ij} m_i = \bar{\varphi}\left(\sum_{i=1}^{s} b_{ij} u_i^* \right) = 0$, то есть $I \subset \operatorname{Ker} \bar{\varphi}$. Поэтому $\bar{\varphi}: N \to M$ пропускается через эпиморфизм $N \to V$. Таким образом, мы построили гомоморфизм $\varphi: V \to M$ такой, что $\varphi(\bar{u}_i^*) = m_i$. Тогда $(\mathrm{id}_{L^2} \otimes \varphi)(\bar{\nu}) = \bar{\delta}$, а потому φ переводит $\nu \in H(L^{\cdot} \otimes_{B_0} V)$ в $\delta \in \mathrm{H}(L^{\cdot} \otimes_{B_0} M)$.

Дифференциал $d^2 \otimes \mathrm{id}_C$ комплекса $L^{\cdot} \otimes_{B_0} (B_0/\mathfrak{m}_{B_0})$ равен нулю, поэтому неединственность гомоморфизма, переводящего ν в δ, связана с неоднозначностью подъема класса δ в $L^2 \otimes_{B_0} M$. Если $\bar{\delta}' \in \operatorname{Ker} d^2 \otimes \mathrm{id}_M$ — другой представитель δ, то $\bar{\delta}' - \bar{\delta} = \sum_k d^1(w_k) \otimes m_k \in \operatorname{Im}(d^1 \otimes \mathrm{id}_M)$, где $w_k \in L^1$. Но $d^1(w_k) \in \mathfrak{m}_{B_0} \cdot L^2$, так как $d^1 \otimes \mathrm{id}_C = 0$, то есть $\bar{\delta}' \equiv \bar{\delta} \bmod \mathfrak{m}_{B_0} \cdot (L^2 \otimes M)$. В случае, *когда $\mathfrak{m}_{B_0} M = 0$, получаем поэтому, что гомоморфизм $\varphi: V \to M$*, переводящий ν в δ, единствен. □

4.2.6. Замечание. По построению база B_1 1-версальной деформации является факторалгеброй супералгебры $\mathbf{C}\{x_1, \ldots, x_m, \xi_1, \ldots, \xi_n\}$, где $m=\dim B_0$, а $n=\dim \mathrm{H}(L^{\cdot}\otimes\mathbf{C})_{\bar{1}}$.

4.2.7. Лемма. Пусть функтор Φ имеет q-версальную деформацию β_q с базой B_q, $q\geqslant 1$. Тогда у Φ существует полная деформация.

Доказательство. Вначале с произвольной супералгеброй $A\in\mathscr{C}_q$ свяжем некоторое инфинитезимальное расширение $\bar{A}\to A\to 0$. Рассмотрим эпиморфизм локальных аналитических супералгебр $\bar{\rho}:\mathbf{C}\{x_1, \ldots, x_m, \xi_1, \ldots, \xi_n\}\to A$, где $m/n=\dim A$. Пусть $\mathfrak{n}=\mathfrak{n}_{\mathbf{C}\{x,\xi\}}$, $J=\operatorname{Ker}\bar{\rho}$, тогда $\mathfrak{n}^{q+1}\subset J$, так как $A\in\mathscr{C}_q$. Рассмотрим идеал J', порожденный множеством $J\setminus\mathfrak{n}^{q+1}$ и положим $I=J'+\mathfrak{n}^{q+2}$, $\bar{A}=\mathbf{C}\{x,\xi\}/I$. Тогда $\bar{A}\in\mathscr{C}_{q+1}$ и, так как $I\subset J$ и $J/I=(J\cap\mathfrak{n})/(I\cap\mathfrak{n})$, мы получаем инфинитезимальное расширение $0\to\mathfrak{n}_{\bar{A}}^{q+1}\to\bar{A}\xrightarrow{\sigma}A\to 0$. Расширение максимально в классе всех расширений $\gamma:C\to A\to 0$, для которых $\operatorname{Ker}\gamma=\mathfrak{n}_c^{q+1}$. Сформулируем это в следующем виде.

4.2.8. Лемма. Пусть $A\in\mathscr{C}_q$, $\sigma:\bar{A}\to A$ — инфинитезимальное расширение супералгебры A, построенное в 4.2.7.

(i) Для любого инфинитезимального расширения $0\to\mathfrak{n}_{B'}\to B'\xrightarrow{\sigma'}B\to 0$ такого, что $B\in\mathscr{C}_q$, и мономорфизма $j:A\to B$ аналитических супералгебр существует морфизм $j':\bar{A}\to B'$, накрывающий j.

(ii) Если

$$\begin{tikzcd}
0 \arrow[r] & \mathfrak{n}_{B''} \arrow[r] \arrow[dd] & B'' \arrow[dd, "\tau"'] \arrow[dr, "b''"] & \\
 & & & B \\
0 \arrow[r] & \mathfrak{n}_{B'} \arrow[r] & B' \arrow[ur, "b'"'] &
\end{tikzcd}$$

морфизм инфинитезимальных расширений супералгебры $B\in\mathscr{C}_q$, и

$$\begin{tikzcd}
\bar{A} \arrow[r, "j'"] \arrow[d, "\sigma"'] & B' \arrow[d, "\sigma'"] \\
A \arrow[r] & B
\end{tikzcd}$$

— коммутативная диаграмма, то существует морфизм $j'':\bar{A}\to B''$ такой, что $\tau\cdot j''=j'$.

Доказательство (i). Гомоморфизм супералгебры $\mathbf{C}\{x,\xi\}$ в локальную аналитическую супералгебру однозначно определяется образами элементов $x_1, \ldots, x_m$, $\xi_1, \ldots, \xi_n$. Пусть

$\mathbb{C}\{y, \eta\} \xrightarrow{\rho'} B'$ — эпиморфизм, ограничение которого $\mathbb{C}\{y, \eta\}/\mathfrak{m}^2_{\mathbb{C}\{y,\eta\}} \to$ $\to B'/\mathfrak{m}^2_{B'}$ является изоморфизмом. Зададим гомоморфизм f в коммутативной диаграмме

$$\begin{tikzcd} \mathbb{C}\{x,\xi\} \arrow[r, "f"] \arrow[d, "\rho"'] & \mathbb{C}\{y,\eta\} \arrow[d, "\rho'"] \\ A \arrow[r, dashed, "j'"] \arrow[d, "\sigma"'] & B' \arrow[d, "\sigma'"] \\ A \arrow[r, "j"] & B \end{tikzcd}$$

положив $f(u) = u' \in (\rho'^{-1}\sigma'^{-1} j\sigma\rho)(u)$, где $u = x_k$ или ξ_l.

Существование стрелки j' будет доказано, если мы покажем, что $\operatorname{Ker}\rho' \cdot f \supset \operatorname{Ker}\rho = (\operatorname{Ker}(\sigma\cdot\rho)\setminus \mathfrak{n}^{q+1})\cdot \mathbb{C}\{x, \xi\} + \mathfrak{n}^{q+2}$. По 4.1.3 $B' \in \mathscr{C}_{q+1}$, следовательно, $\rho'\cdot f(\mathfrak{n}^{q+2}) \subset \mathfrak{n}^{q+2}_{B'} = 0$. Чтобы доказать, что $a \in \operatorname{Ker}(\sigma\cdot\rho)\setminus\mathfrak{n}^{q+1}$ лежит в $\operatorname{Ker}\rho_0' f$, заметим, что f — вложение, так как гомоморфизм $tf: A/\mathfrak{m}^2_A \to B/\mathfrak{m}^2_B$ инъективен. Поэтому $f(a) \notin \mathfrak{n}^{q+1}$ и $f(a) \in \operatorname{Ker}\sigma'\rho' \setminus \mathfrak{n}^{q+1}$, так как $\sigma'\rho' f(a) = \sigma\rho(a) = 0$. Но $\operatorname{Ker}\rho' \setminus \operatorname{Ker}\sigma'\rho' \subset \mathfrak{n}^{q+1}$, следовательно, $f(a) \in \operatorname{Ker}\rho'$ и $\rho' f(a) = 0$.

В случае (*ii*) проходит то же самое рассуждение, так как $\operatorname{Ker}\pi \subset \mathfrak{n}^{q+1}_{B''}$. □

4.2.9. Продолжение доказательства леммы 4.2.7. Пусть B_q — база q-версальной деформации β_q, $0 \to I \to \bar{B} \xrightarrow{\sigma} B_q \to 0$ — расширение, построенное в 4.2.7. В силу условия (*O*1) препятствием к продолжению β_q до деформации $\beta \in \Phi(\bar{B})$ служит некоторый класс $\omega_\sigma(\beta_q) \in \mathrm{H}^2(L^\cdot \otimes_{B_0} I)$, где $B_0 = \bar{B}/\mathfrak{n}_{\bar{B}}$. Поднимем $\omega_\sigma(\beta_q)$ до элемента $\bar{\omega} \in \operatorname{Ker}(d^2 \otimes \mathrm{id}_I)_{\bar{0}}$ и разложим его в сумму $\sum_{j=1}^{s} u_j \otimes a_j$, $a_j \in I$, где $\{u_j\}$ — базис B_0-модуля L^2.

Пусть w_k, $k = 1, \ldots, t$, — базис модуля L^1 и $d^1(w_k) = \sum_{j=1}^{s} c_{jk} u_j$, $c_{jk} \in B_0$. Рассмотрим в B_0-модуле $I \oplus (\Pi B_0)^t$ подмодуль K, порожденный элементами $a_j - \sum_{k=1}^{t} c_{jk} e_k$, $e_k = (0, \ldots, 0, 1, \ldots, 0) \in (\Pi B_0)^t$ и положим $M = I \oplus (\Pi B_0)^t / K$. Гомоморфизм $\sigma: I \to M$ переводит $\bar{\omega} \in L^2 \otimes_{B_0} I$ в

$$\sum_{j=1}^{s} u_j \otimes a_j = \sum_{j=1}^{s} \sum_{k=1}^{t} u_j \otimes c_{jk} e_k =$$

$$=\sum_{k=1}^{t}\sum_{j=1}^{s} c_{jk}u_j\otimes e_k=\sum_{k=1}^{t} d^1(w_k)\otimes e_k=(d^1\otimes \mathrm{id}_M)\left(\sum_{k=1}^{t} w_k\otimes e_k\right),$$

поэтому образ класса $\omega_\sigma(\beta_q)$ в $\mathrm{H}^{\boldsymbol{\cdot}}(L^{\boldsymbol{\cdot}}\otimes_{B_0}M)$ равен нулю.

Модуль M в некотором смысле версален относительно этого свойства.

4.2.10. Лемма. Пусть $\varphi: I\to N$ — гомоморфизм B_0-модулей, переводящий класс $\omega_\sigma(\beta_q)\in\mathrm{H}^{\boldsymbol{\cdot}}(L^{\boldsymbol{\cdot}}\otimes_{B_0}I)$ в 0. Тогда φ пропускается через гомоморфизм $\sigma: I\to M$.

Доказательство. Пусть $(\mathrm{id}_{L^{\boldsymbol{\cdot}}}\otimes\varphi)(\bar\omega)=(d^1\otimes\mathrm{id}_N)(\gamma)$, где $\gamma\in L^1\otimes_{B_0}N$. Представив γ в виде $\gamma=\sum_{k=1}^{t} w_k\otimes n_k$, получаем $\sum_{j=1}^{s} u_j\otimes\varphi(a_j)=\sum_{k=1}^{t}\sum_{j=1}^{s} c_{jk}u_j\otimes n_k$, откуда $\varphi(a_j)=\sum_{k=1}^{t} c_{jk}n_k$. Поэтому, положив $\hat\varphi(a)=\varphi(a)$ для $a\in I$, $\hat\varphi(e_k)=n_k$, мы получим корректно определенный гомоморфизм $\hat\varphi: M\to N$ такой, что $\hat\varphi\circ\sigma=\varphi$. □

4.2.11. Построим теперь инфинитезимальное расширение $\hat B\xrightarrow{\hat\sigma}B_q\to 0$ и морфизм расширений

$$\begin{tikzcd}
\bar B \arrow[rr, "\hat f"] \arrow[dr, "\sigma"'] & & \hat B \arrow[dl, "\hat\sigma"] \\
& B_q &
\end{tikzcd}$$

такой, что $\operatorname{Ker}\hat\sigma=M$ и ограничение гомоморфизма $\hat f$ на $I=\operatorname{Ker}\sigma$ совпадает с гомоморфизмом B_0-модулей $f: I\to M$ из 4.2.9.

В силу конструкции расширения $\bar B\to B_q$ (см. 4.2.7) супералгебра $\bar B$ является фактором $\mathbf{C}\{x,\xi\}/\mathfrak{n}^{q+2}$ по идеалу $\bar J$, образующие которого лежат в $\mathfrak{m}\setminus\mathfrak{n}^{q+1}$. Поэтому $\bar B=B_q\oplus I$ и расширение σ задается некоторым классом $[\sigma]\in\mathrm{H}^2(B_q, I)$ (см., например, [7]). Его образ $f_*([\sigma])$ в $\mathrm{H}^2(B_q, M)$ задает требуемое расширение $0\to M\to\hat B\xrightarrow{\hat\sigma}B_q\to 0$. Препятствие к продолжению гомоморфизма $f: I\to M$ до морфизма расширений равно нулю, так как расширение $\hat\sigma$ индуцировано с помощью f. Но это и означает, что существует гомоморфизм $\hat f:\bar B\to\hat B$ над B_q, совпадающий с f на I.

Деформацию $\beta_q\in\Phi(B_q)$ можно продолжить до деформации $\hat\beta$ над $\hat B$. Действительно, препятствие к продолжению функториально, поэтому из 4.2.9 $\omega_{\hat\sigma}(\beta_q)=f_\#(\omega_\sigma(\beta_q))=0$.

4.2.12. Докажем теперь, что деформация $\hat\beta\in\Phi(\hat B)$ является $q+1$-полной. Пусть $A\in\mathscr{C}_{q+1}$, $\alpha\in\Phi(A)$, — некоторая $q+1$-деформация. Рассмотрим ограничение $\alpha_q=p_*\alpha$ на $A_q=A/\mathfrak{n}_A^{q+1}$, где $p:A\to A_q$ — каноническая проекция. Покажем, что существует морфизм расширений

$$\begin{array}{ccc} \bar B & \xrightarrow{\bar h} & A \\ \downarrow & & \downarrow p \\ B_q & \xrightarrow{h} & A_q \end{array}.$$

Поскольку $A_q\in\mathscr{C}_q$, из q-версальности деформации $\beta_q\in\Phi(B_q)$ следует, что найдется морфизм $j:B_q\to A_q$, переводящий β_q в α_q. Рассмотрим локальную аналитическую супералгебру $B_A=$ $=B_q\times_{A_q}A\in\mathscr{C}_{q+1}$. Если бы ядро проекции на первый множитель $\operatorname{Ker}p_1$ совпадало с $\mathfrak{n}_{B_A}^{q+1}$, то можно было бы, применив 4.2.8 получить морфизм $\bar B\to B_A$. В общем случае надо сначала продолжить деформацию β_q с B_q на B_A. Для этого вычислим препятствие к продолжению. При проекции $p_1:B_A\to B_q$ в 0 переходят только пары $(0,a)\in B_A$, где $a\in\operatorname{Ker}p=\mathfrak{n}_A^{q+1}$. Поэтому $\operatorname{Ker}p_1\simeq\mathfrak{n}_A^{q+1}$ и условие (o1) теперь дает $\omega_{p_1}(B_q)=0$, так как $j_\#\omega_{p_1}(\beta_q)=\omega_p(\alpha_q)=0$, так как деформация $\alpha_q\in\Phi(A_q)$ продолжается до деформации над A. Пусть $\beta_A\in\Phi(B_A)$ — продолжение β_q на B_A. Рассмотрим проекцию $\pi:B_A\to B_{A,q}$, где $B_{A,q}=B_A/\mathfrak{n}_{B_A}^{q+1}$ и деформацию $\beta_{A,q}=\pi_*(\beta_A)$ на $B_{A,q}$. Проекцию $p_1:B_A\to B_q$ пропускается через $B_{A,q}$, так как $B_q\in\mathscr{C}_q$ и, следовательно, $\operatorname{Ker}p_1\supset$ $\supset\mathfrak{n}_{B_A}^{q+1}$. В итоге мы получаем морфизм $p':B_{A,q}\to B_q$, для которого $p_1=p'\cdot\pi$ и $p'_*(\beta_{A,q})=p'_*\cdot\pi_*(\beta_A)=p_{1*}(\beta_A)=\beta_q$. Но $B_{A,q}\in\mathscr{C}_q$, а деформация (B_q,β_q) является q-версальной. Поэтому существует морфизм $s:B_q\to B_{A,q}$ такой, что $\Phi(\rho)(\beta_q)=\beta_{A,q}$. Но тогда $(p'\cdot\rho)_*(\beta_q)=p'_*(\beta_{A,q})=\beta_q$, то есть $p'\cdot\rho:B_q\to B_q$ — автоморфизм, а ρ — мономорфизм. Применяя лемму 4.2.8, получаем морфизм $\bar\rho:\bar B\to B_A$, накрывающий ρ. Теперь из диаграммы

$$\begin{tikzcd}
 & B_A \arrow[rr, "p_2"] \arrow[dd, "p_1"'] \arrow[dr, "\pi"] & & A \arrow[dd, "p"] \\
\bar B \arrow[ur, "\bar\rho"] \arrow[dr] & & B_{A,q} \arrow[dl, shift left, "p'"] & \\
 & B_q \arrow[ur, shift left, "\rho"] \arrow[rr, "j"'] & & A_q
\end{tikzcd}$$

получаем, что морфизмы $h=j\cdot p'\cdot\rho$ и $\bar h=p_2\cdot\bar\rho$ задают морфизм расширений

$$\begin{tikzcd} \bar B \arrow[r, "\bar h"] \arrow[d] & A \arrow[d, "p"] \\ B_q \arrow[r, "h"] & A_q \end{tikzcd}$$

Если бы случилось так, что $\bar h_*(\beta)=\alpha$, то все было бы доказано. В общем случае это не выполнено, поэтому нам придется чуть-чуть подправить морфизм $\bar h$.

Рассмотрим локальную аналитическую супералгебру $\hat A=A\times_{A_q}A$ и пусть pr_1 и pr_2—проекции на первый и второй множители. Пусть $I=\mathfrak{n}_A^{q+1}$, тогда $A_q=A/I$ и отображение $(a_1, a_2)\mapsto(a_1, a_2-a_1)$ задает изоморфизм $A'\simeq A[I]$. По 4.2.2, существует деформация ξ над $\hat A$, такая, что $\mathrm{pr}_{1*}(\xi)=\bar h_*(\beta)$ и $\mathrm{pr}_{2*}(\xi)=\eta$. Рассмотрим декартов квадрат

$$\begin{tikzcd} & \hat A \arrow[dl, "p_0"'] \arrow[dr, "\mathrm{pr}_2"] & \\ A_0[I] \arrow[dr] & & A \arrow[dl] \\ & A_0 & \end{tikzcd}$$

и деформацию $\alpha'=p_{0*}(\xi)\in\Phi(A_0[I])$. Супералгебра $A_0[I]$ принадлежит категории $\mathscr{C}_1$, а деформация $\beta_q\in\Phi(B_q)$ — q-версальна. Поэтому существует морфизм $h': B_q\to A_0[I]$, накрывающий $h_0: B_q\to A_0$ и переводящий деформацию β_q в α'. Положим $h_I=\alpha\cdot h'$. В диаграмме

$$\begin{tikzcd} & \bar B\times_{B_q}\bar B \arrow[dl, "\pi_1"'] \arrow[ddr, "\pi_2"] \arrow[rrr, dashed, "\hat h"] & & & A[I] \arrow[dl, "\mathrm{pr}_2"'] \arrow[ddr, "p_0"] & \\ \bar B \arrow[rrr, "\bar h"] \arrow[ddr, "b"'] & & & A \arrow[ddr] & & \\ & & \bar B \arrow[dl, "b"'] \arrow[rrr, "h_I"] & & & A_0[I] \arrow[dl] \\ & B_q \arrow[rrr, "h_0"] & & & A_0 & \end{tikzcd}$$

левый и правый квадраты декартовы, поэтому определен гомоморфизм $\hat h: \bar B\times_{B_q}\bar B\to A[I]$. Продолжим деформацию $\beta\in\Phi(\bar B)$ до $\hat\beta\in\Phi(\bar B\times_{B_q}\bar B)$ и положим $\xi'=\hat h_*(\hat\beta)$. Тогда $\mathrm{pr}_{2*}(\xi')=(\mathrm{pr}_2\cdot\hat h)_*(\hat\beta)=$ $=(\bar h\cdot\pi_1)_*(\hat\beta)=\bar h_*(\beta)=\alpha$ и $p_{0*}(\xi')=(p_0.\hat h)_*(\hat\beta)=(h_I\cdot\pi_2)_*(\hat\beta)=$ $=(h'\cdot\alpha)_*(\beta)=h'_*(\beta_q)=\alpha'$. Но для деформации ξ также имеем $\mathrm{pr}_{2*}(\xi)=\alpha$ и $p_{0*}(\xi)=\alpha'$, поэтому применяя (ОЗ) получаем, что

$\xi = \xi' = \hat{h}_*(\hat{\beta})$. Определим гомоморфизм $\overline{h}' : \overline{B} \to A$ как композицию вложения $\overline{B} \to \overline{B} \times_{B_q} \overline{B}$, гомоморфизма $\hat{h}$ и проекции pr_2. Тогда из коммутативности диаграммы

$$\begin{tikzcd}
 & \overline{B} \times_{B_q} \overline{B} \arrow[rrr, "\hat{h}"] \arrow[dl, "\pi_1"'] \arrow[dd, "\pi_2"] & & & \hat{A} \arrow[dl, "pr_1"'] \arrow[dd, "pr_2"] \\
\overline{B} \arrow[rrr, "\overline{h}"] \arrow[dd] & & & A \arrow[dd] & \\
 & B \arrow[rrr, "\overline{h}'"] \arrow[dl] & & & A \arrow[dl] \\
B_q \arrow[rrr, "h"] & & & A_q &
\end{tikzcd}$$

следует, что $\overline{h}'_*(\beta) = (\overline{h}' \cdot \pi_2)_*(\hat{\beta}) = (\mathrm{pr}_2 \cdot \hat{h})_*(\hat{\beta}) = \mathrm{pr}_2(\xi) = \alpha$. Итак, β — $q+1$-полная деформация. □

4.2.13. Лемма. Пусть у функтора Φ существуют $q+1$-полная деформация $\alpha \in \Phi(A)$ и $q+1$-формально версальная деформация $\overline{\beta} \in \Phi(\overline{B})$, $(A, I) \in \mathcal{P}_{q+1}$, $\overline{B} \in \hat{\mathcal{C}}_{q+1}$, $q \geqslant 1$. Тогда у Φ существует и $q+1$-версальная деформация.

Доказательство. Деформация α определяет формально $q+1$-полную деформацию $\hat{\alpha}$ над пополнением $(\hat{A}, \hat{I}) \in \hat{\mathcal{P}}_{q+1}$, где $\hat{A} = \varprojlim A/\mathfrak{m}_A^n I$, $\hat{I} = \varprojlim I/\mathfrak{m}_A^n I$. По лемме 4.1.12, существует изоморфизм $\hat{A} \simeq \overline{B}[\overline{M}]$, где $\overline{M}$ — конечнопорожденный $\overline{B}_0$-модуль. Пусть M — конечнопорожденный B_0-подмодуль в I, пополнение которого изоморфно $\overline{M}$. Тогда M является идеалом в A, так как $I^2 = \mathfrak{n}_A I = 0$. Положим $B = A/M$, $\beta = \pi_*(\alpha)$, где $\pi : A \to B$ — каноническая проекция. Докажем, что деформация β является $q+1$-версальной. Ее ограничение на $B_q = A/I$ совпадает с ограничением α и, следовательно, является q-версальной. Поэтому достаточно доказать полноту деформации β. Для этого мы установим существование гомоморфизма $g : B \to A$, $g_*(\beta) = \alpha$. Покажем сначала, что $A \simeq B[M]$. Действительно, переходя к пополнениям получаем изоморфизм $\hat{A} \simeq \hat{B}[\hat{M}] = \overline{B}[\overline{M}]$, откуда следует, что эпиморфизм $\pi : A \to B$ имеет формальное сечение. Применяя следствие (см. [39]) из теоремы об аналитических уравнениях, получаем, что существует гомоморфизм $f : B \to A$, для которого $\pi \cdot f = \mathrm{id}_B$. Тогда отображение $B[M] \to A$, $b + m \mapsto f(b) + m$ — изоморфизм супералгебр, так как $M^2 = 0$ и $\mathfrak{n}_B M = 0$. Деформации α и $\alpha' = f_*(\beta)$ являются продолжениями деформации β на $A = B[M]$. По условию (O2) деформация α может быть получена из α' с помощью некоторого элемента $\gamma \in \mathrm{H}^1(L^{\cdot} \otimes_B M)_{\bar{0}}$. Но $L^{\cdot} \otimes_B M = L^{\cdot} \otimes_{B_0} M$, поэтому γ представляет некоторую деформацию $\xi \in \Phi(B_0[M])$. Но $B_0[M] \in \mathcal{C}$, а ограничение β_1 деформации β на $B_1 = B/\mathfrak{n}_B^2$ 1-версально. Поэтому существует морфизм $\psi_1 : B_1 \to B_0[M]$, для которого $\psi_{1*}\beta_1 = \xi$.

Обозначим через ψ композицию $B\to B_1\xrightarrow{\psi_1}B_0[M]$, тогда $\psi_1(b)=\bar{b}+\delta(b)$, где $\bar{b}$ — образ элемента $b\in B$ при проекции $B\to B_0$, а $\delta: B\to M$ — дифференцирование. Рассмотрим гомоморфизм $g: B\to A\simeq A[M]$, $b\mapsto f(b)+\delta(b)$ и деформацию $\alpha''=g_*(\beta)\in\Phi(A)$. По построению редукция g по модулю $\mathfrak{n}_B^2$ переводит деформацию β_0 в ξ, то есть $p_{2*}(\alpha'')=\xi$, но $p_{2*}(\alpha)=p_{2*}(\gamma\alpha')=p_{2*}(\gamma f_*(\beta))=\gamma(f_{0*}\pi_{1*}(\beta))=\gamma(f_{0*}(\beta_0))=\xi=p_{2*}(\alpha'')$ (морфизмы p_1, p_2, π_1, f_0 обозначены на диаграмме). Кроме того, $p_{1*}(\alpha)=p_{1*}(\alpha'')=\beta$. Применяя теперь условие (О3) к диаграмме

$$\begin{tikzcd}
 & A=B[M] \arrow[dl, shift right, "p_1"'] \arrow[dr, "p_2"] & \\
B \arrow[ur, shift right, "f"'] \arrow[dr, "\pi_1"'] & & B_0[M] \\
 & B_0 \arrow[ur, shift right, "f_0"'] &
\end{tikzcd}$$

получаем, что $\alpha=\alpha''=p_{2*}(\beta)$. Это означает, что деформация β является $q+1$-полной. Таким образом, доказательство леммы 4.2.13, а вместе с ней и теоремы 4.2.3, закончено. □

§ 4.3. ЧЕТНОВЕРСАЛЬНАЯ ДЕФОРМАЦИЯ КОМПЛЕКСНОГО СУПЕРПРОСТРАНСТВА

4.3.1. Теорема. Компактное комплексное суперпространство имеет четноверсальную деформацию.

4.3.2. Доказательство. Разберем, следуя предложению 1.4, суперпространство $(M, \mathcal{O}_M)$ на составляющие его «четные» элементы: компактное комплексное пространство $M_0=(M, \mathcal{O}_{M,\bar{0}})$, когерентный аналитический пучок $F=\mathcal{O}_{M,\bar{1}}$ на $M_{\bar{0}}$ и элемент $\mu\in H^0(M, \operatorname{Sup}(F))$, задающий структуру суперкоммутативной алгебры в $\mathcal{O}_{M,\bar{0}}\oplus F$. Четноверсальную деформацию M мы построим, продеформировав поочередно M_0, F и μ.

Рассмотрим версальную деформацию $\pi_1: \mathcal{M}_1\to S_1$ пространства $(M, \mathcal{O}_{\bar{0}})$, существование которой доказывается в [14], [24], [26], [29].

$$\begin{tikzcd}
M_0 \arrow[r, hook, "i_1"] \arrow[d] & \mathcal{M}_1 \arrow[d, "\pi_1"] \\
\{*\} \arrow[r, hook, "s_1"] & S_1
\end{tikzcd}.$$

Аналитический пучок $F_1=i_{1*}F$ на $\mathcal{M}_1$ когерентен и имеет компактный носитель, поэтому по теореме 1 работы [37] существует версальная деформация $(\mathcal{F}, S_2)$ пучка F_1 на пространстве $\mathcal{M}_1$, все элементы которой изображены на диаграмме

$$
\begin{tikzcd}
F_1 = i_{1*}F = i_2^{*}\mathcal{F} \arrow[d, dash] & & \mathcal{F} \arrow[d, dash] \\
\mathcal{M}_1 \arrow[rr, hook, "i_2"] \arrow[dr] \arrow[dd] & & \mathcal{M}_1 \times S_2 \arrow[dr, "\pi_1\times \mathrm{id}"] \arrow[dd] & \\
 & S_1 \arrow[rr, hook] & & S_1 \times S_2 \\
\{*\} \arrow[ur, hook] \arrow[rr, hook] & & S_2 \arrow[ur, hook] &
\end{tikzcd}
$$

Пучок $\mathcal{F}$, рассматриваемый как $\mathcal{O}_{S_1\times S_2}$-модуль, может не оказаться плоским. Для того, чтобы обойти эту трудность, мы воспользуемся следующим результатом Фриша.

Пусть $X\to R$ — морфизм комплексных пространств, F — когерентный аналитический пучок на X. Для произвольной замены базы $S\to R$ обозначим через X_S пространство $X\times_R S$, а через F_S пучок $\mathrm{pr}^*(F)$, где $\mathrm{pr}: X_S\to X$ — проекция на первый сомножитель. Фриш доказал в [27], что существует морфизм $U\to R$, для которого пучок F_U является плоским над U и который универсален относительно этого свойства, то есть любая замена базы $S\to T$, для которой пучок F_S является S-плоским, однозначно пропускается через $U\to T$: $\begin{tikzcd}[sep=small] S \arrow[rr, dotted] \arrow[dr] & & U \arrow[dl] \\ & T & \end{tikzcd}$. Любой пучок является плоским над точкой, поэтому все точки пространства R принадлежат образу универсального морфизма $U\to R$, и мы можем применять теорему Фриша в случаях, когда база является ростком комплексного пространства.

Возвращаясь к рассматриваемой ситуации, применим этот результат к морфизму $\pi_1\times\mathrm{id}: \mathcal{M}_1\times S_2\to S_1\times S_2$ и пучку $\mathcal{F}$. Композиция универсального морфизма $U\to S_1\times S_2$ и проекции $S_1\otimes S_2\to S_1$ превращает U в росток над S_1, причем U — пространство $(\mathcal{M}_1\times S_2)_U = (\mathcal{M}_1)_U$ — является деформацией над U:

$$
\begin{tikzcd}
 & & (\mathcal{M}_1)_U \arrow[dr, "\varphi"] \arrow[d] & \\
M_0 \arrow[urr, hook, "i_3"] \arrow[r, hook, "i_1"] \arrow[d] & \mathcal{M}_1 \arrow[rr, hook, "i_2"] \arrow[d, "\pi_1"] & (U,u) \arrow[d] \arrow[dr] & \mathcal{M}_1 \times S_2 \arrow[d] \\
\{*\} \arrow[urr] \arrow[r, hook] & (S_1,s_1) \arrow[rr] & & (S_1\times S_2,(s_1,s_2))
\end{tikzcd}
$$

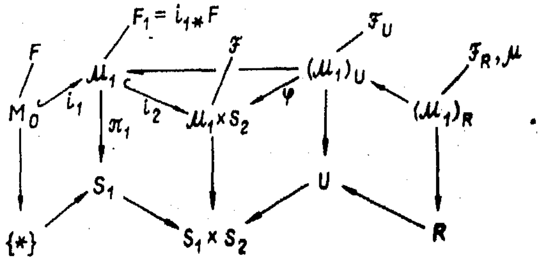
Из диаграммы следует, что когерентный пучок $\mathcal{F}_U$ на $(\mathcal{M}_1)_U$ является плоским над U, а его ограничение на слой $M_0\times\{u\}\hookrightarrow(\mathcal{M}_1)_U$ изоморфно F:

$$
\begin{aligned}
i_3^*(\mathcal{F}_U) &= i_3^*(\varphi^*(\mathcal{F})) = (\varphi\cdot i_3)^*(\mathcal{F}) = (i_2\cdot i_1)^*(\mathcal{F}) = \\
&= i_1^* i_2^*(\mathcal{F}) = i_1^*(F_1) = i_1^* i_{1*}F = F.
\end{aligned}
$$

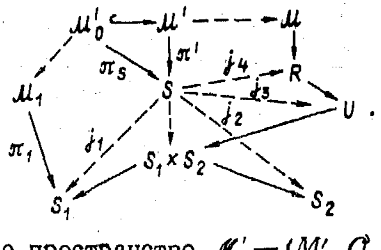
По этой причине $i_3^*(\mathrm{Sup}(\mathcal{F}_U)) = \mathrm{Sup}(i_3^*(\mathcal{F}_U)) = \mathrm{Sup}(F)$. Следовательно, к набору $(\mathcal{M}_1)_U \to U$, $\mathrm{Sup}(\mathcal{F}_U)$, $\mu_0 \in H^0(M; \mathrm{Sup}(F))$ применима теорема 2.3.3 о деформациях когомологических классов, и мы можем найти росток (R, r_0) над U и элемент $\mu \in H^0((\mathcal{M}_1)_R, \mathrm{Sup}(\mathcal{F}_R))$, являющийся версальной деформацией сечения μ_0.

Набор данных $(\mathcal{M}_1)_R$, $\mathcal{F}_R$ и μ определяет, согласно 1.1.4 комплексное суперпространство $\mathcal{M}$. Так как пучок $\mathcal{O}_{\mathcal{M}} = (\mathcal{O}_{\mathcal{M}_1})_R \oplus \mathcal{F}_R$ является $\mathcal{O}_R$-модулем, мы имеем морфизм суперпространств $\pi: \mathcal{M} \to R$. Покажем, что π — деформация суперпространства $(M, \mathcal{O}_M)$. Действительно, ограничение пучка $\mathcal{O}_{\mathcal{M}}$ на $M \times \{r_0\}$ изоморфно $\mathcal{O}_{M_0} \oplus F = \mathcal{O}_M$, а сечение μ над $M \times \{r_0\}$ совпадает с μ_0. Плоскость морфизма π следует из того, что семейство $\mathcal{M}$ плоско над S_1, пучок $\mathcal{F}_U$ является плоским над U и плоскость сохраняется при замене базы.

Все этапы построения деформации $\pi: \mathcal{M} \to R$ видны из следующей диаграммы пространств и пучков



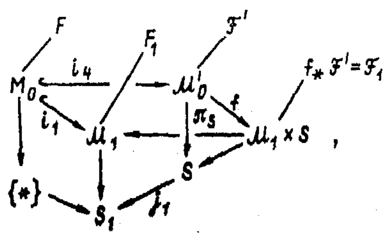
4.3.3. Докажем теперь, что деформация $\pi: \mathcal{M} \to R$ является четноверсальной деформацией суперпространства M. Пусть $\pi': \mathcal{M}' \to S$ — произвольная деформация M с четной базой S. Мы определим один за другим недостающие морфизмы в диаграмме (пунктирные стрелки)



Пусть комплексное пространство $\mathcal{M}'_0 = (M', \mathcal{O}_{\mathcal{M}', \bar{0}})$, когерентный $\mathcal{O}_{\mathcal{M}', \bar{0}}$-модуль $\mathcal{F}' = \mathcal{O}_{\mathcal{M}', \bar{1}}$ и сечение $\mu' \in H^0(M', \mathrm{Sup}(\mathcal{F}'))$ — составные части суперструктуры суперпространства $\mathcal{M}'$. В кольце $\mathcal{O}_S$ нет нечетных элементов, поэтому определен плоский морфизм комплексных пространств $\pi_S: \mathcal{M}'_0 \to S$ и пучок $\mathcal{F}'$ является плоским над S. Изоморфизм $\mathcal{O}_{\mathcal{M}'}\otimes_{\mathcal{O}_S}\mathbb{C}\simeq\mathcal{O}_M=\mathcal{O}_{M,\bar{0}}\oplus F$ показывает поэтому, что $\mathcal{M}'_0$ является деформацией пространства M_0, а ограничение пучка $\mathcal{F}'$ на $M_0\subset\mathcal{M}'_0$ изоморфно F. Но $\pi_1:\mathcal{M}_1\to S_1$ — версальная деформация M_0, поэтому существует пара морфизмов, образующих вместе с π_1 и π_S декартов квадрат

$$\begin{tikzcd} \mathcal{M}'_0 \arrow[r, "h"] \arrow[d, "\pi_S"'] & \mathcal{M}_1 \arrow[d, "\pi_1"] \\ S \arrow[r, "j_1"] & S_1 \end{tikzcd}.$$

Для того, чтобы получить морфизм j_2, рассмотрим коммутативную диаграмму пространств и пучков



где $f=h\times\pi_S$, и покажем, что пучок $\mathcal{F}_1=f_*\mathcal{F}'$ на $\mathcal{M}_1\times S$ является деформацией пучка $F_1=i_{1*}F$ на $\mathcal{M}_1$. Прежде всего, f — вложение, так как $\mathcal{M}'_0=\mathcal{M}\times_{S_1}S$, поэтому $f^*\mathcal{F}_1=f^*f_*\mathcal{F}'=\mathcal{F}'$. Пересечение слоя $\mathcal{M}_1\times\{S\}$ с $f(\mathcal{M}'_0)$ в $\mathcal{M}_1\times S$ совпадает с $f(\pi_S^{-1}(s))=i_4(M_0)\times\{S\}$, поэтому $i_1(M_0)=i_5^{-1}(f(\mathcal{M}'_0))$, где $i_5:\mathcal{M}_1\hookrightarrow\mathcal{M}_1\times S$ — вложение $\mathcal{M}_1$ в качестве $\mathcal{M}_1\times\{s\}$. Следовательно, *носитель пучка* $i_5^*\mathcal{F}_1$ *лежит в* $i_1(M_0)$, и $i_{1*}i_1^*i_5^*\mathcal{F}_1=i_5^*\mathcal{F}_1$. Учитывая, что $i_4^*\mathcal{F}'\simeq F$, получаем требуемый изоморфизм

$$i_5^*\mathcal{F}_1=i_{1*}i_1^*i_5^*\mathcal{F}_1-i_{1*}(i_5i_1)^*\mathcal{F}_1=i_{1*}(f\cdot i_4)^*\mathcal{F}_1=$$
$$=i_{1*}i_4^*f^*\mathcal{F}_1=i_{1*}i_4^*\mathcal{F}'\simeq i_{1*}F=F_1.$$

Наконец, плоскость $\mathcal{F}_1$ над S следует из плоскости $\mathcal{F}'$ и коммутативности диаграммы

$$\begin{tikzcd} \mathcal{M}'_0 \arrow[rr, "f"] \arrow[dr, "\pi_S"'] & & \mathcal{M}_1\times S \arrow[dl] \\ & S & \end{tikzcd}.$$

Итак, мы получили деформацию пучка F_1. Но пучок $\mathcal{F}$ на пространстве $\mathcal{M}_1\times S_2$ является версальной деформацией F_1, поэтому существует морфизм ростков $j_2: S\to S_2$ такой, что $\rho^*\mathcal{F}=\mathcal{F}_1$, где $\rho=\mathrm{id}_{\mathcal{M}_1}\times j_2$.

Рассмотрим теперь S как росток над $S_1 \times S_2$. Квадрат

$$\begin{array}{ccc} \mathcal{M}'_0 & \xrightarrow{g} & \mathcal{M}_1 \times S_2 \\ {\scriptstyle \pi_S}\downarrow & & \downarrow{\scriptstyle \pi_1 \times \mathrm{id}} \\ S & \xrightarrow[j_1 \times j_2]{} & S_1 \times S_2 \end{array}, \text{ где } g = h \times (j_2 \times \pi_S),$$

декартов, так как является композицией двух декартовых квадратов

$$\begin{array}{ccc} \mathcal{M}'_0 & \xrightarrow{h \times \pi_S = f} & \mathcal{M}_1 \times S \\ {\scriptstyle \pi_S}\downarrow & {\scriptstyle j_1 \times \mathrm{id}} & \downarrow{\scriptstyle \pi_1 \times \mathrm{id}} \\ S & \longrightarrow & S_1 \times S_2 \end{array} \quad \text{и} \quad \begin{array}{ccc} \mathcal{M}_1 \times S & \xrightarrow{\mathrm{id} \times j_2 = \rho} & \mathcal{M}_1 \times S_2 \\ {\scriptstyle \pi_1 \times \mathrm{id}}\downarrow & {\scriptstyle \mathrm{id} \times j_2} & \downarrow{\scriptstyle \pi_1 \times \mathrm{id}} \\ S_1 \times S & \longrightarrow & S_1 \times S_2 \end{array}.$$

Отсюда получаем, что $(\mathcal{M}_1 \times S_2)_S \simeq \mathcal{M}_0'$ и пучок $g^* \mathcal{F} = (\rho \cdot f)^* \mathcal{F} = f^* \rho^* \mathcal{F} \simeq f^* \mathcal{F}_1 = f^* f_* \mathcal{F}' = \mathcal{F}'$ является плоским над S. Из свойства универсальности морфизма $U \to S_1 \times S_2$ следует, что $j_1 \times j_2$ пропускается через него, то есть, что существует единственный морфизм $j_3 : S \to U$, индуцирующий пару $(\mathcal{M}_0', \mathcal{F}')$ из $(\mathcal{M}_U, \mathcal{F}_U)$.

Рассмотрим теперь сечение $\mu' \in H^0(M', \mathrm{Sup}\, \mathcal{F}')$, задающее суперструктуру на $\mathcal{O}_{\mathcal{M}_0'} \oplus \mathcal{F}'$. Поскольку $(\mathcal{M}_U)_S = \mathcal{M}_0'$ и $(\mathcal{F}_U)_S \simeq \mathcal{F}'$, элемент μ' является деформацией $\mu_0 \in$ $\in \mathrm{H}^0(M, \mathrm{Sup}(F))$ над S. Поэтому существует морфизм ростков $j_4 : S \to R$, переводящий версальную деформацию $\mu \in$ $\in \mathrm{H}^0(\mathcal{M}_R, \mathrm{Sup}(\mathcal{F}_R))$ в μ'. В итоге мы получили морфизм $j_4 : S \to R$, индуцирующий деформацию $\mathcal{M}' \to S$ суперпространства M из деформации $\mathcal{M} \to R$. Таким образом, $\pi : \mathcal{M} \to R$ — полная деформация.

4.3.4. Осталось доказать, что все морфизмы $\lambda : S \to R$, индуцирующие деформацию $\mathcal{M}' \to S$, имеют один и тот же дифференциал. Другими словами, это означает, что для ростков S, у которых $\mathfrak{m}_S^2 = 0$, такой морфизм λ ровно один.

Пусть $\mathfrak{m}_S^2 = 0$ и $\lambda : S \to R$ — рассматриваемый морфизм. В диаграмме

$$\begin{array}{ccccccccc} \mathcal{M}'_0 & \to & \mathcal{M}_0 & \to & \mathcal{M}_U & \to & \mathcal{M}_1 \times S_2 & \to & \mathcal{M}_1 \\ {\scriptstyle \pi_S}\downarrow & & \downarrow & & \downarrow & & \downarrow & & \downarrow{\scriptstyle \pi_1} \\ S & \longrightarrow & R & \longrightarrow & U & \longrightarrow & S_1 \times S_2 & \to & S_1 \end{array}$$

все квадраты декартовы, а потому является декартовым и квадрат

$$\begin{array}{ccc} \mathcal{M}'_0 & \to & \mathcal{M}_1 \\ {\scriptstyle \pi_S}\downarrow & & \downarrow{\scriptstyle \pi_1} \\ S & \xrightarrow{\lambda_1} & S_1 \end{array},$$

являющийся их композицией. В таком случае морфизмы λ_1 и j_1 индуцируют из $\pi_1 : \mathcal{M}_1 \to S_1$ изоморфные деформации над ростком S. Но деформация π_1 версальна, а $\mathfrak{m}_S^2 = 0$, поэтому $\lambda_1 = j_1$.

Теперь покажем, что композиция λ_2 морфизмов $S\xrightarrow{\lambda}R\to U\to$ $\to S_1\times S_2\xrightarrow{\mathrm{pr}_2}S_2$ совпадает с $j_2:S\to S_2$. Для этого рассмотрим на $\mathcal{M}_1\times S$ когерентные аналитические пучки $\mathcal{F}_1=f_*\mathcal{F}'=$ $=(\mathrm{id}_{\mathcal{M}_1}\times j_2)^*\mathcal{F}$ и $\mathcal{F}_2=(\mathrm{id}_{\mathcal{M}_1}\times\lambda_2)^*\mathcal{F}$. Пучок $\mathcal{F}$ является деформацией пучка $F_1=i_{1*}F$, значит, $\mathcal{F}_1$ и $\mathcal{F}_2$—деформации F_1 над S. Морфизм ростков λ индуцирует деформацию $\mathcal{M}'$ суперпространства $\mathcal{M}$, следовательно, $\mathcal{F}'\simeq(\mathcal{F}_R)_S$. Из коммутативной диаграммы

$$\begin{array}{ccc} \mathcal{M}'_0 & \xrightarrow{f} & \mathcal{M}_1\times S \\ \downarrow & & \downarrow \\ \mathcal{M}_1 & \to & \mathcal{M}_1\times S_2 \end{array}$$

получаем, что $f^*\mathcal{F}_2\simeq\mathcal{F}$ и, так как $f_*f^*\mathcal{F}_1\simeq\mathcal{F}_1$, и потому $f_*f^*\mathcal{F}_2\simeq\mathcal{F}_1$, а $f:\mathcal{M}'_0\to\mathcal{M}_1\times S$—вложение, то существует эпиморфизм $\Psi:\mathcal{F}_2\to\mathcal{F}_1$ плоских S-модулей на $\mathcal{M}_1\times S$, являющийся изоморфизмом над точкой $s\in S$. В силу известных свойств плоских модулей, ядро $\mathrm{Ker}\,\Psi$—тоже плоский S-модуль, равный нулю на $\mathcal{M}_1\times\{S\}$, то есть $\mathrm{Ker}\,\Psi=0$ и Ψ—изоморфизм. Из версальности деформации $\mathcal{F}$ пучка F над ростком S_2 получаем теперь, что $\mathrm{id}_{\mathcal{M}_1}\times j_2=\mathrm{id}_{\mathcal{M}_1}\times\lambda_2$, поэтому морфизмы j_2 и $\lambda_2:S\to S_2$ и морфизмы $j_1\times j_2$ и $\lambda_1\times\lambda_2:S\to S_1\times S_2$ совпадают. Далее, композиция λ_3 морфизмов $\lambda:S\to R$ и $\varphi:R\to U$ делает коммутативной диаграмму

$$\begin{tikzcd} S \arrow[rr, "\lambda_1\times\lambda_2=j_1\times j_2"] \arrow[dr, "\lambda_3"'] & & S_1\times S_2 \\ & U \arrow[ur] & \end{tikzcd}.$$

Но морфизм $j_3:S\to U$ тоже обладает этим свойством, поэтому из универсальности морфизма $U\to S_1\times S_2$ получаем совпадение $S\xrightarrow{j_3}$ и $S\xrightarrow{\lambda}U$ как ростков над U. Это означает, что морфизмы λ и $j_4:S\to R$ являются морфизмами в категории An_U и индуцируют сечения $\mu'\in H^0(\mathcal{M}'_0;\ \mathrm{Sup}(\mathcal{F}'))$ и $\mu\in H^0(\mathcal{M}_R,\ \mathrm{Sup}(\mathcal{F}_R))$. Так как μ—версальная деформация элемента μ_0 и $\mathfrak{m}_S^2=0$, морфизмы j_4 и λ совпадают. Это завершает доказательство теоремы 4.3.1. □

§ 4.4. КАСАТЕЛЬНЫЙ КОМПЛЕКС КОМПЛЕКСНОГО СУПЕРПРОСТРАНСТВА

4.4.1. Касательное расслоение комплексного супермногообразия M содержит разнообразную информацию о его структуре. Так, сечения касательного пучка — векторные поля — отвечают за автоморфизмы супермногообразия, а его высшие когомологии связаны с деформациями комплексной структуры на M. У произвольного суперпространства X тоже можно рассмотреть касательный пучок (пучок дифференцирований структурного пучка $\mathcal{O}_X$), но он от гладкого случая отличается не только тем, что перестает быть локально свободным, но и тем, что теряет информацию о деформациях. Причина этого кроется в том, что суперпространства, в отличие от супермногообразий, могут иметь сложную локальную структуру, допускающую нетривиальные деформации. Правильным аналогом касательного пучка является для суперпространств касательный комплекс, рассматриваемый, как объект производной категории когерентных пучков на X. Для обычных комплексных пространств касательный комплекс определил В. П. Паламодов [14], основываясь на идеях Г. Н. Тюриной. Мы воспроизведем конструкцию работы [14] с необходимыми для суперслучая модификациями.

4.4.2. Резольвента Тюриной ростка. Пусть $X\to Y$ — морфизм ростков комплексных суперпространств, $B\to A$ — двойственный ему гомоморфизм аналитических суперoccурalгебр. *Резольвентой Тюриной* ростка X над Y (или резольвентой аналитической B-супералгебры A) называется $\mathbb{Z}$-градуированная коммутативная B-супералгебра $R=\bigoplus\limits_{-\infty}^{0}R_i$ вместе с нечетным дифференцированием ∂ степени 1, эпиморфизмом B-супералгебр $p:R_0\to A$ и выделенной системой однородных элементов $E=\bigcup\limits_{-\infty}^{-1}E_i$, $E_i\subset R_i$ такая, что

(i) супералгебра R_0-регулярна над B, т. е. изоморфна супералгебре $B\{x,\xi\}$ сходящихся рядов от нескольких переменных с коэффициентами из B;

(ii) все множества E_i конечны и супералгебра R свободно порождается над R_0 множеством образующих E;

(iii) последовательность $\ldots\xrightarrow{\partial}R_{-2}\xrightarrow{\partial}R_{-1}\xrightarrow{\partial}R_0\xrightarrow{p}A$ точна.

Для любого морфизма ростков существует резольвента Тюриной. Действительно, если росток X регулярен над Y, то можно положить $R=R_0=A$, $\partial=0$, $p=\mathrm{id}$ и $E=\varnothing$. Если это не так, выберем произвольный эпиморфизм супералгебр над $Bp:B\{x,\xi\}\to A$. Положим $R_0=B\{x,\xi\}$. Согласно 1.2.4, супералгебра R_0 нётерова и идеал $I=\operatorname{Ker}p$ порождается конечным числом однородных образующих $r_1,\ldots,r_{p+q}$, $\bar r_i=\bar 0$ при $i=1,\ldots$ $\ldots,p$, $\bar r_i=\bar 1$, при $i=p+1,\ldots,p+q$.

В качестве первого приближения к R возьмем градуированную супералгебру $R^1=R_0[E_1]$, где множество E_1 состоит из нечетных образующих $e_1^1,\ldots,e_p^1$ и q четных $e_{p+1}^1,\ldots,e_{p+q}^1$, а дифференцирование $\partial:R^1\to R^1$ задается на образующих формулой $\partial(e_i^1)=r_i$. Покажем, что $\partial^2=0$. Действительно, дифференцирование ∂_1 нечетно, поэтому $\partial^2=\frac{1}{2}[\partial,\partial]$ тоже является дифференцированием, переводящим в нуль все образующие и, следовательно, равным нулю. Таким образом, мы имеем комплекс $\ldots \xrightarrow{\partial} R^1_{-1} \xrightarrow{\partial} R_0 \xrightarrow{p} A$. В члене R_0 он точен по построению. Ядро $\partial: R^1_{-1} \to R_0$ конечно порождено над R_0, поэтому можно добиться точности в члене R^1_{-1}, добавив к E_{-1} конечное множество E_{-2} образующих степени -2, доопределив для них значения дифференциала ∂ так, чтобы $\partial(E_{-2})$ и $\partial(R^1_{-2})$ вместе порождали $\mathrm{Ker}(R^1_{-1} \xrightarrow{\partial} R_0)$. В результате мы получим супералгебру $R^2 := R_0[E_{-1} \cup E_{-2}]$ с дифференцированием ∂, для которого по-прежнему $\partial^2 = 0$ (так как $\partial(E_2) \subset \mathrm{Ker}\,\partial$) и нулевой когомологией $\mathrm{H}^{-1}(R^2)$. Затем мы точно так же добиваемся точности в члене R^2_{-2} (добавляя, если нужно, конечное число образующих степени -3), получая комплекс (R^3, ∂), в котором часть $R^3_{-2} \xrightarrow{\partial} R^3_{-1} \xrightarrow{\partial} R_0$ такая же, как и у комплекса (R^2, ∂). Продолжая шаг за шагом этот процесс, мы в итоге получим требуемую резольвенту $R = R_0[E_1 \cup E_2 \cup E_3 \cup \ldots]$.

Построенная резольвента аналитической супералгебры A, конечно же, не единственна. Достаточно было на каком-нибудь шаге по-другому выбрать образующие, и мы получили бы новую резольвенту. Тем не менее, из условий (i) и (ii) в определении легко следует, что любые две резольвенты гомотопны (в категории градуированных дифференциальных супералгебр).

4.4.3. Касательный комплекс ростка. Пусть $X \to Y$ — морфизм ростков суперпространств, $A = \mathcal{O}_X$, $B = \mathcal{O}_Y$ и (R, ∂) — какая-либо его резольвента. Дифференцирования супералгебры R над B образуют градуированную супералгебру Ли $\mathrm{Der}(R) = \bigoplus_{-\infty}^{\infty} \mathrm{Der}_i(R)$. По определению резольвенты $\partial \in \mathrm{Der}_1(R)$, а из тождества Якоби следует, что оператор $d := ad\partial = [\cdot, \partial]$ является дифференциалом:

$$d^2(a) = [[a, \partial], \partial] = \frac{1}{2}([[a, \partial], \partial] + [[a, \partial], \partial]) = [a, [\partial, \partial]] = 0.$$

Если R' — другая резольвента, то комплекс $\mathrm{Der}(R')$ гомотопен комплексу $\mathrm{Der}(R)$, следовательно, мы получаем объект $\mathrm{Der}(X/Y)$ гомотопической категории комплексов A-модулей, который называется касательным комплексом ростка X над Y (или аналитической B-супералгебры A). Из точности резольвенты R следует, что $H^k(\mathrm{Der}(X/Y)) = 0$ при $k < 0$. Обозначим $\mathrm{H}^k(\mathrm{Der}(X/Y))$ через $T^k(X/Y)$. Градуированный B-модуль $T^*(X/Y) = \bigoplus_{k \geqslant 0} T^k(X/Y)$ наследует из $\mathrm{Der}(X/Y)$ структуру градуированной супералгебры Ли. Ясно, что $T^0(X/Y) = \mathrm{Der}(A/B)$, а для вычисления T^1 можно воспользоваться точной последовательностью

$$0 \to T^0(X/Y) \to \mathrm{Der}(R_0) \xrightarrow{d} \mathrm{Hom}_{R_0}(I, A) \to T^1(X/Y) \to 0,$$

где I — ядро эпиморфизма $p: R_0 \to A$, и $d: t \mapsto p \cdot t|_I$.

Для морфизма $X \to Y$ двух модельных суперпространств (см. 1.1.2) определения резольвенты и касательного комплекса получаются из определений для ростков, если вместо локальных аналитических супералгебр взять супералгебры глобальных сечений структурных пучков $\mathcal{O}_X$ и $\mathcal{O}_Y$.

4.4.4. Пусть $f: X \to Y$ — морфизм произвольных комплексных суперпространств. Рассмотрим покрытие Y модельными суперпространствами V_α и согласованное с ним покрытие X модельными суперпространствами $U_{\alpha,i}$. Для каждого из ограничений $f_{\alpha,i}: U_{\alpha,i} \to V_\alpha$ рассмотрим относительный касательный комплекс $\mathrm{Der}_{\alpha,i}$ модулей над $\mathcal{O}_X(U_{\alpha,i})$. На пересечении $U = U_{\alpha,i} \cap U_{\beta,j}$ возникает в таком случае два комплекса $\mathrm{Der}_{\alpha,i}|_U$ и $\mathrm{Der}_{\beta,j}|_U$, каждый из которых является касательным комплексом ограничения $f|_U$. Поэтому комплексы $\mathrm{Der}_{\alpha,i}|_U$ и $\mathrm{Der}_{\beta,j}|_U$ гомотопны, а их когомологии совпадают. Но это означает, что при каждом p модули $\mathrm{H}^p(\mathrm{Der}_{\alpha,i})$ согласованы на пересечениях и задают когерентный пучок $\mathcal{O}_X$-модулей. Этот пучок называется p-ым касательным пучком морфизма $f: X \to Y$ и обозначается $\mathcal{T}^p(f)$ или $\mathcal{T}^p(X/Y)$. При $p < 0$ $\mathcal{T}^p(X/Y) = 0$, при $p = 0$ — это пучок вертикальных векторных полей на X/Y, пучки $\mathcal{T}^p(X/Y)$ при $p = 1, 2$ содержат информацию о деформациях локальной структуры суперпространства X над Y. Но за глобальные деформации комплексной структуры отвечают более сложные объекты, которые можно построить, научившись склеивать сами комплексы $\mathrm{Der}_{\alpha,i}$, а не только их когомологии.

Добиться согласования всех гомотопий, связывающих комплексы $\mathrm{Der}_{\alpha,i}$ на пересечениях суперпространств $U_{\alpha,i}$, чтобы получить в результате элемент гомотопической категории комплексов когерентных пучков на X, можно не всегда. Тем не менее, в производной категории $\mathrm{D\,Coh}_X$ существует объект — касательный комплекс — $T(X/Y)$, ограничения которого на $U_{\alpha,i}$ совпадают в $\mathrm{D\,Coh}_{U_{2,i}}$ с комплексами $\mathrm{Der}_{\alpha,i}$. Его можно построить с помощью теоремы о локальном задании объектов производной категории пучков [20] доказав отсутствие локальных отрицательных Ext-ов, но нам будет удобнее использовать подход, основанный на глобализации первичного понятия — резольвенты.

4.4.5. Резольвента комплексного суперпространства. Пусть $f: X \to Y$ — морфизм комплексных суперпространств. Назовем *относительным полиэдром* P в X над Y подпространство в X вида $\varphi^{-1}(D \times Y)$, где $D = \{|x_i| < 1 \mid i = 1, \ldots, p\}$ — полидиск в суперпространстве $\mathbb{C}^{p|q}$, а $\varphi: U \to \mathbb{C}^{p|q} \times P$ — барьерное отображение — морфизм над Y штейновой окрестности U-замыкания P.

Пусть $\mathcal{U}=\{U_\alpha\}_{\alpha\in I}$ — покрытие комплексного суперпространства X относительными полиэдрами. Пусть $N=\{A\subset I \mid \cap U_\alpha\neq\varnothing\}$ — нерв покрытия $\mathcal{U}$. Для каждого симплекса $A\in N$ пересечение $U_A=\bigcap_{\alpha\in A} U_\alpha$ является относительным полиэдром над Y с барьерным отображением $\varphi_A=(\varphi_{\alpha 0},\ldots,\varphi_{\alpha n})$, $\varphi_\alpha: U_\alpha\to D_\alpha\times Y$, $\varphi_A: U_A\to D_A\times Y$, D_α — полидиск в $\mathbf{C}^{p_\alpha|q_\alpha}$, D_A — полидиск в $\mathbf{C}^{p_A|q_A}$, $p_A=\sum p_\alpha$, $q_A=\sum_A q_\alpha$. *Резольвента морфизма* $f: X\to Y$ комплексных суперпространств на покрытии $\mathcal{U}$ — это

(i) набор пучков дифференциальных градуированных суперкоммутативных алгебр $\mathcal{R}^{\cdot}_A$, на $\mathbf{C}^{p_A|q_A}\times Y$, $A\in N$, с выделенными множествами сечений E_A такой, что для любой точки $x\in X$ слой $\mathcal{R}^{\cdot}_{A,x}$ является резольвентой морфизма ростков $X_x\to Y_{f(x)}$, и

(ii) набор морфизмов ограничения (p^B_A, r^B_A) для каждой пары симплексов $A\subset B$, где $p^B_A: D_B\times Y\to D_A\times Y$ — проекция относительных полидисков, а r^B_A — гомоморфизм над p^B_A пучков дифференциальных градуированных супералгебр $r^B_A: (p^B_A)^*\mathcal{R}^{\cdot}_A\to\mathcal{R}^{\cdot}_B$, переводящий E_A в E_B и совпадающий на членах степени нуль с вложением $(p^B_A)^*\mathcal{O}(\mathbf{C}^{d_B|q_B}\times Y)\to\mathcal{O}(\mathbf{C}^{p_A|q_A}\times Y)$, такой, что для любой тройки $A\subset B\subset C$ выполнено $r^C_B\cdot r^B_A=r^C_A$.

У любого морфизма $f: X\to Y$ комплексных суперпространств для любого покрытия X относительными полиэдрами над Y существует относительная резольвента. Доказательство непосредственно переносится из [14].

4.4.6. Резольвенты и деформации. Пусть $(X,\mathcal{O}_X)$ — комплексное суперпространство, $(\mathcal{R}^{\cdot}, d)$ — его резольвента на некотором покрытии $\mathcal{U}$. Рассмотрим росток комплексного суперпространства S и произвольный $\mathcal{O}_S$ — линейный дифференциал d_S в супералгебре $R\otimes\mathcal{O}_S$, продолжающий d. Тогда факторалгебры $\mathcal{O}_A := \mathcal{R}^0\otimes\mathcal{O}_S/\mathrm{Im} d$, $A\in N(\mathcal{U})$ склеиваются в пучок, задающий на $X\times S$ структуру комплексного суперпространства над S. Следующее предложение показывает, что любую деформацию можно получить таким способом [14].

Предложение. Пусть $\pi: \mathfrak{X}\to S$ — деформация комплексного суперпространства X, $\mathcal{R}^{\cdot}$ — относительная резольвента морфизма π для некоторого покрытия $\mathcal{U}$, а T — подросток ростка S. Тогда комплекс $\mathcal{R}^{\cdot}\otimes_{\mathcal{O}_S}\mathcal{O}_T$ является относительной резольвентой суперпространства $\mathfrak{X}_T := \mathfrak{X}\times_S T$ над T для покрытия $\mathcal{U}\cap\mathfrak{X}_T$.

Обратно, пусть $\mathcal{R}^{\cdot}_T$ — относительная резольвента суперпространства $\mathfrak{X}_T$ над T для покрытия $\mathcal{U}_T$. Тогда для любого натурального n существуют покрытия суперпространства $\mathcal{U}$ относительными полиэдрами над S и относительная резольвента

$\mathcal{R}^{\cdot}$ на нем, такие, что $\mathcal{U}_T = \mathcal{U} \cap \mathfrak{X}_T$, а резольвента $\mathcal{R}^{\cdot} \otimes \mathcal{O}_T$ совпадает с $\mathcal{R}^{\cdot}$ в членах степени $\geqslant -n$. □

4.4.7. Касательный комплекс. Пусть $f: X \to Y$ — морфизм комплексных суперпространств, $\mathcal{R}$ — его резольвента на некотором покрытии $\mathcal{U}$ с нервом N. Назовем дифференцированием $\mathcal{R}^{\cdot}$ степени k набор дифференцирований степени k супералгебр $\mathcal{R}_A$, $A \in N$, $\deg u_A = k$, согласованных с морфизмами ограничения r^B_A. Все дифференцирования резольвенты $\mathcal{R}$ образуют градуированную супералгебру Ли $\mathrm{Der}(\mathcal{R})$. Дифференциал $\partial = (\partial_A)$ резольвенты $\mathcal{R}$ принадлежит $\mathrm{Der}^1(\mathcal{R})$ по определению, поэтому оператор $d := [\cdot, \partial]$ тоже имеет степень 1 и превращает супералгебру Ли $\mathrm{Der}(\mathcal{R})$ в комплекс. Ограничивая этот комплекс на модельное подсуперпространство $U_\alpha \in \mathcal{U}$, мы получим касательный комплекс $\mathrm{Der}(f|_{U_\alpha})$ морфизма модельных суперпространств, который при замене резольвенты заменяется на гомотопный комплекс. Поэтому образ комплекса $\mathrm{Der}(\mathcal{R})$ в производной категории не зависит от выбора резольвенты. Он называется *относительным касательным комплексом* X над Y и обозначается $\mathrm{Der}(X/Y)$. Введем обозначение $T^n(X/Y)$ для когомологий комплекса $\mathrm{Der}(X/Y)$. Они сосредоточены в положительных степенях и связаны с касательными пучками $\mathcal{T}(X/Y)$ стандартной спектральной последовательностью со вторым членом $E_2^{pq} = H^p(X; \mathcal{T}^q(X/Y))$. Отсюда получаем точную последовательность для вычисления T^1:

$0 \to H^1(X; \mathcal{T}^0(X/Y)) \to T'(X/Y) \to H^0(X; \mathcal{T}^1(X/Y) \to H^3(X; \mathcal{T}_0(X/Y)) \to \ldots$, которая вместе с точной последовательностью из п. 4.4.3 показывает, что $T^1(X/Y)$ определяется членами $\mathcal{R}_{-1}$ и $\mathcal{R}_0$ резольвенты морфизма f.

§ 4.5. ТЕОРИЯ ПРЕПЯТСТВИЙ ДЛЯ СУПЕРПРОСТРАНСТВ

В этом параграфе завершается доказательство теоремы 2.1.2 о существовании версальных деформаций суперпространств и ростков. В условиях теоремы наличие четноверсальных деформаций следует из § 4.3, а поэтому все, что осталось сделать для того, чтобы можно было применить критерий квазипредставимости 4.2.3. — это построить теорию препятствий. Мы сделаем это с помощью касательного комплекса по аналогии с чисто четным случаем, подробно рассмотренным в [32] для малых расширений.

4.5.1. Предложение. У функтора $\mathrm{DSp}(X, \cdot)$, где X — компактное комплексное суперпространство или росток, существует теория препятствий.

4.5.2. Доказательство. Прежде всего мы построим препятствие к продолжению деформаций для инфинитезимальных расширений со значением в когомологиях касательного комплекса, а затем объясним, как от касательного комплекса перейти к комплексу свободных конечнопорожденных модулей над базой деформации. Основная идея здесь, как и в случае малых расширений, состоит в том, что задавать деформации X над S можно, варьируя дифференциал резольвенты тривиальной деформации $X \times S \to S$ (см. 4.4.6). Зафиксируем резольвенту $(\mathcal{R}, \partial)$ суперпространства X на полиэдральном покрытии $\mathcal{U}$ и для произвольного ростка S обозначим через $\mathcal{R}_S$ — градуированную супералгебру $\mathcal{R} \hat{\otimes} \mathcal{O}_S$. Тогда по 4.4.6 и 4.4.7 деформации X над S соответствуют дифференцированиям $d \in \mathrm{Der}^1(\mathcal{R}_S)$ таким, что $d^2=0$ $d \otimes \mathrm{id} = \partial$.

4.5.3. Лемма. Пусть $0 \to I \to A' \to A \to 0$ — инфинитезимальное расширение, соответствующее вложению ростков $S \hookrightarrow S'$, а росток S_0 соответствует аналитической супералгебре $A_0 = A/\mathfrak{n}_A$. Тогда существует отображение Ob: $\mathrm{DSp}(X, S) \to \mathrm{H}^2(\mathrm{Der}^{\cdot}(\mathcal{R}_{S_0}) \otimes_{A_0} I)_{\bar{0}}$ такое, что $\mathrm{Ob}(\pi)=0$ тогда и только тогда, когда деформация π может быть продолжена до деформации π' над S'. На множестве всех продолжений π до деформации над S' транзитивно действует группа $\mathrm{H}^1(\mathrm{Der}^{\cdot}(\mathcal{R}_{S_0}) \otimes_{A_0} I)_{\bar{0}}$. Это действие свободно, если $A = A_0$. Отображение Ob и действие группы $\mathrm{H}^1(\mathrm{Der}^{\cdot}(\mathcal{R}_{S_0}) \otimes I)_{\bar{0}}$ функториальны.

Доказательство. Пусть деформации $\pi: \mathfrak{X} \to S$ и $\pi_0 = \pi|_{S_0}$ задаются дифференциалами d и d_0 в супералгебрах $\mathcal{R}_S$ и $\mathcal{R}_{S_0}$. Поднимем $d \in [\mathrm{Der}^1(\mathcal{R}_S)]_{\bar{1}}$ до дифференцирования $d' \in [\mathrm{Der}^1(\mathcal{R}_{S'})]_{\bar{1}}$ и рассмотрим дифференцирование степени 2 $\omega = d'^2 = \frac{1}{2}[d', d'] \in \mathrm{Der}^2(\mathcal{R}_{S'})_{\bar{0}}$. Из того, что $d' \underset{A}{\otimes} id_A = d$ и $\mathfrak{n}_{A'} I = 0$, следует, что $\omega \in [\mathrm{Der}^2(\mathcal{R}_{S_0}) \otimes_{A_0} I]_{\bar{0}}$ и $[d_0, \omega] = d_0 d'^2 - d'^2 d_0 = d'^3 - d'^3 = 0$, то есть ω — 2-коцикл в комплексе $\mathrm{Der}^{\cdot}(\mathcal{R}_{S_0}) \otimes I$. Положим $\mathrm{Ob}(\pi) := [\omega] \in \mathrm{H}^2[\mathrm{Der}(\mathcal{R}_{S_0}) \otimes I]_{\bar{0}}$ и покажем, что $\mathrm{Ob}(\pi)$ является препятствием к продолжению деформации π до деформации над S'. Пусть $\mathrm{Ob}(\pi)=0$, то есть $\omega = [d_0, r]$ для некоторого $r \in [\mathrm{Der}^1(\mathcal{R}_{S_0}) \otimes I]_{\bar{1}}$. Тогда дифференцирование $d'' = d' - r$ тоже продолжает d и $d''^2 = 0$, то есть d'' задает деформацию, продолжающую π. Обратно, пусть π' — деформация, продолжающая π, а d'' — задающий ее дифференциал. Тогда $d'' \otimes_{A'} id_A = d$ и $r := d' - d'' \in [\mathrm{Der}^1(\mathcal{R}_{S_0}) \otimes I]_{\bar{1}}$. Но $[d_0, r] = d'^2 = \omega$, откуда $[\omega] = 0$. Независимость препятствия $\mathrm{Ob}(\pi)$ от выбора резольвенты и его функториальность доказываются так же, как и в работе [32]. Пусть теперь $\mathrm{Ob}(\pi)=0$ и π' и π'' — два продолжения деформации π на S', задаваемые дифференциалами d' и d''. Тогда $r := d' - d'' \in \mathrm{Der}^1(\mathcal{R}_{S_0}) \otimes I$ и $[d_0, r] = d'' r + r d' = 0$, так как $d'^2 = d''^2 = 0$ и $I^2 = 0$. Значит r является 1-коциклом $\mathrm{Der}^1(\mathcal{R}_{S_0}) \otimes I$. Обратно, если $[d_0, r] = 0$ и d' — какое-нибудь продолжение дифференциала d, то $(d' + r)^2 = d'^2 + [d', r] + r^2 = 0$ и $d' + r$ тоже задает деформацию, продолжающую π. Если заменить r когомологичным ему коциклом $r'=r+[d_0, p]$, где $p\in(\mathrm{Der}^0(\mathcal{R}_{S_0})\otimes I)_{\bar{0}}$, то деформации, задаваемые дифференциалами $d'+r$ и $d'+r'$ будут изоморфны относительно изоморфизма $id+p$ резольвенты $\mathcal{R}_{S'}$, переводящего $d'+r'$ в $d'+r$. Функториальность действия следует из [32]. Наконец, если $A=A_0$, то $A'=A\oplus I$, и любой автоморфизм супералгебры $\mathcal{R}_S$ продолжается до автоморфизма супералгебры $\mathcal{R}_{S'}$. Поэтому, если деформации, определяемые дифференциалами $d'+r$ и d' изоморфны, то $[r]=0$ и действие группы $\mathrm{H}^1(\mathrm{Der}^{\cdot}(\mathcal{R}_{S_0})\otimes I)_{\bar{0}}$ на множестве продолжений не имеет неподвижных точек. □

4.5.4. Окончание доказательства предложения 4.5.1 и теоремы 2.1.2. Все, что осталось — это построить правильную теорию препятствий, то есть показать, что можно заменить комплекс $\mathrm{Der}^{\cdot}(\mathcal{R}_{S_0})$ комплексом $\mathcal{L}^{\cdot}$ конечнопорожденных свободных A_0-модулей, таким что $\mathrm{H}^q(\mathcal{L}^{\cdot}\otimes I)=\mathrm{H}^q(\mathrm{Der}^{\cdot}\otimes I)$. Предложение 1.5.3. утверждает, что это можно сделать для каждого из касательных пучков $\mathcal{T}^p(\mathfrak{X}_0/S_0)$, тогда существование $\mathcal{L}$ — для касательного комплекса следует из спектральной последовательности 4.4.7. (см. также [19]). □

§ 4.6. ЧЕТНОВЕРСАЛЬНАЯ ДЕФОРМАЦИЯ КОГЕРЕНТНОГО АНАЛИТИЧЕСКОГО ПУЧКА

4.6.1. Теорема. Пусть $(M, \mathcal{O}_M)$ — комплексное суперпространство, F — когерентный пучок $\mathcal{O}_M$-модулей с компактным носителем. Тогда F имеет четноверсальную деформацию.

Доказательство. Как и в случае суперпространств, мы будем строить четноверсальную деформацию пучка F, деформируя различные четные объекты. Прежде всего, выясним, как устроены когерентные пучки на суперпространствах с чисто четной точки зрения.

4.6.2. Лемма. Пусть $(M, \mathcal{O}_M)$ — комплексное суперпространство, $i:(M, \mathcal{O}_M)\to(M, \mathcal{O}_{\bar{0}})$ — проекция, соответствующая вложению $\mathcal{O}_{\bar{0}}\to\mathcal{O}_M$. Для каждого когерентного $\mathcal{O}_{\bar{0}}$-модуля $E=E_{\bar{0}}\oplus E_{\bar{1}}$ определены функториальные по E когерентные $\mathcal{O}_{\bar{0}}$-модули $\mathcal{K}(E)$, $\mathcal{L}(E)$, морфизм $\varphi_E:\mathcal{K}(E)\to\mathcal{L}(E)$ и сечение $\mu_E\in\mathrm{H}^0(M, \mathcal{L}(E))$ такие, что когерентные пучки $\mathcal{O}_M$-модулей F, для которых $i_*F=E$, находятся в естественном взаимно однозначном соответствии с множеством $\{\gamma\in\mathrm{H}^0(M, \mathcal{K}(E)) \mid \varphi_E(\gamma)=\mu_E\}$.

Доказательство. Пусть F — когерентный пучок на суперпространстве $(M, \mathcal{O}_M)$. Структура $\mathcal{O}_M$-модуля на $F=F_{\bar{0}}\oplus F_1$ определяется заданием структур $\mathcal{O}_{\bar{0}}$-модуля в $F_{\bar{0}}$ и $F_{\bar{1}}$ и умножения на нечетные элементы, то есть четного $\mathcal{O}_{\bar{0}}$-гомоморфизма $\nu:\mathcal{O}_{\bar{1}}\otimes_{\mathcal{O}_{\bar{0}}}F\to\Pi F$. С другой стороны, для того, чтобы такой гомоморфизм мог превратить $\mathcal{O}_{\bar{0}}$-модуль E в $\mathcal{O}_M$-модуль, необходимо, чтобы он был согласован с умножением $\mu:\mathcal{O}_{\bar{1}}\otimes_{\mathcal{O}_{\bar{0}}}\mathcal{O}_{\bar{1}}\to\mathcal{O}_{\bar{0}}$ в структурном пучке. Это равносильно требованию коммутативности диаграммы $\mathcal{O}_{\bar{0}}$-модулей

$$\begin{CD} \mathcal{O}_{\bar{1}}\otimes\mathcal{O}_{\bar{1}}\otimes E @>{id\otimes\nu}>> \mathcal{O}_{\bar{1}}\otimes\Pi E \\ @V{\mu\otimes id}VV @VV{\Pi\nu}V \\ \mathcal{O}_{\bar{0}}\otimes E @>{\sim}>> E \end{CD}\quad .$$

Теперь ясно, как построить пучок $\mathcal{K}(E)$.

Пусть ν^2 обозначает композицию гомоморфизмов $\mathrm{id}_{\mathcal{O}_{\bar{1}}}\otimes\nu$ и $\Pi\nu$. Соответствие $\nu\mapsto\nu^2$ определяет гомоморфизм $\mathcal{O}_{\bar{0}}$-модулей $\beta_E:\mathrm{Hom}(\mathcal{O}_{\bar{1}}\otimes E,\ \Pi E)\to\mathrm{Hom}(\mathcal{O}_{\bar{1}}\otimes\mathcal{O}_{\bar{1}}\otimes E,\ E)$, причем множество структур $\mathcal{O}_M$-модуля в E совпадает с подмножеством $\beta^{-1}(\mu\otimes\mathrm{id}_E)$ в $\mathrm{H}^0(M,\mathrm{Hom}(\mathcal{O}_{\bar{1}}\otimes E,\Pi E))$. Положив теперь $\mathcal{K}(E)=\mathrm{Hom}(\mathcal{O}_{\bar{1}}\otimes E,\pi E)$, $\mathcal{L}(E)=\mathrm{Hom}(\mathcal{O}_{\bar{1}}\otimes\mathcal{O}_{\bar{1}}\otimes E,E)$ и $\mu_E=\mu\otimes\mathrm{id}_E\in\mathrm{H}^0(M,\mathcal{L}(E))$, мы получим все, что требовалось.□

4.6.3. Пусть теперь на комплексном суперпространстве $(M,\mathcal{O}_M)$ задан когерентный пучок $F=F_{\bar{0}}\oplus F_{\bar{1}}$ с компактным носителем. Мы построим его деформацию, продеформировав сначала F как пучок на комплексном пространстве $(M,\mathcal{O}_{\bar{0}})=M_0$, а затем элемент $\nu\in\mathrm{H}^0(M,\mathcal{K}(E))$, отвечающий за структуру $\mathcal{O}_M$-модуля в F.

По теореме 1 работы [37] существует версальная деформация $(\mathcal{F}_S,S)$ пучка F на $(M,\mathcal{O}_{\bar{0}})$ с базой (S,s_0). Пучок $\mathcal{K}(\mathcal{F}_S)$ является когерентным и S-плоским $\mathcal{O}_{M_0\times S}$-модулем, поэтому к элементу ν применима теорема 2.3.1. В результате мы получим S-росток $\lambda:T\to S$, плоский над T пучок $\mathcal{F}_T=(\mathrm{id}_{M_0}\times\lambda)^*\mathcal{F}_S$ и сечение $\nu_T\in\mathrm{H}^0(M\times T,\ \mathcal{K}(\mathcal{F}_T))$, являющееся версальной деформацией класса ν. Но, вообще говоря, ν_T не задает в $\mathcal{F}_T$ структуры $\mathcal{O}_{M\times T}$-модуля, так как не принадлежит $\beta^{-1}_{\mathcal{F}_T}(\mu_{\mathcal{F}_T})$. Чтобы исправить положение, сузим росток T.

Пучок $\mathcal{L}(\mathcal{F}_S)$ является S-плоским и когерентным на $M\times S$. Поэтому существует S-росток $\rho:U\to S$ и сечение $\mu_U\in\mathrm{H}^0(M\times U,\ (\mathrm{id}_M\times\rho)^*\mathcal{L}(\mathcal{F}_S))$, являющееся версальной деформацией элемента $\mu\in\mathrm{H}^0(M,\mathcal{L}(F))$. Гомоморфизм $\beta_{\mathcal{F}_T}:\mathcal{K}(\mathcal{F}_T)\to\mathcal{L}(\mathcal{F}_T)$ переводит ν_T в сечение $\mu_T\in\mathrm{H}^0(M\times T,\ \mathcal{L}(\mathcal{F}_T))$, являющееся деформацией μ. Пусть $\varphi:T\to U$ — морфизм ростков над S, индуцирующий μ_T из μ_U. Сечение $\mu_{\mathcal{F}_S}$ пучка $\mathcal{L}(\mathcal{F}_S)$ тоже является деформацией μ, а поэтому существует сечение $j:S\to U$ морфизма ρ, индуцирующее его из μ_U.

Рассмотрим теперь росток $R=\varphi^{-1}(j(S))$ и индуцированные вложением $i: R\to T$ деформации $\mathcal{F}_R=(\mathrm{id}_M\times i)^*\mathcal{F}_T$ и $\nu_R=i^{\#}\nu_T\in H^0(M\times R,\, \mathcal{K}(\mathcal{F}_R))$. Сечение $\beta_{\mathcal{F}_R}(\nu_R)$ пучка $\mathcal{L}(\mathcal{F}_R)=i^*\mathcal{L}(\mathcal{F}_T)$ является деформацией μ, индуцированной из $\mu_T|_R$. Но $\mu_T|_R=\mu_{\mathcal{F}_R}$ в силу выбора R, поэтому $\beta_{\mathcal{F}_R}(\nu_R)=\mu_{\mathcal{F}_R}$ и пучок $\mathcal{F}_R$ снабжен структурой модуля над супералгеброй $\mathcal{O}_{M\times R}$. По 1.4.2 он когерентен и является деформацией пучка F.

4.6.4. Докажем теперь, что $(\mathcal{F}_R, R)$ является четноверсальной деформацией пучка F.

Пусть $\mathcal{F}'$ — деформация F над ростком комплексного пространства (S', s_0'). Разложение $\mathcal{F}'=\mathcal{F}'_{\bar 0}\oplus\mathcal{F}'_{\bar 1}$ в сумму $\mathcal{O}_{M_0\times S'}$-подмодулей задает деформации $\mathcal{O}_{\bar 0}$-модулей $F_{\bar 0}$ и $F_{\bar 1}$ с базой S'. Так как деформация $\mathcal{F}_S$ версальна, существует морфизм ростков $j_1: S^1\to S$, для которого $\mathcal{F}'_{\bar 0}=(\mathrm{id}_{M_0}\times j_1)^*\mathcal{F}_{S,\bar 0}$ и $\mathcal{F}'_{\bar 1}\simeq$ $\simeq(\mathrm{id}_{M_0}\times j_1)^*\mathcal{F}_{S,\bar 1}$. Пусть $\nu'\in H^0(M\times S',\, \mathcal{K}(\mathcal{F}'_{\bar 0}\oplus\mathcal{F}'_{\bar 1}))$ — элемент, задающий структуру $\mathcal{O}_{M\times S'}$ — модуля в $\mathcal{F}'_{\bar 0}\oplus\mathcal{F}'_{\bar 1}$. Ограничение $\mathcal{F}'$ на слой $M\times\{s_0'\}$ изоморфно F, поэтому ν' при этом изоморфизме переходит в $\nu\in H^0(M,\, \mathcal{K}(F_{\bar 0}\oplus F_{\bar 1}))$, следовательно, ν' является деформацией класса ν над ростком S'. Но $\nu_T\in H^0(M\times T,\, \mathcal{K}(\mathcal{F}_T))$ — версальная деформация элемента ν, поэтому существует морфизм ростков $j_2: S'\to T$ над S, индуцирующий ν' над S'.

Рассмотрим теперь элемент $\mu'=\beta_{\mathcal{F}'}(\nu')\in H^0(M\times S',\, \mathcal{L}(\mathcal{F}_{S',\bar 0}\otimes\mathcal{F}_{S',\bar 1}))$. Элемент ν' определяет структуру $\mathcal{O}_{M\times S'}$-модуля на $\mathcal{F}_{S',\bar 0}\oplus\mathcal{F}_{S',\bar 1}$, поэтому, по лемме 4.4.2,

$$\mu'=\mu_{\mathcal{F}_{S'}}=(\mathrm{id}_M\times j_2)^{\#}\mu_T=(\mathrm{id}_M\times\psi)^{\#}\mu_U,$$

где ψ — композиция морфизмов φ и j_2 в диаграмме

$$\begin{tikzcd}
& S' \arrow[dl, dashed, "j_3"'] \arrow[d, "j_2"] \arrow[dr, "\psi"] & \\
R \arrow[r, "i"] & T \arrow[r, "\varphi"] \arrow[d, "\lambda"] & U \arrow[dl, shift right, "\rho"'] \\
& S \arrow[ur, shift right, "j"'] &
\end{tikzcd}$$

Пусть $\psi'=j\cdot\lambda\cdot j_2$, тогда $(\mathrm{id}_M\times\psi')^{\#}\mu_U=\mu_{\mathcal{F}_{S'}}=\mu'$, так как $(\mathrm{id}_M\times j)^{\#}\mu_U=\mu_{\mathcal{F}_S}$. Морфизмы ψ и ψ' индуцируют над S' одну и ту же деформацию сечения μ. Мы, таким образом, оказались в области применимости предложения 3.1.2, из которого следует, что морфизмы ψ и ψ' совпадают. Поэтому $\mathrm{Im}\,\psi\subset\mathrm{Im}\,j$ и, следовательно, $\mathrm{Im}\,j_2\subset\mathrm{Im}\,i$. Пучки $(\mathrm{id}_M\times j_2)^*\mathcal{F}_R$ и $\mathcal{F}'$ изоморфны как модули над $\mathcal{O}_{\overline{0}}$, и кроме того, $(\mathrm{id}_M\times j_2)^{\#}\nu_T=\nu'$, поэтому они изоморфны и как $\mathcal{O}_{M\times S'}$-модули.

Осталось установить единственность производной индуцирующего морфизма $j_3: S'\to R$.

Пусть $\mathfrak{m}^2_{S'}=0$ и морфизм $h: S'\to R$ обладает тем же свойством, что и j_3, то есть $\mathcal{O}_{M\times S'}$-модули $(\mathrm{id}_M\times h)^*\mathcal{F}_R$ и $\mathcal{F}'$ изоморфны. Тогда они изоморфны и как $\mathcal{O}_{M_0\times S'}$-модули, то есть композиции $\lambda\cdot i\cdot j_3$ и $\lambda\cdot i\cdot h$ индуцируют из деформации $\mathcal{F}_S$ над S эквивалентные деформации пучка $F_{\overline{0}}\oplus F_{\overline{1}}$. Но деформация $\mathcal{F}_S$ версальна, а $\mathfrak{m}^2_{S'}=0$, поэтому $\lambda\cdot i\cdot j_3=\lambda\cdot i\cdot h$ и морфизм h не изменяет структурного морфизма $S'\to S$. Следовательно, элементы $(\mathrm{id}_M\times(i\cdot h))^{\#}\nu_T$ и $(\mathrm{id}_M\times(i\cdot j_3))^{\#}\nu_T$ при $\mathcal{O}_{\overline{0}}$-изоморфизмах $(\mathrm{id}_M\times(i\cdot h))^*\mathcal{F}_T\simeq\mathcal{F}'$ и $(\mathrm{id}_M\times(i\cdot j_3))^{\#}\nu_T$ переходят в $\nu'\in$ $\in\mathrm{H}^0(M\times S', \mathcal{F}')$, и из версальности деформации ν_T получаем, что композиции $i\cdot h$ и $i\cdot j_3$ тоже совпадают. Совпадение морфизмов h и j_3 следует теперь из того, что $i: R\to T$ — вложение.

§ 4.7. ТЕОРИЯ ПРЕПЯТСТВИЙ ДЛЯ ПУЧКОВ

В этом параграфе завершается доказательство существования версальной деформации когерентного аналитического пучка с компактным носителем. Все, что нам осталось — это построить теорию препятствий. Мы сделаем это, модифицировав конструкцию Сиу—Траутманна [37].

4.7.1. Теорема. Пусть X — комплексное суперпространство, F — когерентный аналитический пучок на X с компактным носителем. Тогда у F существует версальная деформация, размерность базы которой равна $\dim \mathrm{Ext}^1_{\mathcal{O}_X}(X; F, F)$.

Доказательство. Четноверсальная деформация у F существует в силу 4.6.1. Пусть $0\to I\to A'\to A\to 0$ — инфинитезимальное расширение аналитических супералгебр, соответствующее вложению ростков суперпространств $Y\hookrightarrow Y'$. Как будет доказано в 4.7.4, препятствием к продолжению деформации $\mathcal{F}$ пучка F с базой Y до деформации над Y' служит сечение $\omega[\mathcal{F}]$ пучка $\mathrm{Ext}^2_{\mathcal{O}_X}(\pi; \mathcal{F}_0, \mathcal{F}_0\underset{A_0}{\otimes}I)_{\overline{0}}$, где $A_0=A/\mathfrak{n}_A=\mathcal{O}_{Y_0}$, $\mathcal{F}_0$ — ограничение $\mathcal{F}$ на $X\times Y_0$, а $\pi: X\times Y_0\to Y_0$ — проекция, а когда $\omega[\mathcal{F}]=0$, то на множестве всех продолжений $\mathcal{F}$ до деформации пучка F над Y' транзитивно (и точно в случае, когда $A\in C_0$, $A'=A[I]$) действует группа $\mathrm{Ext}^1_{\mathcal{O}_X}(\pi; \mathcal{F}_0, \mathcal{F}_0\underset{A_0}{\otimes}I)_{\overline{0}}$. По 1.5.3, существует комплекс $L^\bullet$ конечнопорожденных свободных A_0-модулей такой, что $\mathrm{H}^i(L^\bullet\otimes_{A_0}I)\simeq\mathrm{Ext}^i_{\mathcal{O}_X}(\pi; \mathcal{F}_0, \mathcal{F}_0\otimes I)$, $i=1; 2$. Таким образом, условия теоремы выполнены и у пучка F существует версальная деформация. Утверждение о размерности базы версальной деформации следует тогда из замечания 4.2.6. □

4.7.2. Определение. Пусть $\mathcal{U}=(U_i)_i\in I$ — открытое покрытие комплексного суперпространства X. Пусть N — нерв покрытия $\mathcal{U}$. Для $\alpha=\{i_0, i_1, \ldots, i_q\}\in N$ обозначим через $U_\alpha=U_{i_0}\cap\cap U_{i_1}\cap\ldots\cap U_{i_q}$ и $\mathcal{O}_\alpha=\mathcal{O}_X|_{U_\alpha}$. *Симплициальной системой* пучков над $\mathcal{U}$ называется семейство $\mathcal{L}=\{\mathcal{L}_\alpha\}_{\alpha\in N}$ пучков $\mathcal{O}_\alpha$-модулей вместе с семейством $\{\rho_{\beta\alpha}\}$, $\alpha\supset\beta$, связывающих (четных) гомоморфизмов $\rho_{\beta\alpha}:\mathcal{L}_\alpha\to\mathcal{L}_\beta|U_\alpha$, таких, что $\rho_{\alpha\alpha}=\mathrm{id}$ и $(\rho_{\gamma\beta}|_{U_\alpha})\rho_{\beta\alpha}==\rho_{\gamma\alpha}$ для $\alpha\supset\beta\supset\gamma$.

Морфизм симплициальных систем $\varphi:\mathcal{L}\to\mathcal{L}'$ над $\mathcal{U}$ — это семейство гомоморфизмов $\varphi_\alpha:\mathcal{L}_\alpha\to\mathcal{L}'_\alpha$, согласованных с связывающими гомоморфизмами. Мы, таким образом, получаем абелеву категорию. С произвольным $\mathcal{O}_X$-модулем $\mathcal{F}$ связана симплициальная система $\mathcal{F}|_{\mathcal{U}}$, у которой $(\mathcal{F}|_{\mathcal{U}})_\alpha=\mathcal{F}|_{U_\alpha}$ и $\rho_{\beta\alpha}=\mathrm{id}$. Если $\mathcal{F}$ — когерентный пучок, а покрытие $\mathcal{U}$ выбрано достаточно мелким и суперпространство X конечномерно, то у $\mathcal{F}|\mathcal{U}$ существует резольвента $\mathcal{R}^\cdot\to\mathcal{F}|_{\mathcal{U}}$ из симплициальных систем $\mathcal{R}^i$, у которых $\mathcal{R}^\cdot_\alpha$ — свободный конечнопорожденный $\mathcal{O}_\alpha$-модуль. Тогда комплекс $\mathcal{L}^\cdot$ симплициальных систем $\mathcal{L}^{-q}=\bigoplus\limits_{|\alpha|+p=q+1}\tilde{\mathcal{R}}^p_\alpha$, где через $\tilde{\mathcal{R}}^p_\alpha$ обозначена симплициальная система, в которой $(\tilde{\mathcal{R}}^p_\alpha)_\beta==\mathcal{R}^p_\alpha|_{U_\beta}$, если $\alpha\subset\beta$ и 0, если $\alpha\not\subset\beta$, также является резольвентой $\mathcal{F}|_{\mathcal{U}}$. Кроме того, для произвольного когерентного пучка $\mathfrak{G}$ на X имеем изоморфизм $\mathrm{Ext}^q_{\mathcal{O}_X}(X;\mathcal{F},\mathcal{G})\simeq H^q(\mathrm{Hom}(\mathcal{L};\mathfrak{G}|_{\mathcal{U}})$.

Пусть $f:X\to S$ — произвольный морфизм комплексных суперпространств, $\mathcal{F}$ и $\mathcal{G}$ когерентные $\mathcal{O}_X$-модули. Пучки $\mathrm{Ext}^q(f;\mathcal{F},\mathfrak{G})$ на S можно вычислять при помощи симплициальной резольвенты $\mathcal{L}^\cdot\to\mathcal{F}|_{\mathcal{U}}$, для штейнова локально конечного покрытия $\mathcal{U}$ суперпространства X, так как для штейнового открытого подмножества $V\subset S$ когомологии комплекса $C^\cdot(V):=\mathrm{Hom}(\mathcal{L}^\cdot|f^{-1}(V)\cap\mathcal{U}, \mathcal{G}|f^{-1}(V)\cap\mathcal{U})$ изоморфны с $\mathrm{Ext}(f^{-1}(V;\mathcal{F},\mathfrak{G})$.

4.7.3. Пусть теперь $0\to I\to A'\to A\to 0$ — инфинитезимальное расширение локальных аналитических супералгебр, $A'=\mathcal{O}_{S'}$, $A=\mathcal{O}_S$, где $S\subset S'$ вложение ростков комплексных суперпространств. Пусть X комплексное суперпространство и $\mathcal{F}$ — когерентный $\mathcal{O}_{X\times S}$-модуль, плоский над S. Обозначим через F ограничение $\mathcal{F}$ на $X\times\{s_0\}$, а через $\mathcal{F}_0$ — на $X\times S_0$, где подпространство $S_0\subset S$ определяется идеалом $\mathfrak{n}_A\subset A$. Построим элемент $\omega[\mathcal{F}]\in\mathrm{Ext}_{A/\mathfrak{n}_A}(\pi;\mathcal{F}_0,\mathcal{F}_0\otimes_A I)_{\bar{0}}$ препятствующий продолжению деформации $\mathcal{F}$ пучка F до деформации с базой S'.

Выберем локально конечное штейново покрытие $\mathcal{U}$ суперпространства X. Рассмотрим первые несколько членов резольвенты $\mathcal{R}_{\mathfrak{n}_A}\to\mathcal{F}|_{\mathcal{U}_{\times S}}$ из 4.7.2 для $\alpha\supset\beta$

$$\begin{array}{ccccccc}
\mathscr{R}^2_\alpha & \xrightarrow{\Delta^2_\alpha} & \mathscr{R}^1_\alpha & \xrightarrow{\Delta^1_\alpha} & \mathscr{R}^0_\alpha & \xrightarrow{\Delta^0_\alpha} & \mathscr{F}_\alpha \\
\downarrow \rho^2_{\beta\alpha} & \Delta^2_\beta & \downarrow \rho^1_{\beta\alpha} & \Delta^1_\beta & \downarrow \rho^0_{\beta\alpha} & \Delta^0_\beta & \| \\
\mathscr{R}^2_\beta & \longrightarrow & \mathscr{R}^1_\beta & \longrightarrow & \mathscr{R}^0_\beta & \longrightarrow & \mathscr{F}_\beta
\end{array}$$

и ее ограничения на $X\times S_0$. Все $\mathscr{R}^q_\alpha$ свободные $\mathcal{O}_\alpha$-модули, поэтому гомоморфизмы Δ^q_α и $\rho^q_{\beta\alpha}$ можно задавать матрицами. При этом должны быть выполнены условия

$$\Delta^q_\alpha\cdot\Delta^{q+1}_\alpha=0,\quad \rho^q_{\beta\alpha}\Delta^{q+1}_\alpha-\Delta^{q+1}_\beta\rho^{q+1}_{\beta\alpha}=0;\quad \rho^q_{\gamma\beta}\rho^q_{\beta\alpha}-\rho^q_{\gamma\alpha}=0. \qquad (*)$$

Продолжим наборы Δ^q_α и $\rho^q_{\beta\alpha}$ произвольным образом до матриц $\overline{\Delta}^q_\alpha$ и $\overline{\rho}_{\beta\alpha}$ с коэффициентами из A'. Если уравнения (*) по-прежнему будут выполнены, то мы получим симплициальные системы пучков $\mathscr{R}'^1$ и $\mathscr{R}'^0$ и гомоморфизм $(\overline{\Delta}'_\alpha):\mathscr{R}'^1_\alpha\to\mathscr{R}'^0_\alpha$, (где $\mathscr{R}'^q_\alpha=\mathcal{O}^{m_q|n_q}_{X\times S'_\alpha}$, если $\mathscr{R}^q_\alpha=\mathcal{O}^{m_q|n_q}_{X\times S}$), для которого фактор $\mathscr{R}'^0/\operatorname{Im}\overline{\Delta}^1_\alpha$ — это система вида $\mathscr{F}'|_{\mathscr{U}\times S'}$, где $\mathscr{F}'$-когерентный S'-плоский пучок $\mathcal{O}_{X\times S'}$-модулей, такой, что $\mathscr{F}'|_{X\times S}\simeq\mathscr{F}$. В общем случае, подставляя $\overline{\Delta}^q_\alpha$ и $\overline{\rho}^q_{\beta\alpha}$ в (*), мы получим в правых частях не нули, а матрицы с коэффициентами из $\mathcal{O}_{X\times S_0}\otimes_{A_0}I$. Введем обозначения

$$\begin{aligned}&\overline{\Delta}^q_\alpha\cdot\overline{\Delta}^{q+1}_\alpha=P^q_\alpha;\quad \overline{\rho}^q_{\beta\alpha}\overline{\Delta}^{q+1}_\alpha-\overline{\Delta}^{q+1}_\beta\overline{\rho}^{q+1}_{\beta\alpha}=Q^q_{\beta\alpha},\ \alpha\supset\beta;\\ &\overline{\rho}^q_{\gamma\beta}\cdot\overline{\rho}^q_{\beta\alpha}-\overline{\rho}^q_{\gamma\alpha}=T^q_{\gamma\beta\alpha},\ \alpha\supset\beta\supset\gamma;\quad q+|\alpha|<4,\end{aligned} \qquad (**)$$

и определим с их помощью четные элементы $a_i\in\operatorname{Hom}(U_i;\ \mathscr{R}^2,\ \mathscr{F}\otimes_A I)$; $b_{ij}\in\operatorname{Hom}(U_{ij};\ \mathscr{R}^1,\ \mathscr{F}\otimes_A I)$; $c_{ijk}\in\operatorname{Hom}(U_{ijk};\ \mathscr{R}^0,\ \mathscr{F}\otimes_A I)$, положив $a_i=-\Delta^0_i\cdot P^1_i$; $b_{ij}=\Delta^0_j\cdot Q^0_{j,ij}-\Delta^0_i\cdot Q^0_{i,ij}$;

$$\begin{aligned}c_{ijk}=\Delta^0_i\left(T^0_{i,ij,ijk}-T^0_{i,ik,ijk}\right)+\Delta^0_j\left(T^0_{j,jk,ijk}-T^0_{j,ij,ijk}\right)+\\ +\Delta^0_k\left(T^0_{k,ik,ijk}-T^0_{k,jk,ijk}\right).\end{aligned} \qquad (***)$$

Рассмотрим четные элементы $a=(a_i)$, $b=(b_{ij})$, $c=(c_{ijk})$, A_0-модуля

$$\begin{aligned}C^2=\bigoplus_i\operatorname{Hom}(U_i;\ \mathscr{R}^2_i,\ \mathscr{F}_0\otimes_{A_0}I)\oplus\bigoplus_{ij}\operatorname{Hom}(U_{ij};\ \mathscr{R}^1_{ij},\ \mathscr{F}_0\otimes_{A_0}I)\oplus\\ \oplus\bigoplus_{ijk}\operatorname{Hom}(U_{ijk};\ \mathscr{R}^0_{ijk},\ \mathscr{F}_0\otimes_{A_0}I)\end{aligned}$$

(мы заменили $\mathscr{F}\otimes_A I$ на $\mathscr{F}_0\otimes_{A_0}I$ в силу того, что $\mathfrak{n}_A I=0$) и покажем, что элемент $\omega=a+b+c$ задает искомое препятствие к продолжению деформации $\mathscr{F}$.

4.7.4. Предложение.

(*i*) Элемент ω лежит в ядре дифференциала $d^2:C^2\to C^3$.

(*ii*) Класс $[\omega]\in\mathscr{H}^2(C^\cdot_{\bar 0})=\operatorname{Ext}^2_{\mathcal{O}_X\times S_0}(\pi;\ \mathscr{F}_0,\ \mathscr{F}_0\otimes_{A_0}I)_{\bar 0}$ не зависит от произвола в выборе продолжений $\overline{\Delta}^q_\alpha$ и $\overline{\rho}^q_{\beta\alpha}$.

(*iii*) Деформацию $\mathcal{F}$ пучка F над S можно продолжить до деформации $\mathcal{F}'$ над S' тогда и только тогда, когда $[\omega]=0$.

(*iv*) Если $[\omega]=0$, то множество продолжений $\mathcal{F}$ является однородным пространством группы $\mathcal{H}^1(C^{\cdot}_{\bar 0})=\mathrm{Ext}^1_{\mathcal{O}_{X\times S_0}}(\pi;\ \mathcal{F}_0,\ \mathcal{F}_0\otimes_{A_0}I)$. В случае, когда $A'=A[I]$ и $\mathfrak{n}_A=0$, эта группа действует точно.

Доказательство. Выпишем явно несколько первых членов комплекса $C^{\cdot}$, рассматривая его как двойной комплекс

$$\begin{tikzcd}[column sep=small]
C^0 = \arrow[d, "d^0"'] & \bigoplus\limits_i \mathcal{H}om(\mathcal{R}^0_i, \mathcal{F}_0\otimes_{A_0}I) \arrow[d, "\partial"] \arrow[dr, "\delta"] & & & \\
C^1 = \arrow[d, "d^1"'] & \bigoplus\limits_i \mathcal{H}om(\mathcal{R}^1_i, \mathcal{F}_0\otimes_{A_0}I) \arrow[d, "\partial"] \arrow[dr, "\delta"] & + \bigoplus\limits_{ij} \mathcal{H}om(\mathcal{R}^0_{ij}, \mathcal{F}_0\otimes_{A_0}I) \arrow[d, "\partial"] \arrow[dr, "\delta"] & & \\
C^2 = \arrow[d, "d^2"'] & \bigoplus\limits_i \mathcal{H}om(\mathcal{R}^2_i, \mathcal{F}_0\otimes_{A_0}I) \arrow[d, "\partial"] \arrow[dr, "\delta"] & + \bigoplus\limits_{ij} \mathcal{H}om(\mathcal{R}^1_{ij}, \mathcal{F}_0\otimes_{A_0}I) \arrow[d, "\partial"] \arrow[dr, "\delta"] & + \bigoplus\limits_{ijk} \mathcal{H}om(\mathcal{R}^0_{ijk}, \mathcal{F}_0\otimes_{A_0}I) \arrow[d, "\partial"] \arrow[dr, "\delta"] & \\
C^3 = & \bigoplus\limits_i \mathcal{H}om(\mathcal{R}^3_i, \mathcal{F}_0\otimes_{A_0}I) & + \bigoplus\limits_{ij} \mathcal{H}om(\mathcal{R}^2_{ij}, \mathcal{F}_0\otimes_{A_0}I) & + \bigoplus\limits_{ijk} \mathcal{H}om(\mathcal{R}^1_{ijk}, \mathcal{F}_0\otimes_{A_0}I) & + \bigoplus\limits_{ijkl} \mathcal{H}om(\mathcal{R}^0_{ijkl}, \mathcal{F}_0\otimes_{A_0}I)
\end{tikzcd}$$

с полным дифференциалом $d=\delta+(-1)^{q+1}\partial$, где дифференциал ∂ происходит из резольвенты $\mathcal{R}^{q+1}\xrightarrow{\Delta^{q+1}}\mathcal{R}^q\to\ldots\xrightarrow{\Delta^1}\mathcal{R}^0$, а δ — коцепной дифференциал Чеха:

$$(\delta h)_{i_0 i_1\ldots i_{q+1}}=\sum_{k=0}^{q+1}(-1)^k h_{i_0\ldots\hat{i}_k\ldots i_{q+1}}\rho^q_{i_0\ldots\hat{i}_k\ldots i_{q+1},\ i_0\ldots i_{q+1}}.$$

Вычислив значения дифференциалов ∂ и δ на элементах a, b, c, пользуясь (**), (***) тем, что $\bar\Delta\cdot\bar\Delta$, $\bar\Delta\rho-\bar\rho\cdot\bar\Delta$ и $\bar\rho_{\gamma\beta}\cdot\bar\rho_{\beta\alpha}-\bar\rho_{\gamma\alpha}\equiv 0 \bmod I$ и что $I^2=0$, получим

$$(\partial a)_i=-\Delta^0_i(\bar\Delta^1_i\cdot\bar\Delta^2_i)\,\Delta^3_i=0;$$

$$(\delta a)_{ij}=-\Delta^0_i\bar\Delta^1_i\bar\Delta^2_i\rho^2_{i,ij}+\Delta^0_j\bar\Delta^1_j\bar\Delta^2_j\rho^2_{j,ij};\quad (\partial b)_{ij}=-(\delta a)_{ij};$$

$$(\delta b)_{ijk}=\left[\left(\Delta^0_k\bar\rho^0_{k,jk}-\Delta^0_j\bar\rho^0_{j,jk}\right)\rho^0_{jk,ijk}+\left(\Delta^0_i\bar\rho^0_{i,ik}-\Delta^0_k\bar\rho^0_{k,ik}\right)\rho^0_{ik,ijk}+\right.$$
$$\left.+\left(\Delta^0_j\bar\rho^0_{j,ij}-\Delta^0_i\bar\rho^0_{i,ij}\right)\rho^0_{ij,ijk}\right]\bar\Delta^1_{ijk};$$

$$(\partial c)_{ijk}=(\delta b)_{ijk};\quad (\delta c)_{ijkl}=0.$$

Это дает (*i*).

(*ii*) Пусть теперь $\tilde\Delta^q_\alpha$, $\tilde\rho^q_{\alpha\beta}$ — другой набор матриц над A', продолжающих Δ^q_α и $\rho^q_{\alpha\beta}$, и $\tilde\omega=\tilde a+\tilde b+\tilde c$ — соответствующий элемент из $\mathrm{Ker}\, d^2$. Положим

$$\varphi_i=-\Delta^0_i\left(\bar\Delta^1_i-\tilde\Delta^1_i\right)\in\mathrm{Hom}\left(U_i;\ \mathcal{R}^1_i,\ \mathcal{F}_0\otimes_{A_0}I\right);$$

$$\psi_{ij}=-\Delta^0_j\left(\bar\rho^0_{j,ij}-\tilde\rho^0_{j,ij}\right)+\Delta^0_i\left(\tilde\rho^0_{i,ij}-\bar\rho^0_{i,ij}\right)\in\mathrm{Hom}\left(U_{ij};\ \mathcal{R}^0_{ij},\ \mathcal{F}_0\otimes_{A_0}I\right).$$

Тогда, пользуясь тем же, что и выше, получим, что

$$(a-\tilde{a})_i=\partial\varphi_i;\quad (b-\tilde{b})_{ij}=(-\partial\psi+\delta\varphi)_{ij};\quad (c-\tilde{c})_{ijk}=(\delta\psi)_{ijk}.$$

Таким образом, $d(\varphi+\psi)=(a+b+c)-(\tilde{a}+\tilde{b}+\tilde{c})$, то есть класс $[\omega]\in\mathscr{H}^2(C^{\cdot}_{\bar{0}})$ не зависит от произвола в выборе гомоморфизмов $\bar{\Delta}^q_\alpha$ и $\bar{\rho}^q_{\alpha\beta}$ и функториален по отношению к расширению $A'\to A$.

(*iii*) Пусть теперь деформация $\mathscr{F}$ продолжается до деформации пучка F над S'. Покажем, что $[\omega]=0$. Пусть $\mathscr{F}'$—плоский A'-модуль такой, что $\mathscr{F}'\otimes_{A'}A\simeq\mathscr{F}$. Выберем, пользуясь плоскостью $\mathscr{F}'$ и штейновостью покрытия $\mathscr{U}$, для каждого U_α с $|\alpha|\leqslant 2$ резольвенту $\ldots\to\mathscr{R}'^{q+1}_\alpha\xrightarrow{\Delta'^{q+1}_\alpha}\mathscr{R}'^q_\alpha\xrightarrow{\Delta'^q_\alpha}\ldots\mathscr{R}'^0_\alpha\xrightarrow{\Delta'^0_\alpha}\mathscr{F}'_\alpha$ из свободных $\mathcal{O}_\alpha\otimes A'$-модулей, где $\mathscr{R}'^q_\alpha\otimes A$, $A=\mathscr{R}^q_\alpha$, и гомоморфизмы $\rho'^q_{\beta\alpha}:\mathscr{R}'^q_\alpha\to\mathscr{R}'^q_\beta$, $\beta\subset\alpha$, $|\alpha|+q<4$ таковы, что диаграмма

$$\begin{tikzcd}
{} \arrow[r] & \mathscr{R}'^q_\alpha \arrow[r, "\Delta'^q_\alpha"] \arrow[d, "\rho'^q_{\beta\alpha}"] & \ldots \arrow[r, "\Delta'^1_\alpha"] & \mathscr{R}'^0_\alpha \arrow[r, "\Delta'^0_\alpha"] \arrow[d, "\rho'^0_{\beta\alpha}"] & \mathscr{F}'_\alpha \arrow[d, equal] \\
{} \arrow[r] & \mathscr{R}'^q_\beta|_{U_\alpha} \arrow[r, "\Delta'^q_\beta"] & \ldots \arrow[r, "\Delta'^1_\beta"] & \mathscr{R}'^0_\beta|_{U_\alpha} \arrow[r, "\Delta'^0_\beta"] & \mathscr{F}'_\beta|_{U_\alpha}
\end{tikzcd}$$

коммутативна и Δ'^q_α и $\rho'^q_{\beta\alpha}$ индуцируют гомоморфизмы Δ^q_α и $\rho^{q\alpha}_\beta$ соответственно.

По (*ii*) класс когомологий $[\omega]\in\mathscr{H}^2(C^{\cdot})$ не зависит от выбора продолжающих гомоморфизмов, поэтому можно в определяющих ω формулах (**) и (***) заменить $\bar{\Delta}$ и $\bar{\rho}$ на Δ' и ρ'. Но тогда $a=0$ и $b=0$, так как $P^q_\alpha=0$ и $Q^q_{\beta\alpha}=0$, в силу выбора Δ'^q_α и $\rho'^q_{\alpha\beta}$. Гомоморфизм $T^0_{\gamma\beta\alpha}=\rho'^0_{\gamma\beta}\rho'^0_{\beta\alpha}-\rho'^0_{\gamma\alpha}$ индуцирует нулевые гомоморфизмы $\mathscr{F}'_\alpha\to\mathscr{F}'_\gamma|_{U_\alpha}$ и $\mathscr{R}^0_\alpha\to\mathscr{R}^0_\gamma|_{U_\alpha}$, поэтому он представляется в виде $\Delta^1_\gamma f_{\gamma\beta\alpha}$, где $f\in\mathrm{Hom}(\mathscr{R}^0_\alpha,\mathscr{R}^1_\gamma|_{U_\alpha}\otimes_A I)$. Но тогда $\Delta^0_\gamma T^0_{\gamma\beta\alpha}=\Delta^0_\gamma\Delta^1_\gamma f_{\gamma\beta\alpha}=0$ и, как следует из (***), $c=0$.

Обратно, пусть теперь $[\omega]=0$. Построим деформацию $\mathscr{F}'$ над S', продолжающую $\mathscr{F}$, склеивая пучок $\mathscr{F}'$ из пучков на $U_\alpha\times S'$, определяемых локальными резольвентами. Для того, чтобы осуществить склейку, мы определим гомоморфизмы

$$\lambda^q_\alpha:\mathscr{R}'^q_\alpha\to\mathscr{R}'^{q-1}_\alpha\otimes_{A'}I \text{ и } r^q_{\beta\alpha}:\mathscr{R}'^q_\alpha\to\mathscr{R}'^q_\beta\otimes_{A'}I$$

для $q=0, 1, 2$, $|\alpha|\leqslant 3$, $|\beta|\leqslant 2$ так, чтобы диаграмма

$$\begin{tikzcd}
\mathscr{R}'^2_\alpha \arrow[r, "\tilde{\Delta}^2_\alpha"] \arrow[d, "\tilde{\rho}'^2_{\beta\alpha}"'] & \mathscr{R}'^1_\alpha \arrow[r, "\tilde{\Delta}^1_\alpha"] \arrow[d, "\tilde{\rho}'^1_{\beta\alpha}"'] & \mathscr{R}'^0_\alpha \arrow[d, "\tilde{\rho}'^0_{\beta\alpha}"'] \\
\mathscr{R}'^2_\beta \arrow[r, "\tilde{\Delta}^2_\beta"] & \mathscr{R}'^1_\beta \arrow[r, "\tilde{\Delta}^1_\beta"] & \mathscr{R}'^0_\beta
\end{tikzcd}$$

с подправленными гомоморфизмами $\tilde{\Delta}^q_\alpha = \bar{\Delta}^q_\alpha + \lambda^q_\alpha$ и $\tilde{\rho}^q_{\beta\alpha} = \bar{\rho}^q_{\beta\alpha} + r^q_{\beta\alpha}$ при любых $\alpha \supset \beta$, $|\alpha| \leqslant 3$, $|\beta| \leqslant 2$, была бы коммутативной и имела точные строки. Кроме того, мы построим гомоморфизмы $f_{\gamma\beta\alpha}$: $\mathcal{R}^0_\alpha \to \mathcal{R}^1_\gamma \otimes_{A'} I$, $\gamma \subset \beta \subset \alpha$, $|\alpha| = 3$ такие, что $\tilde{\rho}^0_{\gamma\beta} \cdot \tilde{\rho}^0_{\beta\alpha} - \tilde{\rho}^0_{\gamma\alpha} = \Delta^1_\gamma f_{\gamma\beta\alpha}$.

Иными словами, мы хотим, пользуясь когомологичностью элемента ω нулю, так скорректировать гомоморфизмы

$$\bar{\Delta}^1_i,\ \bar{\Delta}^2_i,\ \bar{\Delta}^1_{ij},\ \bar{\Delta}^2_{ij},\ \bar{\Delta}^1_{ijk},\ \bar{\Delta}^2_{ijk},\ \bar{\rho}^0_{i,ij},\ \bar{\rho}^1_{i,ij},\ \bar{\rho}^0_{i,ijk},\ \bar{\rho}^0_{ij,ijk},\ \bar{\rho}^1_{i,ijk},\ \bar{\rho}^1_{ij,ijk},$$

чтобы они по-прежнему продолжали соответствующие дифференциалы и связывающие гомоморфизмы в резольвенте симплициальных систем $\mathcal{R}^2 \to \mathcal{R}^1 \to \mathcal{R}^0 \to \mathcal{F}|_{\mathcal{U}}$ и для всех i, j, k были выполнены соотношения

$$(a)\ P^1_i = \bar{\Delta}^1_i \bar{\Delta}^2_i = 0;$$

$$(b)\ P^1_{ij} = \bar{\Delta}^1_{ij} \bar{\Delta}^2_{ij} = 0;$$

$$(c)\ P^1_{ijk} = \bar{\Delta}^1_{ijk} \bar{\Delta}^2_{ijk} = 0;$$

$$(d)\ Q^0_{i,ij} = \bar{\rho}^0_{i,ij} \bar{\Delta}^1_{ij} - \bar{\Delta}^1_i \bar{\rho}^1_{i,ij} = 0;$$

$$(e)\ Q^0_{i,ijk} = \bar{\rho}^0_{i,ijk} \bar{\Delta}^1_{ijk} - \bar{\Delta}^1_i \bar{\rho}^1_{i,ijk} = 0;$$

$$(f)\ Q^0_{ij,ijk} = \bar{\rho}^0_{ij,ijk} \bar{\Delta}^1_{ijk} - \bar{\Delta}^1_{ij} \bar{\rho}^1_{ij,ijk} = 0;$$

$$(g)\ T^0_{i,ij,ijk} = \bar{\rho}^0_{i,ij} \bar{\rho}^0_{ij,ijk} - \bar{\rho}^0_{i,ijk} = \Delta^1_i f_{i,ij,ijk}.$$

Мы будем изменять $\bar{\Delta}^q_\alpha$ и $\bar{\rho}^q_{\beta\alpha}$, добиваясь последовательно выполнения равенств (*a*), (*d*), (*g*), (*b*), (*e*), (*f*), (*c*) так, чтобы при очередном измерении не портить уже достигнутого.

Пусть $\omega = d(\varphi + \psi)$, где $\varphi, \psi \in C^1$, $\varphi_i \in \mathrm{Hom}(U_i, \mathcal{R}^1_i, \mathcal{F}_0 \otimes_{A_0} I)$, $\psi_{ij} \in \mathrm{Hom}(U_{ij}, \mathcal{R}^0_{ij}, \mathcal{F}_0 \otimes_{A_0} I)$. Последовательность

$$\mathcal{R}^1_\alpha \otimes_{A_0} I \xrightarrow{\Delta^1_\alpha} \mathcal{R}^0_\alpha \otimes_{A_0} I \xrightarrow{\Delta^0_\alpha} \mathcal{F}_0 \otimes_{A_0} I \to 0 \qquad (\#)$$

точна при всех α, поэтому существуют гомоморфизмы $\lambda^1_i : \mathcal{R}^1_i \to \mathcal{R}^0_i \otimes_{A_0} I$ и $r^0_{i,ij} : \mathcal{R}_{ij} \to \mathcal{R}^0_i \otimes_{A_0} I$ такие, что $\varphi_i = \Delta^0_i \lambda^1_i$ и $\psi_{ij} = \Delta^0_j r^0_{j,ij} - \Delta^0_i r^0_{i,ij}$ (в последнем случае можно, например, положить $r^0_{i,ij} = 0$ и найти $r^0_{j,ij}$, пользуясь сюръективностью Δ^0_i).

Подставляя φ_i и ψ_{ij} в равенства

$$a_i = \partial\varphi_i; \quad b_{ij} = (\delta\varphi)_{ij} - \partial\psi_{ij}; \quad c_{ijk} = (\delta\psi)_{ijk},$$

получим по определению a_i, b_{ij}, c_{ijk} (и так как $I^2 = 0$)

$$\Delta^0_i (\bar{\Delta}^1_i + \lambda^1_i) \bar{\Delta}^2_i = 0;$$

$$\Delta^0_j [(\bar{\rho}^0_{j,ij} + r^0_{j,ij}) \bar{\Delta}^1_{ij} - (\bar{\Delta}^1_j + \lambda^1_j) \bar{\rho}^1_{j,ij}] -$$

$$-\Delta_i^0[(\overline{\rho}{}^0_{i,ij}+r^0_{i,ij})\overline{\Delta}{}^1_{ij}-(\overline{\Delta}{}^1_i+\lambda^1_i)\overline{\rho}{}^1_{i,ij}]=0$$

и

$$\Delta_i^0[(\overline{\rho}{}^0_{i,ij}+r^0_{i,ij})\overline{\rho}{}^0_{ij,ijk}-(\overline{\rho}{}^0_{i,ik}+r^0_{i,ik})\overline{\rho}{}^0_{ik,ijk}]-$$
$$-\Delta_j^0[(\overline{\rho}{}^0_{j,ij}+r^0_{j,ij})\overline{\rho}{}^0_{ij,ijk}-(\overline{\rho}{}^0_{j,jk}+r^0_{j,jk})\overline{\rho}{}^0_{jk,ijk}]+$$
$$+\Delta_k^0[(\overline{\rho}{}^0_{k,ik}+r^0_{k,ik})\overline{\rho}{}^0_{ik,ijk}-(\overline{\rho}{}^0_{k,jk}+r^0_{k,jk})\overline{\rho}{}^0_{jk,ijk}]=0.$$

Это означает, что, заменив теперь $\overline{\Delta}{}^1_i$ и $\overline{\rho}{}^0_{ij}$ соответственно на $\overline{\Delta}{}^1_i+\lambda^1_i$ и $\overline{\rho}{}^0_{ij}+r^0_{ij}$, мы добьемся выполнения равенств

$$\Delta_i^0 p_i^1=0;\quad \Delta_j^0 Q^0_{j,ij}-\Delta_i^0 Q^0_{i,ij}=0;$$
$$\Delta_i^0(T^0_{i,ij,ijk}-T^0_{i,ik,ijk})-\Delta_j^0(T^0_{j,ij,ijk}-T^0_{j,jk,ijk})+$$
$$+\Delta_k^0(T^0_{k,ik,ijk}-T^0_{k,jk,ijk})=0.$$

Второе и третье из этих равенств позволяют выбрать такие гомоморфизмы $\lambda^1_{ij}:\mathscr{R}^1_{ij}\to\mathscr{R}^0_{ij}\otimes_{A_0}I$ и $r^0_{i,ijk}:\mathscr{R}^0_{ijk}\to\mathscr{R}^0_i\otimes_{A_0}I$, что

$$\Delta_i^0 Q^0_{i,ij}=-\Delta^0_{ij}\lambda^1_{ij}\ \text{и}\ \Delta_j^0 T^0_{j,ij,ijk}-\Delta_i^0 T^0_{i,ij,ijk}=\Delta_i^0 r^0_{i,ijk}=\Delta_j^0 r^0_{j,ijk}$$

для всех i, j, k. Заменив $\overline{\Delta}{}^1_{ij}$ на $\overline{\Delta}{}^1_{ij}+\lambda^1_{ij}$, а $\overline{\rho}{}^0_{i,ijk}$ на $\overline{\rho}{}^0_{i,ijk}+r^0_{i,ijk}$, мы получим $\Delta_i^0 Q^0_{i,ij}=0$ и $\Delta_j^0 T^0_{j,ij,ijk}-\Delta_i^0 T^0_{i,ij,ijk}=0$. Отсюда, из равенства $\Delta_i^0 p_i^1=0$ и из точности последовательности (#) следует, что существуют гомоморфизмы $\lambda^2_i:\mathscr{R}^2_i\to\mathscr{R}^1_i\otimes_{A_0}I$, $r^1_{i,ij}:\mathscr{R}^1_{ij}\to\mathscr{R}^1_i\otimes_{A_0}I$ и $r^0_{ij,ijk}:\mathscr{R}^0_{ijk}\to\mathscr{R}^0_{ij}\otimes_{A_0}I$ такие, что

$$P^1_i=-\Delta^1_i\lambda^2_i;\quad Q^0_{i,ij}=\Delta^1_i r^1_{i,ij};\quad \Delta^0_i T^0_{i,ij,ijk}=-\Delta^0_j T^0_{j,ij,ijk}.$$

В таком случае $0=P^1_i+\Delta^1_i\lambda^2_i=\overline{\Delta}{}^1_i(\overline{\Delta}{}^2_i+\lambda^2_i)$, $0=Q^0_{i,ij}-\Delta^1_i r^1_{i,ij}=\overline{\rho}{}^0_{i,ij}\overline{\Delta}{}^1_{ij}-\overline{\Delta}{}^1_i(\overline{\rho}{}^1_{i,ij}+r^1_{i,ij})$ и $0=\Delta^0_i(\overline{\rho}{}^0_{i,ij}\overline{\rho}{}^0_{ij,ijk}-\overline{\rho}{}^0_{i,ijk}+\overline{\rho}{}^0_{i,ij}r^0_{ij,ijk})=\Delta^0_i(\overline{\rho}{}^0_{i,ij}(\overline{\rho}{}^0_{ij,ijk}+r^0_{ij,ijk})-\overline{\rho}{}^0_{i,ijk})$. Поэтому после замены $\overline{\Delta}{}^2_i$ на $\overline{\Delta}{}^2_i+\lambda^2_i$, $\overline{\rho}{}^1_{i,ij}$ на $\overline{\rho}{}^1_{i,ij}+r^1_{i,ij}$ и $\overline{\rho}{}^0_{ij,ijk}$ на $\overline{\rho}{}^0_{ij,ijk}+r^0_{ij,ijk}$, мы придем к $P^1_i=0$, $Q^0_{i,ij}=0$ (то есть будут выполнены условия (*a*) и (*d*), и $\Delta^0_i T^0_{i,ij,ijk}=0$, что позволяет с помощью последовательности (#) добиться выполнения (g), то есть найти $f_{i,ij,ijk}:\mathscr{R}^0_{ijk}\to\mathscr{R}^0_i\otimes_{A_0}I$, для которого $T^0_{i,ij,ijk}=\Delta^1_i\cdot f_{i,ij,ijk}$.

Теперь уничтожим P^1_{ij}. Из равенств (*a*), (*d*) и $I^2=0$ следует, что $\Delta^0_{ij}P^1_{ij}=0$, поэтому (#) дает гомоморфизм $\lambda^2_{ij}:\mathscr{R}^2_{ij}\to\mathscr{R}^1_{ij}\otimes_{A_0}I$ такой, что $P^1_{ij}=-\Delta^1_{ij}\cdot\lambda^2_{ij}$. Равенство $0=P^1_{ij}+\Delta^1_{ij}\cdot\lambda^2_{ij}=\overline{\Delta}{}^1_{ij}(\overline{\Delta}{}^2_{ij}+\lambda^2_{ij})$ показывает, что заменив $\overline{\Delta}{}^2_{ij}$ на $\overline{\Delta}{}^2_{ij}+\lambda^2_{ij}$, мы добьемся выполнения условия (*b*).

Для того, чтобы получить (*e*) и (*f*), проверим, что $\Delta^0_i Q^0_{i,ijk}=\Delta^0_{ij}Q^0_{ij,ijk}$. Действительно, из (*d*), (g), определения $Q^q_{\alpha\beta}$, $T^q_{\alpha\beta}$

и $I^2=0$ следует, что $\Delta^0_{ij}Q^0_{ij,ijk}=\Delta^0_iQ^0_{i,ijk}$. Пропустим гомоморфизм $\Delta^0_{ij}Q^0_{ij,ijk}:\mathcal{R}^1_{ijk}\to\mathcal{F}_{ij}\otimes_{A_0}I|_{U_{ijk}}=\mathcal{F}_{ijk}\otimes_{A_0}I$ через эпиморфизм $\mathcal{R}^0_{ijk}\otimes_{A_0}I\to\mathcal{F}_{ijk}\otimes_A I$ и получим гомоморфизм λ^1_{ijk} такой, что

$$\Delta^0_iQ^0_{i,ijk}=\Delta^0_{ij}Q^0_{ij,ijk}=-\Delta^0_{ijk}\cdot\lambda^1_{ijk}.$$

Отсюда

$$0=\Delta^0_iQ^0_{i,ijk}+\Delta^0_{ijk}\lambda_{ijk}=\Delta^0_i\left(Q^0_{i,ijk}+\rho^0_{i,ijk}\lambda^1_{ijk}\right)=$$
$$=\Delta^0_i\left[\overline{\rho}^0_{i,ijk}\left(\overline{\Delta}^1_{ijk}+\lambda^1_{ijk}\right)-\overline{\Delta}^1_i\overline{\rho}^1_{i,ijk}\right]$$

и

$$0=\Delta^0_{ij}Q^0_{ij,ijk}+\Delta^0_{ijk}\lambda^1_{ijk}=\Delta^0_{ij}\left(Q^0_{ij,ijk}+\rho^0_{ij,ijk}\lambda^1_{ijk}\right)=$$
$$=\Delta^0_{ij}\left[\overline{\rho}^0_{ij,ijk}\left(\overline{\Delta}^1_{ijk}+\lambda^1_{ijk}\right)-\overline{\Delta}^1_{ij}\overline{\rho}^1_{ij,ijk}\right],$$

поэтому после замены $\overline{\Delta}^1_{ijk}$ на $\overline{\Delta}^1_{ijk}+\lambda^1_{ijk}$ получаем $\Delta^0_iQ^0_{i,ijk}=0$ и $\Delta^0_{ij}Q^0_{ij,ijk}=0$. Но тогда последовательность (#) дает гомоморфизмы $r^0_{i,ijk}:\mathcal{R}^1_{ijk}\to\mathcal{R}^0_i\otimes_{A_0}I$ и $r_{ij,ijk}:\mathcal{R}^1_{ij}\to\mathcal{R}^0_{ijk}\otimes_{A_0}I$, для которых $Q^0_{i,ijk}=\Delta^1_ir^1_{i,ijk}$ и $Q^0_{ij,ijk}=\Delta^1_{ij}r^1_{ij,ijk}$. Отсюда

$$0=Q^0_{i,ijk}-\Delta^1_ir^1_{i,ijk}=\overline{\rho}^0_{i,ijk}\overline{\Delta}^1_{ijk}-\overline{\Delta}^1_i\left(\overline{\rho}^1_{i,ijk}+r^1_{i,ijk}\right)$$

и

$$0=Q^0_{ij,ijk}-\Delta^1_{ij}r^1_{ij,ijk}=\overline{\rho}^0_{ij,ijk}\overline{\Delta}^1_{ijk}-\overline{\Delta}^1_{ij}\left(\overline{\rho}^1_{ij,ijk}+r^1_{ij,ijk}\right)$$

и, заменяя $\overline{\rho}^1_{i,ijk}$ на $\overline{\rho}^1_{i,ijk}+r^1_{i,ijk}$, а $\overline{\rho}^1_{ij,ijk}$ на $\overline{\rho}^1_{ij,ijk}+r^1_{ij,ijk}$, мы добьемся выполнения (*e*) и (*f*).

Наконец, применяя (*a*) и (*e*), получаем

$$\Delta^0_{ijk}P^1_{ijk}=\Delta^0_{ijk}\overline{\Delta}^1_{ijk}\overline{\Delta}^2_{ijk}=\Delta^0_i\overline{\rho}^0_{i,ijk}\overline{\Delta}^1_{ijk}\overline{\Delta}^2_{ijk}=$$
$$=\Delta^0_i\overline{\Delta}^1_i\overline{\rho}^1_{i,ijk}\overline{\Delta}^2_{ijk}=\Delta^0_i\overline{\Delta}^1_i\overline{\Delta}^2_i\overline{\rho}^2_{i,ijk}+\left(\Delta^0_i\overline{\Delta}^1_i\right)Q^1_{i,ijk}=0,$$

откуда (и из (#)) находим $\lambda^2_{ijk}:\mathcal{R}^2_{ijk}\to\mathcal{R}^1_{ijk}\otimes_{A_0}I$ такой, что $P^1_{ijk}=-\Delta^1_{ijk}\lambda^2_{ijk}$. Это означает, что $\overline{\Delta}^1_{ijk}\left(\overline{\Delta}^2_{ijk}+\lambda^2_{ijk}\right)=0$, то есть после замены $\overline{\Delta}^2_{ijk}$ на $\overline{\Delta}^2_{ijk}+\lambda^2_{ijk}$ (*c*) тоже будет выполнено.

Итак, пусть у нас есть набор гомоморфизмов $\overline{\Delta}^q_\alpha$, $\overline{\rho}^q_{\alpha\beta}$, для которого условия (*a*) — (*g*) выполнены. Покажем, как построить продолжение пучка $\mathcal{F}$ на $X\times S$ до пучка $\mathcal{F}'$ на $X\times S'$. В силу (*a*), (*b*), (*c*) пучки $\mathcal{F}'_\alpha$ на $U_\alpha\times S'$, определенные равенствами $\mathcal{F}'_\alpha=\mathcal{R}'^0_\alpha/\operatorname{Im}\overline{\Delta}^1_\alpha$, являются когерентными A'-плоскими $\mathcal{O}_\alpha\otimes A'$-модулями, продолжающими деформации $\mathcal{F}_\alpha$ на $U_\alpha\times S$. Условия (*d*), (*e*), (*f*) показывают, что связывающие гомоморфизмы $\rho^0_{\beta\alpha}$ опускаются до гомоморфизмов $g_{\alpha\beta}:\mathcal{F}'_\alpha\to\mathcal{F}'_\beta|_{U_\alpha\times S'}$, индуцирующих тождественное отображение на $\mathcal{F}_\alpha=\mathcal{F}_\beta|_{U_\alpha\times S}$ и потому являющихся изоморфизмами. Наконец, условие (*g*) дает $g_{\gamma\beta}g_{\beta\alpha}=g_{\gamma\alpha}$. Определив теперь изоморфизмы $\sigma_{ij}:\mathcal{F}'_j|_{U_{ij}}\to\mathcal{F}'_i|_{U_{ij}}$ как $\sigma_{ij}=$

$=g_{i,ij}\cdot g_{j,ij}^{-1}$, получим $\sigma_{ij}\cdot\sigma_{jk}=\sigma_{ik}$. Поэтому после склеивания пучков $\mathcal{F}_i$ на U_i с помощью отображений σ_{ij} мы получим когерентный, плоский над S' пучок $\mathcal{F}'$ на $X\times S'$, который является продолжением деформации $\mathcal{F}$.

(iv) Предположим теперь, что препятствие $[\omega]$ к продолжению деформации $\mathcal{F}$ с S на S' равно нулю, и будем сравнивать различные продолжения между собой.

Пусть $\mathcal{F}'$ и $\mathcal{F}''$ — два продолжения деформации $\mathcal{F}$ когерентного $\mathcal{O}_X$-модуля F до деформации с базой S'. Как и при доказательстве первой части (iii) выберем семейства гомоморфизмов $\bar{\Delta}^q_\alpha:\mathcal{R}'^q_\alpha\to\mathcal{R}'^{q-1}_\alpha$; $\bar{\rho}^q_{\beta\alpha}:\mathcal{R}'^q_\alpha\to\mathcal{R}'^q_\beta$, продолжающих Δ^q_α и $\rho^q_{\beta\alpha}$, $|\alpha|+q<4$ такие, что диаграмма

$$\begin{tikzcd}
\mathcal{R}'^2_\alpha \arrow[r, "\bar{\Delta}^2_\alpha"] \arrow[d, "\bar{\rho}^2_{\beta\alpha}"'] & \mathcal{R}'^1_\alpha \arrow[r, "\bar{\Delta}^1_\alpha"] \arrow[d, "\bar{\rho}^1_{\beta\alpha}"'] & \mathcal{R}'^0_\alpha \arrow[r, "\bar{\Delta}^0_\alpha"] \arrow[d, "\bar{\rho}^0_{\beta\alpha}"'] & \mathcal{F}'_\alpha \arrow[d, equal] \\
\mathcal{R}'^2_\beta|U_\alpha \arrow[r, "\bar{\Delta}^2_\beta"] & \mathcal{R}'^1_\beta|U_\alpha \arrow[r, "\bar{\Delta}^1_\beta"] & \mathcal{R}'^0_\beta|U_\alpha \arrow[r, "\bar{\Delta}^0_\beta"] & \mathcal{F}'_\beta|U_\alpha
\end{tikzcd}$$

коммутативна и имеет точные строки.

Пусть $\hat{\Delta}^q_\alpha$ и $\hat{\rho}^q_{\beta\alpha}$ — аналогичные семейства гомоморфизмов для пучка $\mathcal{F}''$. Гомоморфизмы $\lambda^q_\alpha=\hat{\Delta}^q_\alpha-\bar{\Delta}^q_\alpha$ и $r^q_{\beta\alpha}=\hat{\rho}^q_{\beta\alpha}-\bar{\rho}^q_{\beta\alpha}$ равны нулю $\operatorname{mod} I$, поэтому мы получаем гомоморфизмы

$$\lambda^q_\alpha:\mathcal{R}^q_\alpha\to\mathcal{R}^{q-1}_\alpha\otimes_{A_0}I,\ q=1,2 \text{ и } r^q_{\beta\alpha}:\mathcal{R}^q_\alpha\to\mathcal{R}^q_\beta\otimes_{A_0}I,\ q=0,1,2.$$

Положим $\varphi_i=\Delta^0_i\lambda^1_i\in\operatorname{Hom}(U_i;\ \mathcal{R}^1_i,\ \mathcal{F}_i\otimes_{A_0}I)$ и $\psi_{ij}=\Delta^0_j r^0_{j,ij}-\Delta^0_i r^0_{i,ij}\in\operatorname{Hom}(U_{ij};\ \mathcal{R}^0_{ij},\ \mathcal{F}_{ij}\otimes_{A_0}I)$. Из свойств гомоморфизмов Δ, ρ и равенства $I^2=0$ следует, что $\varphi_i=-\hat{\Delta}^0_i\bar{\Delta}^1_i$; $\psi_{ij}=\hat{\Delta}^0_i\bar{\rho}^0_{i,ij}-\hat{\Delta}^0_j\bar{\rho}^0_{j,ij}$, откуда

$$(\partial\varphi)_i=-\hat{\Delta}^0_i\bar{\Delta}^1_i\Delta^2_i=-\hat{\Delta}^0_i\bar{\Delta}^1_i\bar{\Delta}^2_i=0;$$

$$(\delta\varphi)_{ij}=\hat{\Delta}^0_i\bar{\Delta}^1_i\rho^1_{i,ij}-\hat{\Delta}^0_j\bar{\Delta}^1_j\rho^1_{j,ij}=\hat{\Delta}^0_i\bar{\Delta}^1_i\bar{\rho}^1_{i,ij}-\hat{\Delta}^0_j\bar{\Delta}^1_j\bar{\rho}^1_{j,ij}=$$
$$=\left(\hat{\Delta}^0_i\bar{\rho}^0_{i,ij}-\hat{\Delta}^0_j\bar{\rho}^0_{j,ij}\right)\bar{\Delta}^1_{ij}=\left(\hat{\Delta}^0_i\bar{\rho}^0_{i,ij}-\hat{\Delta}^0_j\bar{\rho}^0_{j,ij}\right)\Delta^1_{ij}=(\partial\psi)_{ij};$$

$$(\delta\psi)_{ijk}=\left(\hat{\Delta}^0_i\bar{\rho}^0_{i,ij}-\hat{\Delta}^0_j\bar{\rho}^0_{j,ij}\right)\bar{\rho}^0_{ij,ijk}-\left(\hat{\Delta}^0_i\bar{\rho}^0_{i,ik}-\hat{\Delta}^0_k\bar{\rho}^0_{k,ik}\right)\bar{\rho}^0_{ik,ijk}+$$
$$+\left(\hat{\Delta}^0_j\bar{\rho}^0_{j,jk}-\hat{\Delta}^0_k\bar{\rho}^0_{k,jk}\right)\bar{\rho}^0_{jk,ijk}=\hat{\Delta}^0_i\left(\bar{\rho}^0_{i,ij}\bar{\rho}^0_{ij,ijk}-\bar{\rho}^0_{i,ik}\bar{\rho}^0_{ik,ijk}\right)-$$
$$-\hat{\Delta}^0_j\left(\bar{\rho}^0_{j,ij}\bar{\rho}^0_{ij,ijk}-\bar{\rho}^0_{j,jk}\bar{\rho}^0_{jk,ijk}\right)+\hat{\Delta}^0_k\left(\bar{\rho}^0_{k,ik}\bar{\rho}^0_{ik,ijk}-\bar{\rho}^0_{k,jk}\bar{\rho}^0_{jk,ijk}\right)=$$
$$=\hat{\Delta}^0_i\bar{\Delta}^1_i\left(\bar{f}_{i,ij,ijk}-\bar{f}_{i,ik,ijk}\right)-\hat{\Delta}^0_j\bar{\Delta}^1_j\left(\bar{f}_{j,ij,ijk}-\bar{f}_{j,jk,ijk}\right)+$$
$$+\hat{\Delta}^0_k\bar{\Delta}^1_k\left(\bar{f}_{k,ik,ijk}-\bar{f}_{k,jk,ijk}\right)=0,$$

то есть $\varphi+\psi$ — коцикл в C^1.

Если деформации $\mathcal{F}'$ и $\mathcal{F}''$ — эквивалентные продолжения деформации $\mathcal{F}$, то существуют A' — изоморфизмы $s_\alpha:\mathcal{F}'_\alpha\xrightarrow{\sim}\mathcal{F}''_\alpha$, индуцирующие тождественный автоморфизм на $\mathcal{F}_\alpha$. Изоморфизмы S_α включаются в последовательность изоморфизмов $s^q_\alpha:\mathcal{R}'^q_\alpha \xrightarrow{\sim} \mathcal{R}'^q_\alpha$, для которых диаграммы

$$\begin{array}{ccc}
\mathcal{R}'^q_\alpha \xrightarrow{\overline{\Delta}^q_\alpha} \mathcal{R}'^{q-1}_\alpha & & \mathcal{R}'^q_\alpha \xrightarrow{\overline{\rho}^q_{\beta\alpha}} \mathcal{R}'^q \\
{\scriptstyle s^q_\alpha}\downarrow \qquad \downarrow{\scriptstyle s^{q-1}_\alpha}, & & {\scriptstyle s^q_\alpha}\downarrow \qquad \downarrow{\scriptstyle s^q_\beta} \\
\mathcal{R}'^q_\alpha \xrightarrow{\hat{\Delta}^q_\alpha} \mathcal{R}'^{q-1}_\alpha & & \mathcal{R}'^q_\alpha \xrightarrow{\hat{\rho}^q_{\beta\alpha}} \mathcal{R}'^q_\beta
\end{array}
\quad \text{и} \quad
\begin{array}{c}
\mathcal{R}'^0_\alpha \xrightarrow{\overline{\Delta}^0_\alpha} \mathcal{F}'_\alpha \\
{\scriptstyle s^0_\alpha}\downarrow \qquad \downarrow{\scriptstyle s_\alpha} \\
\mathcal{R}'^0_\alpha \xrightarrow{\hat{\Delta}^0_\alpha} \mathcal{F}''_\alpha
\end{array}$$

коммутативны. Образ гомоморфизма $\chi_i = s_i\overline{\Delta}^0_i - \hat{\Delta}^0_i:\mathcal{R}'^0_i \to \mathcal{F}''|_{U_i}$ лежит в $I\mathcal{F}''|_{U_i}$, так как $s_i\hat{\Delta}^0_i$ и $\overline{\Delta}^0_i$ индуцируют один и тот же гомоморфизм $\mathcal{R}'^0_\alpha \to \mathcal{F}_\alpha$. Поэтому $\chi \in C^0$. Тогда

$$\partial\chi_i = (s_i\overline{\Delta}^0_i\hat{\Delta}^0_i)\,\Delta^1_i = (s_i\overline{\Delta}^0_i - \hat{\Delta}^0_i)\,\overline{\Delta}^1_i = -\,\hat{\Delta}^0_i\overline{\Delta}^1_i = \varphi_i$$

и

$$(\delta\chi)_{ij} = (s_j\overline{\Delta}^0_j - \hat{\Delta}^0_j)\,\overline{\rho}^0_{j,ij} - (s_i\overline{\Delta}^0_i - \hat{\Delta}^0_i)\,\overline{\rho}^0_{i,ij} = s_j\overline{\Delta}^0_{ij} - \hat{\Delta}^0_j\overline{\rho}^0_{j,ij} -$$
$$- s_i\overline{\Delta}^0_{ij} + \hat{\Delta}^0_i\overline{\rho}^0_{i,ij} = \hat{\Delta}^0_i\overline{\rho}^0_{i,ij} - \hat{\Delta}^0_j\overline{\rho}^0_{j,ij} = \psi_{ij}.$$

Таким образом, для эквивалентных деформаций $\varphi + \psi = d\chi$, следовательно, для двух продолжений деформации $\mathcal{F}$ корректно определен их разностный класс — элемент $[\mathcal{F}' - \mathcal{F}''] \in \mathcal{H}^1(C^{\cdot})$.

Покажем, что группа $\mathrm{H}^1(C^{\cdot}_{\overline{0}})$ транзитивно действует на множестве продолжений деформации $\mathcal{F}$. Пусть пучок $\mathcal{F}'$ на $X \times S'$ как и выше задается набором гомоморфизмов $\overline{\Delta}^q_\alpha$ и $\overline{\rho}^q_\alpha$ и пусть коцепь $\varphi + \psi \in C^1$, $\varphi \in \mathrm{Hom}_{\overline{0}}(U_i;\ \mathcal{R}'^1_i,\ \mathcal{F}_i \otimes_A I)$, $\psi_{ij} \in \mathrm{Hom}_{\overline{0}}(U_{ij};\ \mathcal{R}'^0_{ij},\ \mathcal{F}_{ij} \otimes_A I)$ представляет элемент $\sigma = [\varphi + \psi] \in \mathrm{H}^1(C^{\cdot}_{\overline{0}})$. Покажем, что существует набор гомоморфизмов $\hat{\Delta}^q_\alpha$ и $\hat{\rho}^q_{\alpha\beta}$, удовлетворяющий условиям (*a*) — (*g*) (и, следовательно, задающий продолжение $\mathcal{F}''$ деформации $\mathcal{F}$), для которого $[\mathcal{F}'' - \mathcal{F}'] = \sigma$. Это означает, что $\hat{\Delta}^q_\alpha$ и $\hat{\rho}^q_{\beta\alpha}$ должны удовлетворять уравнениям $\varphi_i = \Delta^0_i(\hat{\Delta}^1_i - \overline{\Delta}^1_i)$, $\psi_{ij} = \Delta^0_j(\hat{\rho}^0_{j,ij} - \overline{\rho}^0_{j,ij}) - \Delta^0_i(\hat{\rho}^0_{i,ij} - \overline{\rho}^0_{i,ij})$. Гомоморфизмы $\Delta^0_\alpha:\mathcal{R}'^0_\alpha \otimes_A I \to \mathcal{F}_i \otimes_{A_0} I$ сюръективны, поэтому существуют гомоморфизмы $\lambda^0_i:\mathcal{R}'^1_\alpha \to \mathcal{R}'^0_\alpha \otimes_{A_0} I$ такие, что $\varphi_i = \Delta^0_i \cdot \lambda^0_i$. По той же причине можно подобрать гомоморфизмы $r^0_{i,ij}:\mathcal{R}'^0_{ij} \to \mathcal{R}'^0_i \otimes_A I$, для которых $\psi_{ij} = \Delta^0_j r^0_{j,ij} - \Delta^0_i r^0_{i,ij}$ (можно, например, положить $r^0_{i,ij} = 0$ и $r^0_{j,ij}$ найти из эпиморфности Δ^0_j). Положим теперь $\hat{\Delta}^0_i = \overline{\Delta}^0_i + \lambda_i$, $\hat{\rho}^0_{i,ij} = \overline{\rho}^0_{i,ij} + r^0_{i,ij}$. Доказывая вторую часть утверждения (*iii*), мы установили, что если препятствие ω к продолжению деформации $\mathcal{F}$ имеет вид $\omega = d^1(\varphi + \psi)$, где $\varphi_i = \Delta^0_i \cdot \lambda_i$ и $\psi_{ij} = \Delta^0_j r^0_{j,ij} - \Delta^0_i r^0_{i,ij}$, то существуют гомоморфизмы $\hat{\Delta}^q_\alpha$ и $\hat{\rho}^q_{\beta\alpha}$, удовлетворяющие условиям $(a)-(g)$, такие что $\hat{\Delta}^1_i=\overline{\Delta}^1_i+\lambda_i$ и $\hat{\rho}^0_{i,ij}=\overline{\rho}^0_{i,ij}+r^0_{i,ij}$. В случае набора $\overline{\Delta}^q_\alpha$, $\overline{\rho}^q_{\beta\alpha}$ коцикл ω равен нулю и $d(\varphi+\psi)=0=\omega$. Поэтому построенные уже гомоморфизмы $\hat{\Delta}^0_i$ и $\hat{\rho}^0_{i,ij}$ включаются в набор $\hat{\Delta}^q_\alpha$, $\hat{\rho}^q_{\beta\alpha}$, удовлетворяющий $(a)-(g)$ и, следовательно, определяющий продолжение $\mathscr{F}''$ деформации $\mathscr{F}$ с S на S'. По построению $[\mathscr{F}''-\mathscr{F}']=[\varphi+\psi]\in \mathrm{H}^1(C^\bullet_{\overline{0}})$.

Итак, группа $\mathrm{H}^1(C^\bullet_{\overline{0}})=\mathrm{Ext}^1_{\overline{0}}(\pi;\ \mathscr{F}_0,\ \mathscr{F}_0\otimes_{A_0}I)$ транзитивно действует на множестве всех (с точностью до эквивалентности) продолжений деформации $\mathscr{F}$ над S до деформации над S'.

Выясним, может ли это действие иметь неподвижные точки. Рассмотрим деформацию $\mathscr{F}'$ с базой S', продолжающую $\mathscr{F}$, и пусть элемент $\sigma=[\varphi+\psi]\in \mathrm{H}^1(C^\bullet_{\overline{0}})$, $\varphi_i:\mathscr{R}^0_i\to\mathscr{F}_i\otimes_A I$, $\psi_{ij}:\mathscr{R}'^0_{ij}\to\mathscr{F}_{ij}\otimes_A I$, переводит $\mathscr{F}'$ в деформацию $\mathscr{F}''$, изоморфную $\mathscr{F}'$. Пусть $s:\mathscr{F}'\xrightarrow{\sim}\mathscr{F}''$ изоморфизм над S', тогда после ограничения на S мы получаем автоморфизм $\mathcal{O}_{X\times S}$-модуля $f:\mathscr{F}\xrightarrow{\sim}\mathscr{F}$. Если существует S'-автоморфизм f' пучка $\mathscr{F}'$, продолжающий f, то изоморфизм $s\cdot f'^{-1}:\mathscr{F}'\xrightarrow{\sim}\mathscr{F}''$ индуцирует тождественный автоморфизм $\mathscr{F}$. Но тогда гомоморфизмы $(sf'^{-1})\overline{\Delta}^0_i$ и $\hat{\Delta}^0_i\in \in\mathrm{Hom}(U_i;\mathscr{R}'^0_i,\mathscr{F}''_i)$ индуцируют одно и то же отображение $\mathscr{R}^0_i\to\mathscr{F}_i$, а поэтому их разность $\chi_i=(sf'^{-1})\overline{\Delta}^0_i-\hat{\Delta}^0_i$ — это гомоморфизм $\chi_i:\mathscr{R}^0_i\to\mathscr{F}_0\otimes_A I$, то есть $\chi_i\in C^0$. Покажем, что $d\chi=\varphi+\psi$. Действительно, по определению действия σ, $\partial\chi_i=((sf'^{-1})\overline{\Delta}^0_i-\hat{\Delta}^0_i)\overline{\Delta}^1_i=-\hat{\Delta}^0_i\overline{\Delta}^1_i=\Delta^0_i(\hat{\Delta}^1_i-\overline{\Delta}^1_i)=\varphi_i$ и $(\delta\chi)_{ij}=(s_jf'^{-1}_j\overline{\Delta}^0_j-\hat{\Delta}^0_j)\overline{\rho}^0_{j,ij}-(s_if'^{-1}_i\overline{\Delta}^0_i-\hat{\Delta}^0_i)\overline{\rho}^0_{i,ij}=\hat{\Delta}^0_i\overline{\rho}^0_{i,ij}-\hat{\Delta}_j\overline{\rho}^0_{j,ij}=\psi_{ij}$. Итак, $\sigma=[d\chi]=0$, то есть в том случае, когда любой автоморфизм f пучка $\mathscr{F}$ поднимается до автоморфизма $\mathscr{F}'$, группа $\mathrm{H}^1(C^\bullet_{\overline{0}})$ действует свободно.

Если $A'=A[I]$, то есть A' является A-модулем, то любая деформация $\mathscr{F}$ над S допускает продолжение на S', а именно $\mathscr{F}'=\mathscr{F}\otimes_A A'$. Пусть $f:\mathscr{F}\to\mathscr{F}$ автоморфизм, тогда $f\otimes \mathrm{id}_{A'}:\mathscr{F}'\to\mathscr{F}'$ — автоморфизм пучка $\mathscr{F}'$, продолжающий f. Поэтому деформация $\mathscr{F}'$ не является неподвижной точкой для действия группы $\mathrm{H}^1(C^\bullet_{\overline{0}})$, но на множестве всех продолжений (с точностью до эквивалентности) деформации $\mathscr{F}$ с S на S' эта группа действует транзитивно, поэтому действие свободно. Утверждение (iv), а вместе с ним и предложение 4.7.4 полностью доказаны. $\square$

ЛИТЕРАТУРА

1. *Бурбаки Н.*, Коммутативная алгебра. М.: Мир, 1971, 707 с. (РЖМат, 1973, 9А376К)
2. *Вайнтроб А. Ю.*, Деформации комплексных структур на супермногообразиях. Функц. анализ и его прил., 1984, *18*, № 2, 59—60 (РЖМат, 1984, 10А541)
3. —, Версальные деформации когомологических классов и комплексных супермногообразий. Докл. АН СССР, 1986, *287*, № 3, 532—535 (РЖМат, 1986, 8А710)
4. —, Деформации когерентных пучков на суперпространствах. Успехи мат. наук, 1986, *41*, № 3, 171—172 (РЖМат, 1986, 11А516)
5. —, Деформации и модули супермногообразий. В сб. Теоретико-групповые методы в физике. Юрмала, 1985. М.: Наука, 1986, *1*
6. *Ганнинг Р., Росси Х.*, Аналитические функции многих комплексных переменных. М.: Мир, 1969, 395 с. (РЖМат, 1969, 9А397К)
7. *Картан А., Эйленберг С.*, Гомологическая алгебра. М.: ИЛ, 1961 (РЖМат, 1961, 2А238К)
8. *Кириллова Р. Ю., Лейтес Д. А.*, Инстантоны с калибровочной супергруппой. В сб. Проблемы ядерной физики и космических лучей. Харьков, 1985, *24*, 34—39 (РЖМат, 1985, 12А410)
9. *Лейтес Д. А.*, Теория супермногообразий. Петрозаводск: КФ АН СССР, 1983, 200 с.
10. *Манин Ю. И.*, Замечания об алгебраических супермногообразиях. В сб. Алгебра. Сборник работ, посвященных 90-летию со дня рождения О. Ю. Шмидта. М.: МГУ, 1982, 95—101 (РЖМат, 1983, 6А425)
11. —, Суперсимметрия и супергравитация в суперпространстве нулевых супергеодезических. В сб. Теоретико-групповые методы в физике. Звенигород, 1982. М.: Наука, 1983, *1*, 203—208
12. —, Калибровочные поля и комплексная геометрия. М.: Наука, 1984, 336 с. (РЖМат, 1985, 10А407)
13. —, Критические размерности струнных теорий и дуализирующий пучок на пространстве модулей (супер)кривых. Функц. анализ и его прил., 1986, *20*, № 3, 88—89 (РЖМат, 1986, 12А577)
14. *Паламодов В. П.*, Деформации комплексных пространств. Успехи мат. наук, 1976, *31*, № 3, 129—194.
15. —, Инварианты аналитических $\mathbf{Z}_2$-многообразий. Функц. анализ и его прил., 1983, *17*, № 1, 83—84 (РЖМат, 1983, 8А654)
16. —, Деформации комплексных пространств. Итоги науки и техн. ВИНИТИ. Соврем. пробл. матем. Фундам. направления, 1986, *10*, 123—221
17. *Хартсхорн Р.*, Алгебраическая геометрия. М.: Мир, 1981, 599 с. (РЖМат, 1982, 5А349К)
18. *Artin M.*, On the solution of the analytic equations. Invent. Math., 1968, *5*, № 4, 277—291 (РЖМат, 1969, 8А289)
19. *Banica C., Putinar M., Schumacher G.*, Variation der globalen Ext in deformationen kompakter komplexer Räume. Math. Ann., 1980, *250*, № 2, 125—155 (РЖМат, 1981, 3А628)
20. *Beilinson A., Bernstein I., Deligne P.*, Faisceaux pervers. Asterisque, 1982, *100*
21. *Bingener J.*, Darstellbarkeitkriterium fur analytische Funktoren. Ann. sci. Ec. norm. super., 1980, *13*, № 3, 317—347 (РЖМат, 1981, 6А620)
22. *Douady A.*, Le probleme des modules pour les sous-espaces analytiques compacts d'un espace analytique donne. Ann. Inst. Fourier, 1966, *16*, № 1, 1—95 (РЖМат, 1967, 6А297)
23. —, Flatness and privilege. Enseign. Math., 1968, *14*, № 1, 47—74 (РЖМат, 1969, 6А376)
24. —, Le probleme des modules locaux pour les espaces C-analytiques compacts. Ann. Sci. Ec. norm. super., 1974, *7*, № 4, 569—602
25. *Flenner H.*, Eine bemerkung über relative Ext-garben. Math. Ann., 1981, *258*, № 2, 175—182 (РЖМат, 1982, 7А692)

26. *Forster O., Knorr K.*, Konstruction versalen Familie kompakter komplexer Räume. Lect. Notes Math., 1979, *705*, 141 S. (РЖМат, 1980, 5A598)
27. *Frisch J.*, Points de platitude d'un morphisme d'espaces analytiques complexes. Invent. Math., 1967, *4*, № 2, 118—138 (РЖМат, 1968, 2A494)
28. *Grauert H.*, Ein Theorem der analytischen Garbentheorie und die Modulräume komplexer Structuren. Publ. Math. IHES, 1960, *5*, 232—292 (РЖМат, 1964, 3A278)
29. —, Der Satz von Kuranishi fur kompakter komplexer Räume. Invent. Math., 1974, *25*, № 2, 107—142 (РЖМат, 1975, 1A712)
30. *Grothendieck A.*, Categories cofibres additives et complexe cotangent relativ. Lect. Notes. Math., 1968, *79*
31. *Hartshorne R.*, Residus and duality. Lect. Notes Math., 1966, *20*, 423 pp. (РЖМат, 1969, 4A347)
32. *Palamodov V. P.*, Moduli in versal deformations of complex spaces. Lect. Notes Math., 1978, *683*, 74—115 (РЖМат, 1979, 7A681)
33. *Ramis J.-P., Ruget G., Verdier J. L.*, Dualite relative en geometrie analytique complexe. Invent. Math., 1971, *13*, № 4, 261—283 (РЖМат, 1972, 3A560)
34. *Riemenschneider O.*, Über die Anvendung algebraisher Methoden in der Deformations Theorie komplexer Räume. Math. Ann., 1970, *187*, № 1, 40—55
35. *Rothshtein M.*, Deformations of complex supermanifolds. Proc. Amer. Math. Soc., 1985, *95*, № 2, 255—260 (РЖМат, 1986, 7A724)
36. *Schlessinger M.*, Functors on Artin rings. Trans. Amer. Math. Soc., 1968, *130*, № 2, 208—222 (РЖМат, 1971, 4A453)
37. *Siu Y.-T., Trautmann G.*, Deformations of coherent analytic sheaves with compact support. Memoirs Amer. Math. Soc., 1981, *238*, 1—155 (РЖМат, 1982, 5A587)
38. *Wawrik J. J.*, Deforming cohomology classes. Trans. Amer. Math. Soc., 1973, *181*, № 2, 341—350 (РЖМат, 1974, 9A703)
39. —, A theorem on solutions of analytic equations with applications to deformations of complex structures. Math. Ann., 1975, *216*, № 2, 127—142 (РЖМат, 1976, 3A686)

СОДЕРЖАНИЕ