



Math-Net.Ru

Общероссийский математический портал

Е. М. Шогенова, Априорные оценки решения краевых задач для уравнения конвекции-диффузии дробного порядка, *Вестник КРАУНЦ. Физ.-мат. науки*, 2018, номер 4, 54–60

DOI: 10.18454/2079-6641-2018-24-4-54-60

Использование Общероссийского математического портала Math-Net.Ru подразумевает, что вы прочитали и согласны с пользовательским соглашением

<http://www.mathnet.ru/rus/agreement>

Параметры загрузки:

IP: 18.97.14.91

25 марта 2025 г., 22:37:46



УДК 519.633

## **АПРИОРНЫЕ ОЦЕНКИ РЕШЕНИЯ КРАЕВЫХ ЗАДАЧ ДЛЯ УРАВНЕНИЯ КОНВЕКЦИИ-ДИФФУЗИИ ДРОБНОГО ПОРЯДКА**

**Е. М. Шогенова**

Институт прикладной математики и автоматизации КБНЦ РАН, 360000,  
г. Нальчик, ул. Шортанова, 89а

E-mail: shogenovae@inbox.ru

В данной работе методом энергетических неравенств получены априорные оценки первой и третьей краевых задач для уравнения конвекции-диффузии дробного порядка, из которых следует единственность и непрерывная зависимость решения поставленных задач от входных данных.

*Ключевые слова:* дробная производная по Капуто, дробный интеграл Римана-Лиувилля, уравнение конвекции-диффузии, краевая задача, априорная оценка

© Шогенова Е. М., 2018

MSC 97M50

## **A PRIORI ESTIMATES OF THE SOLUTION BOUNDARY VALUE PROBLEMS FOR THE CONVECTION-DIFFUSION EQUATION OF FRACTIONAL ORDER**

**E. M. Shogenova**

Institute of Applied Mathematics and Automation KBSC RAS, 360000,  
Nalchik, Shortanova st., 89a, Russia

E-mail: shogenovae@inbox.ru

In this paper, the method of energy inequalities obtained a priori estimates of the first and third boundary value problems for the convection-diffusion equation of fractional order, from which follows the uniqueness and continuous dependence of the solution of the problems posed on the input data.

*Key words:* convection-diffusion equation, boundary-value problem, a priori estimate.

© Shogenova E. M., 2018

## Введение

Дробное исчисление применяется при описании большого класса физических и химических процессов, протекающих в средах с фрактальной геометрией, а также при математическом моделировании экономических и социально-биологических процессов [1, с. 149]. В работе [2] дается физическая интерпретация дробной производной, на основе которой получены обобщенные уравнения переноса для медленных и быстрых стохастических процессов и решается первая начально - краевая задача. Важную роль во многих процессах теплообмена играет конвективно-диффузионный перенос. В качестве математической модели при его описании выступает уравнение диффузии с конвективным слагаемым. Введением в уравнение переноса оператора дробного интегро-дифференцирования, можно обобщить уравнение. Полученное уравнение дробного порядка будет более адекватно описывать физические процессы, протекающие в пористых средах

$$\partial_{0t}^{\alpha} u(x,t) = \frac{\partial}{\partial x} \left( k(x) \frac{\partial u}{\partial x} \right) + r(x) D_{0t}^{-\beta} \frac{\partial u}{\partial x} - q(x)u(x,t) + g(x,t),$$

где

$$\partial_{0t}^{\alpha} u(x,t) = \frac{1}{\Gamma(1-\alpha)} \int_0^t u_{\tau}(x,\tau)(t-\tau)^{-\alpha} d\tau$$

— дробная производная Капуто порядка  $\alpha$ ,  $0 < \alpha < 1$ ,

$$D_{0t}^{-\beta} u = \frac{1}{\Gamma(\beta)} \int_0^t u(x,\tau)(t-\tau)^{\beta-1} d\tau$$

— дробный интеграл Римана-Лиувилля порядка  $\beta$ .

В работе, далее будем предполагать, что выполняется условие  $0 < \alpha + \beta \leq 1$ .

Применяя к обеим частям данного уравнения оператор дробного дифференцирования  $\partial_{0t}^{\beta}$  получим

$$\partial_{0t}^{\alpha+\beta} u(x,t) = \partial_{0t}^{\beta} \frac{\partial}{\partial x} \left( k(x) \frac{\partial u}{\partial x} \right) + r(x) \frac{\partial u}{\partial x} - q(x) \partial_{0t}^{\beta} u(x,t) + f(x,t). \quad (1)$$

В [3] получена априорная оценка для решения первой начально-краевой задачи уравнения диффузии дробного порядка и рассмотрены разностные методы решения поставленных задач. Априорная оценка решения первой краевой задачи для уравнения диффузии с операторами дробного интегро-дифференцирования получена в [4]. В работе [5] методом энергетических неравенств получены априорные оценки решения краевых задач первого и третьего рода для диффузионно-волнового уравнения. Априорные оценки решений краевых задач для уравнения диффузии дробного и распределенного порядков в дифференциальной и разностной трактовках получены в работах [6, 7].

В данной работе методом энергетических неравенств получены априорные оценки первой и третьей краевых задач для уравнения конвекции-диффузии дробного порядка, из которых следует единственность и непрерывная зависимость решения поставленных задач от входных данных.

## Априорная оценка решения первой краевой задачи

В прямоугольнике  $\bar{Q}_T = \{(x, t) : 0 \leq x \leq 1, 0 \leq t \leq T\}$  рассмотрим первую краевую задачу:

$$\partial_{0t}^{\alpha+\beta} u = \partial_{0t}^{\beta} (k(x)u_x)_x + r(x)u_x - q(x)\partial_{0t}^{\beta} u + f(x, t), \quad 0 < x < 1, \quad 0 < t < T, \quad (2)$$

$$u(0, t) = 0, \quad u(1, t) = 0, \quad 0 \leq t \leq T, \quad (3)$$

$$u(x, 0) = u_0(x), \quad 0 \leq x \leq 1. \quad (4)$$

В дальнейшем будем предполагать существование решения  $u(x, t) \in C^{2,1}(\bar{Q}_T)$  задачи (2)–(4), где  $C^{m,n}(\bar{Q}_T)$  – класс функций, непрерывных вместе со своими частными производными порядка  $m$  по  $x$  и порядка  $n$  по  $t$  на  $\bar{Q}_T$ .

**Лемма 1.** [5] Для любой абсолютно непрерывной на  $[0, T]$  функции  $v(t)$  справедливо неравенство

$$v(t)\partial_{0t}^{\alpha} v(t) \geq \frac{1}{2}\partial_{0t}^{\alpha} v^2(t), \quad 0 < \alpha < 1.$$

**Лемма 2.** [5] Пусть неотрицательная абсолютно непрерывная функция  $y(t)$  удовлетворяет для почти всех  $t$  из  $[0, T]$  неравенству

$$\partial_{0t}^{\alpha} y(t) \leq c_1 y(t) + c_2(t), \quad 0 < \alpha < 1,$$

где  $c_1 > 0$ ,  $c_2(t)$  – суммируемая на  $[0, T]$  неотрицательная функция. Тогда

$$y(t) \leq y(0)E_{\alpha}(c_1 t^{\alpha}) + \Gamma(\alpha)E_{\alpha, \alpha}(c_1 t^{\alpha})D_{0t}^{-\alpha} c_2(t),$$

где

$$E_{\alpha}(z) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{z^n}{\Gamma(\alpha n + 1)}, \quad E_{\alpha, \mu}(z) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{z^n}{\Gamma(\alpha n + \mu)}$$

– функции Миттаг-Леффлера.

Введем следующее обозначение

$$\|u\|_0^2 = \int_0^1 u^2(x, t) dx.$$

**Теорема 1.** Если  $k(x), r(x) \in C^1(\bar{Q}_T)$ ,  $q(x) \in C(\bar{Q}_T)$ ,  $k(x) \geq c_1 > 0$ ,  $r'(x) \geq 0$ ,  $q(x) \geq 0$  всюду на  $\bar{Q}_T$ , то для решения  $u(x, t)$  задачи (2)–(4) справедлива априорная оценка

$$\|u\|_0^2 + D_{0t}^{-\alpha} \|u_x\|_0^2 \leq M \left( D_{0t}^{-\alpha-\beta} \|f\|_0^2 + \|u_0\|_0^2 + \|u_x(x, 0)\|_0^2 \right), \quad (5)$$

где  $M(T) > 0$  – известная постоянная.

**Доказательство.** Умножим (2) на  $u(x, t)$  и проинтегрируем по  $x$  от 0 до 1:

$$\int_0^1 u \partial_{0t}^{\alpha+\beta} u dx = \int_0^1 u \partial_{0t}^{\beta} (k(x)u_x)_x dx + \int_0^1 u r(x)u_x dx - \int_0^1 u q(x) \partial_{0t}^{\beta} u dx + \int_0^1 u f dx. \quad (6)$$

Преобразуем слагаемые, входящие в (6):

$$\int_0^1 ur(x)u_x dx = -\frac{1}{2} \int_0^1 r' u^2 dx, \tag{7}$$

$$\int_0^1 uf dx \leq \varepsilon \|u\|_0^2 + \frac{1}{4\varepsilon} \|f\|_0^2, \quad \varepsilon > 0, \tag{8}$$

в силу Леммы 1

$$\int_0^1 u \partial_{0t}^{\alpha+\beta} u dx \geq \int_0^1 \frac{1}{2} \partial_{0t}^{\alpha+\beta} u^2 dx = \frac{1}{2} \partial_{0t}^{\alpha+\beta} \|u\|_0^2, \tag{9}$$

$$-\int_0^1 u \partial_{0t}^{\beta} (k(x)u_x)_x dx = \int_0^1 u_x \partial_{0t}^{\beta} (k(x)u_x) dx \geq \frac{1}{2} \int_0^1 k(x) \partial_{0t}^{\beta} u_x^2 dx, \tag{10}$$

$$-\int_0^1 uq(x) \partial_{0t}^{\beta} u dx \geq \frac{1}{2} \int_0^1 q(x) \partial_{0t}^{\beta} u^2 dx. \tag{11}$$

Подставив полученные выражения в (6) и полагая  $\varepsilon = 1/2$ , получим

$$\partial_{0t}^{\alpha+\beta} \|u\|_0^2 + c_1 \partial_{0t}^{\beta} \|u_x\|_0^2 \leq \|u\|_0^2 + \|f\|_0^2. \tag{12}$$

Применив к обеим частям неравенства (12) оператор дробного интегрирования  $D_{0t}^{-\alpha-\beta}$  приходим к неравенству

$$\|u\|_0^2 + c_1 D_{0t}^{-\alpha} \|u_x\|_0^2 \leq D_{0t}^{-\alpha-\beta} \|u\|_0^2 + D_{0t}^{-\alpha-\beta} \|f\|_0^2 + \|u_0\|_0^2 + \frac{T^\alpha}{\Gamma(1+\alpha)} \|u_x(x,0)\|_0^2. \tag{13}$$

Оценив первое слагаемое в правой части

$$D_{0t}^{-\alpha-\beta} \|u\|_0^2 = \frac{1}{\Gamma(\alpha+\beta)} \int_0^t \frac{\|u\|_0^2}{(t-\xi)^{1-\alpha-\beta}} d\xi \leq \frac{\Gamma(\alpha)T^\beta}{\Gamma(\alpha+\beta)} D_{0t}^{-\alpha} \|u\|_0^2, \tag{14}$$

приходим к неравенству

$$\|u\|_0^2 + c_1 D_{0t}^{-\alpha} \|u_x\|_0^2 \leq \frac{T^\beta \Gamma(\alpha)}{\Gamma(\alpha+\beta)} D_{0t}^{-\alpha} \|u\|_0^2 + D_{0t}^{-\alpha-\beta} \|f\|_0^2 + \|u_0\|_0^2 + \frac{T^\alpha}{\Gamma(1+\alpha)} \|u_x(x,0)\|_0^2. \tag{15}$$

Отбросив второе слагаемое в левой части неравенства (15) и воспользовавшись Леммой 2, где  $y(t) = D_{0t}^{-\alpha} \|u\|_0^2$ ,  $\partial_{0t}^\alpha y(t) = \|u\|_0^2$ ,  $y(0) = 0$ , получаем неравенство

$$D_{0t}^{-\alpha} \|u\|_0^2 \leq M_1 \left( D_{0t}^{-2\alpha-\beta} \|f\|_0^2 + \|u_0\|_0^2 + \|u_x(x,0)\|_0^2 \right) \tag{16}$$

где  $M_1(T) > 0$  - известная постоянная.

Так как для любой неотрицательной интегрируемой на  $[0, T]$  функции  $h(t)$  справедливо неравенство  $D_{0t}^{-2\alpha} h(t) \leq (t^\alpha \Gamma(\alpha) / \Gamma(2\alpha)) D_{0t}^{-\alpha} h(t)$ , то из неравенств (15) и (16) следует априорная оценка (5), из которой следует единственность и непрерывная зависимость решения задачи (2)-(4) от входных данных.  $\square$

## Априорная оценка решения третьей краевой задачи

В задаче (2)-(4) заменим граничные условия (3) условиями

$$\begin{cases} k(0)\partial_{0t}^\beta u_x(0,t) = \beta_1\partial_{0t}^\beta u(0,t) - \mu_1(t), \\ -k(1)\partial_{0t}^\beta u_x(1,t) = \beta_2\partial_{0t}^\beta u(1,t) - \mu_2(t). \end{cases} \quad (17)$$

В прямоугольнике  $\bar{Q}_T$  рассмотрим третью краевую задачу (2), (4), (17), где  $k(x) \geq c_1 > 0$ ,  $r'(x) \geq 0$ ,  $q(x) \geq 0$ ,  $|r(x)| \leq c_2$  всюду на  $[0, 1]$ ,  $\mu_i(t) \in C[0, T]$ , для всех  $t \in [0, T]$ ,  $i = 1, 2$ ,  $\beta_i \geq \beta_0 > 0$ ,  $k(x), r(x) \in C^1[0, 1]$ ,  $q(x) \in C[0, 1]$ .

**Теорема 2.** Если  $k(x) \geq c_1 > 0$ ,  $r'(x) \geq 0$ ,  $q(x) \geq 0$ ,  $|r(x)| \leq c_2$  всюду на  $[0, 1]$ ,  $\mu_i(t) \in C[0, T]$ , для всех  $t \in [0, T]$ ,  $i = 1, 2$ ,  $\beta_i \geq \beta_0 > 0$ ,  $k(x), r(x) \in C^1[0, 1]$ ,  $q(x) \in C[0, 1]$ , то для решения  $u(x, t)$  задачи (2), (4), (17) справедлива априорная оценка

$$\begin{aligned} & \|u\|_0^2 + D_{0t}^{-\alpha} \|u_x\|_0^2 + D_{0t}^{-\alpha} (u^2(1, t) + u^2(0, t)) \leq \\ & \leq M \left[ D_{0t}^{-\alpha-\beta} \mu_1^2(t) + D_{0t}^{-\alpha-\beta} \mu_2^2(t) + D_{0t}^{-\alpha-\beta} \|f\|_0^2 + \|u_0\|_0^2 + \|u_x(x, 0)\|_0^2 \right], \end{aligned} \quad (18)$$

где  $M(T) > 0$  — известная постоянная.

**Доказательство.** Как и в случае доказательства теоремы 1, умножая на  $u(x, t)$  уравнение (2) и интегрируя по  $x$  от 0 до 1, получим уравнение (6). Преобразовывая слагаемые, входящие в (6) приходим к неравенствам (8), (9), (11) и

$$-\int_0^1 u \partial_{0t}^\beta (k(x)u_x)_x dx = -k(1)u(1, t)\partial_{0t}^\beta u_x(1, t) + k(0)u(0, t)\partial_{0t}^\beta u_x(0, t) + \int_0^1 u_x \partial_{0t}^\beta (k(x)u_x) dx, \quad (19)$$

$$\int_0^1 ur(x)u_x dx = \frac{1}{2}(r(1)u^2(1, t) - r(0)u^2(0, t)) - \frac{1}{2} \int_0^1 r'u^2 dx \geq -c_2 \|u\|_{C[0, 1]}^2. \quad (20)$$

Подставив полученные выражения в тождество (6) и с учетом условий (17), получаем неравенство

$$\begin{aligned} & \frac{1}{2} \partial_{0t}^{\alpha+\beta} \|u\|_0^2 + \frac{1}{2} \partial_{0t}^\beta \|\sqrt{k}u_x\|_0^2 \leq \\ & \leq -\beta_2 u(1, t)\partial_{0t}^\beta u(1, t) + \mu_2(t)u(1, t) - \beta_1 u(0, t)\partial_{0t}^\beta u(0, t) + \mu_1(t)u(0, t) + \\ & + \varepsilon \|u\|_0^2 + \frac{1}{4\varepsilon} \|f\|_0^2 + c_2 \|u\|_{C[0, 1]}^2. \end{aligned} \quad (21)$$

Используя неравенства

$$\begin{aligned} u(1, t)\partial_{0t}^\beta u(1, t) & \geq \frac{1}{2} \partial_{0t}^\beta u^2(1, t), \\ u(0, t)\partial_{0t}^\beta u(0, t) & \geq \frac{1}{2} \partial_{0t}^\beta u^2(0, t), \\ u(1, t)\mu_2(t) & \leq \frac{1}{2} (u^2(1, t) + \mu_2^2(t)), \\ u(0, t)\mu_1(t) & \leq \frac{1}{2} (u^2(0, t) + \mu_1^2(t)), \end{aligned}$$

из (21) при  $\varepsilon = 1/2$ , имеем

$$\begin{aligned} & \partial_{0t}^{\alpha+\beta} \|u\|_0^2 + \partial_{0t}^\beta \|\sqrt{k}u_x\|_0^2 + \beta_0 \partial_{0t}^\beta (u^2(1,t) + u^2(0,t)) \leq \\ & \leq \mu_1^2(t) + \mu_2^2(t) + u^2(0,t) + u^2(1,t) + \|u\|_0^2 + \|f\|_0^2 + c_2 \|u\|_{C[0,1]}^2. \end{aligned}$$

Применив к обеим частям полученного неравенства оператор дробного интегрирования  $D_{0t}^{-\alpha-\beta}$ , с учетом соотношения

$$\|u\|_{C[0,1]}^2 \leq \varepsilon \|u_x\|_0^2 + \left(\frac{1}{\varepsilon} + 1\right) \|u\|_0^2,$$

при  $\varepsilon = 1/2$ , получим

$$\begin{aligned} & \|u\|_0^2 + D_{0t}^{-\alpha} \|u_x\|_0^2 + D_{0t}^{-\alpha} (u^2(1,t) + u^2(0,t)) \leq \\ & \leq M_1 \left( D_{0t}^{-\alpha-\beta} \|u_x\|_0^2 + D_{0t}^{-\alpha-\beta} \|u\|_0^2 + D_{0t}^{-\alpha-\beta} \mu_1^2(t) + D_{0t}^{-\alpha-\beta} \mu_2^2(t) + D_{0t}^{-\alpha-\beta} \|f\|_0^2 \right) + \quad (22) \\ & + \|u_0\|_0^2 + \frac{T^\alpha}{\Gamma(1+\alpha)} \|u_x(x,0)\|_0^2, \end{aligned}$$

где  $M_1 > 0$ —известная постоянная.

Воспользовавшись Леммой 2 при следующих обозначениях  $D_{0t}^{-\alpha} \|u_x\|_0^2 = \partial_{0t}^\beta y(t)$ ,  $D_{0t}^{-\alpha-\beta} \|u_x\|_0^2 = y(t)$ ,  $y(0) = 0$

$$\begin{aligned} D_{0t}^{-\alpha-\beta} \|u_x\|_0^2 & \leq \Gamma(\alpha) E_{\alpha,\alpha}(Mt^\alpha) D_{0t}^{-\alpha} [MD_{0t}^{-\alpha-\beta} \|u\|_0^2 + D_{0t}^{-\alpha-\beta} \mu_1^2(t) + D_{0t}^{-\alpha-\beta} \mu_2^2(t) + D_{0t}^{-\alpha-\beta} \|f\|_0^2 + \\ & + \|u_0\|_0^2 + \frac{T^\alpha}{\Gamma(1+\alpha)} \|u_x(x,0)\|_0^2], \end{aligned}$$

принимая во внимание оценку (14) и справедливость неравенства

$$D_{0t}^{-2\alpha} h(t) \leq (t^\alpha \Gamma(\alpha) / \Gamma(2\alpha)) D_{0t}^{-\alpha} h(t)$$

из (22), получим

$$\begin{aligned} & \|u\|_0^2 + D_{0t}^{-\alpha} \|u_x\|_0^2 + D_{0t}^{-\alpha} (u^2(1,t) + u^2(0,t)) \leq \\ & \leq M_2 \left[ D_{0t}^{-\alpha} \|u\|_0^2 + D_{0t}^{-\alpha-\beta} \mu_1^2(t) + D_{0t}^{-\alpha-\beta} \mu_2^2(t) + D_{0t}^{-\alpha-\beta} \|f\|_0^2 + \|u_0\|_0^2 + \|u_x(x,0)\|_0^2 \right] \quad (23) \end{aligned}$$

где  $M_2(T) > 0$ —известная постоянная.

Еще раз воспользовавшись Леммой 2 при обозначениях  $D_{0t}^{-\alpha} \|u\|_0^2 = y(t)$ ,  $\|u\|_0^2 = \partial_{0t}^\alpha y(t)$ ,  $y(0) = 0$  и с учетом неравенства  $D_{0t}^{-2\alpha} h(t) \leq (t^\alpha \Gamma(\alpha) / \Gamma(2\alpha)) D_{0t}^{-\alpha} h(t)$  из (23) получаем оценку априорную оценку (18). Из полученной оценки следует единственность и непрерывная зависимость решения задачи (2), (4), (17) от входных данных.  $\square$

## Список литературы

- [1] Нахушев А. М., *Дробное исчисление и его применение*, Физматлит, М., 2003, 272 с. [Nakhushev A. M., *Drobnое ischislenie i ego primenenie*, Fizmatlit, M., 2003 (in Russian), 272 pp.]
- [2] Шогенов В. Х., Шхануков-Лафишев М. Х., Бештоев Х. М., “Дробные производные: интерпретация и некоторые применения в физике”, *Сообщения объединенного института ядерных исследований*, 1997. [Shogenov V. H., Shkhanukov-Lafishev M. Kh., Beshtoev H. M., “Drobnые proizvodnyе: interpretaciya i nekotorye primeneniya v fizike”, *Soobshcheniya obedinennogo instituta yadernyh issledovaniy*, 1997 (in Russian)].
- [3] Шхануков-Лафишев М. Х., Тауменова Ф. И., “Разностные методы решения краевых задач для дифференциальных уравнений дробного порядка”, *Журнал вычислительной математики и математической физики*, **46:10** (2006), 1871–1881. [Shkhanukov-Lafishev M. Kh., Taukenova F. I., “Raznostnye metody resheniya kraevykh zadach dlya differencialnykh uravneniy drobnogo poryadka”, *Zhurnal vychislitelnoy matematiki i matematicheskoy fiziki*, **46:10** (2006), 1871–1881 (in Russian)].
- [4] Хагажеева А. А., Алиханов А. А., “Априорная оценка решения первой краевой задачи для уравнения диффузии с операторами дробного интегро-дифференцирования”, *Алгебра, анализ и смежные вопросы математического моделирования*, ЮМИ ВНИЦ РАН и РСО-А (Владикавказ, 26-27 июня 2015), Тезисы докладов, 106–107. [Khagazheeva A. A., Alikhanov A. A., “Apriornaya ocenka resheniya pervoy kraevoy zadachi dlya uravneniya diffuzii s operatorami drobnogo integro-differencirovaniya”, *Algebra, analiz i smezhnye voprosy matematicheskogo modelirovaniya*, YUMI VNC RAN i RSO-A (Vladikavkaz, 26-27 iyunya 2015), Tezisy dokladov, 106–107 (in Russian)].
- [5] Алиханов А. А., “Априорные оценки решений краевых задач для уравнений дробного порядка”, *Дифференциальные уравнения*, **46:5** (2010), 658–664. [Alikhanov A. A., “A Priori Estimates for Solutions of Boundary Value Problems for Fractional-Order Equations”, *Differential Equations*, **46:5** (2010), 658–664].
- [6] Alikhanov A. A., “Boundary value problems for the diffusion equation of the variable order in differential and difference settings”, *Applied Mathematics and Computation*, 2012, № 219, 3938–3946.
- [7] Alikhanov A. A., “Numerical methods of solutions of boundary value problems for the multi-term variable-distributed order diffusion equation”, *Applied Mathematics and Computation*, 2015, № 268, 12–22.

**Для цитирования:** Шогенова Е. М. Априорные оценки решения краевых задач для уравнения конвекции-диффузии дробного порядка // *Вестник КРАУНЦ. Физ.-мат. науки*. 2018. № 4(24). С. 54-60. DOI: 10.18454/2079-6641-2018-24-4-54-60

**For citation:** Shogenova E. M. A priori estimates of the solution of boundary value problems for the convection-diffusion equation of fractional order, *Vestnik KRAUNC. Fiz.-mat. nauki*. 2018, **24**: 4, 54-60. DOI: 10.18454/2079-6641-2018-24-4-54-60

Поступила в редакцию / Original article submitted: 08.02.2016