A. Yu. Solynin, Polarization and functional inequalities, *Algebra i Analiz*, 1996, Volume 8, Issue 6, 148–185

https://www.mathnet.ru/eng/aa746

Алгебра и анализ
Том 8 (1996), вып. 6

Посвящается памяти моего учителя
профессора П. Митюка

ПОЛЯРИЗАЦИЯ И ФУНКЦИОНАЛЬНЫЕ НЕРАВЕНСТВА

© А. Ю. Солынин

В статье предлагается метод доказательства функциональных неравенств для решений дифференциальных уравнений в частных производных, основанный на применении преобразования поляризации. В специальных случаях метод приводит ко многим известным неравенствам, а также позволяет получить новые соотношения для функций Грина, гармонических мер и метрик Пуанкаре. В качестве следствий из основных утверждений работы вытекают некоторые результаты о симметризации и об интегральных средних, полученные А. Бернстайном II, Б. А. Тейлором и А. Вейтсманом.

§1. Введение

Идея применения симметризации связана с выявлением симметрии решений экстремальных задач, которая скрыто заложена в исходных посылках. Традиционный подход к симметризации в теории функций, основанный на изучении изменения интегралов энергии (функционалов типа интеграла Дирихле) и восходящий к Г. Полиа и Г. Сегё [1], был дополнен в семидесятые годы новым мощным подходом А. Бернстайна [2], связанным с инвариантностью при симметризационных преобразованиях класса субгармонических функций, т.е. в конечном итоге связанным с принципом максимума для субгармонических функций.

В настоящее время существует много различных симметризационных преобразований. Но, как было выявлено еще В. Волонтисом [3], многие из них

Ключевые слова: поляризация, симметризация, принцип максимума, функция Грина, гармоническая мера, метрика Пуанкаре.

Данная работа выполнена частично при финансовой поддержке Российского фонда фундаментальных исследований, грант 94-0-00911.

конструируются из одного более простого преобразования, позднее названного *поляризацией* (см. В. Н. Дубинин [4]). Основными объектами поляризации являются множества, конденсаторы и функции. Приведем необходимые определения, при этом мы следуем в основном работам В. Н. Дубинина [5, 4].

В дальнейшем через $x = (x_1, \dots, x_n)$ обозначаем точку пространства $\overline{\mathbb{R}^n}$, $\overline{\mathbb{R}^n} = \mathbb{R}^n \cup \{\infty\}$, $\mathbb{R} = \mathbb{R}^1$, $\mathbb{R}_0 = \{x \in \mathbb{R} : x \geqslant 0\}$, $|x| = \sqrt{x_1^2 + \dots + x_n^2}$.

Пусть H — произвольная ориентированная гиперплоскость в $\overline{\mathbb{R}^n}$, и пусть $(\overline{\mathbb{R}^n})^-$ и $(\overline{\mathbb{R}^n})^+$ — соответствующие замкнутые полупространства, на которые H разбивает $\overline{\mathbb{R}^n}$.

Введем следующие обозначения:

$x^* = x^*(H)$ — точка, симметричная точке $x \in \overline{\mathbb{R}^n}$ относительно гиперплоскости H;

$A^* = A^*(H) = \{x : x^* \in A\}$ — множество, симметричное множеству $A \subset \overline{\mathbb{R}^n}$ относительно H;

$$A^{\pm} = A \cap (\overline{\mathbb{R}^n})^{\pm}, \qquad P_H A = (A \cup A^*)^+ \cup (A \cap A^*)^-.$$

Под *поляризацией* множества A относительно H понимаем переход от A к множеству $P_H A$, а также само множество $P_H A$.

В работе [3] Волонтис использовал преобразование поляризации для доказательства хорошо известного утверждения Полиа о том, что емкость конденсатора не увеличивается при симметризации. Для этого в [3] показано, что для любого конденсатора (E, F) существует последовательность поляризаций, которая в итоге трансформирует (E, F) в конденсатор (E^*, F^*), являющийся результатом круговой симметризации (E, F) относительно некоторой, заранее заданной оси. Для доказательства того, что на каждом шаге, т.е. при выполнении поляризаций, емкость конденсатора не увеличивается, Волонтис использовал связь между емкостью, экстремальной длиной и обобщенным потенциалом. Этот метод затруднительно использовать в случае более общих функционалов. Возможно поэтому преобразование Волонтиса долгое время оставалось невостребованным, пока в 1985 г. В. Н. Дубинин [6] не нашел простой и естественный подход, связанный с поляризацией функций и в итоге связанный с принципом Дирихле.

В настоящей работе предлагается новый подход к изучению задач, связанных с симметризационными преобразованиями. Основная идея состоит в применении непосредственно *принципа максимума* (для гармонических функций или для решений более общих PDE's) для сравнения решений различных задач в исходной и в поляризованной областях. Размерность пространства и специфика симметризационного преобразования не играют существенной роли при применении нового метода. В данной работе мы продемонстрируем идею подхода на задачах, связанных с интегральными средними функций Грина и метрики Пуанкаре.

В §2 доказываются поляризационные точечные неравенства для функций Грина и гармонических мер. В §3 приводится простая схема получения интегральных симметризационных неравенств из точечных. В последнем параграфе изучается поведение при поляризации решений дифференциальных уравнений, связанных с метрикой Пуанкаре. Излагаемые результаты были анонсированы в препринте [7]. Дальнейшее развитие и основные приложения публикуются в совместной работе Ф. Брока и автора [8].

§2. Двухточечные неравенства

Пусть область $D \subset \mathbb{R}^n$ имеет функцию Грина $G(x,y)$ с полюсом в точке $y \in D$. В этом и следующем разделах всегда предполагается, что исходная область имеет регулярную границу и что $G(x,y)$ доопределена нулем до функции непрерывной на $C\,D = \overline{\mathbb{R}^n} \setminus D$.

Пусть $P_H D$ — результат поляризации области D относительно гиперплоскости H; для удобства изложения далее считаем, что $H = \{x : x_1 = 0\}$. Открытое множество $P_H D$ (в общем случае несвязное) содержит единственную связную компоненту, пусть D_H, имеющую непустое пересечение с полупространством $\mathbb{R}^n_+$. Здесь и далее $\mathbb{R}^n_\pm = \{x : x_1 > 0\}$.

Через $G_H(x,y)$ обозначим функцию Грина области D_H с полюсом в точке $y \in D_H$.

Теорема 1. *Пусть* x, $y \in (D_H)^+$. *Тогда*

$$G_H(x,y) \geqslant \max\{G(x,y),\ G(x,y^*),\ G(x^*,y),\ G(x^*,y^*)\},$$

$$G_H(x,y) + G_H(x^*,y) \geqslant \max\{G(x,y) + G(x^*,y),\ \ G(x,y^*) + G(x^*,y^*)\},$$

$$G_H(x,y) - G_H(x^*,y) \geqslant \max\{|G(x,y) - G(x^*,y)|,\ \ |G(x,y^*) - G(x^*,y^*)|\}.$$

Равенство в каждом из этих неравенств (в третьем случае при условии $x \in \mathbb{R}^n_+$*) достигается только при выполнении хотя бы одного из условий*

$$G_H(x,y) \equiv G(x,y) \quad \textit{или} \quad G_H(x,y) \equiv G(x^*,y^*). \tag{2.1}$$

Доказательство. Поскольку области D и D^* в результате поляризации преобразуются в одно и то же множество, то достаточно доказать неравенства

$$G_H(x,y) \geqslant \max\{G(x,y),\, G(x^*,y)\}, \tag{2.2}$$

$$G_H(x,y) + G_H(x^*,y) \geqslant G(x,y) + G(x^*,y) \tag{2.3}$$

и

$$G_H(x,y) - G_H(x^*,y) \geqslant |G(x,y) - G(x^*,y)| \tag{2.4}$$

при $y \in D^+$, $x \in D$.

Сначала докажем (2.2) и (2.3). Интересно отметить, что доказательства этих сотношений взаимосвязаны и поэтому должны проводиться параллельно.

Считая $y \in D^+$ фиксированным, рассмотрим функцию

$$F(x) = [G_H(x,y) + G_H(x^*,y)] - [G(x,y) + G(x^*,y)]$$

при $x \in \mathbb{R}^n$. Легко видеть, что функции $G(x^*,y)$ и $G_H(x^*,y)$ — гармонические в окрестности любой точки x, $x \neq y$, такой, что $x^* \notin \partial D$ и $x^* \notin \partial D_H$ соответственно.

Отсюда и из определения функции Грина вытекает, что $F(x)$ гармоническая в окрестности каждой точки x такой, что $x \notin \partial D$ и, одновременно, $x^* \notin \partial D$ (не исключая и точку y).

Пусть

$$a = \inf F(x) \tag{2.5}$$

при $x \in \overline{\mathbb{R}}^n$. Предполагая, что (2.3) не выполняется, имеем

$$a < 0. \tag{2.6}$$

Функция $F(x)$ непрерывна в $\mathbb{R}^n$, возможно, за исключением множества точек на ∂D_H, иррегулярных для задачи Дирихле. Так как область D имеет регулярную границу, то нетрудно показать, что точка x_0 может быть иррегулярной точкой ∂D_H только при выполнении условий: $x_0 \in \partial D$ и $x_0^* \in \partial D$. В последнем случае $F(x_0) \geqslant 0$. Отсюда вытекает, что при условии (2.6) инфимум в (2.5) достигается в некоторой точке $x = \tilde{x}$. Поскольку $F(x) = F(x^*)$, то можем считать, что $\tilde{x} \in (\overline{\mathbb{R}})^+$.

Так как минимум гармонической функции достигается на границе, то хотя бы одна из точек $\tilde{x}$ и $\tilde{x}^*$ должна принадлежать ∂D. Если $\tilde{x} \in C D$ и $\tilde{x}^* \in C D$, то, в силу известных свойств функции Грина, $F(\tilde{x}) \geqslant 0$. Последнее неравенство показывает, что при выполнении условия (2.6) имеем:

$$\tilde{x}^* \in \partial D, \qquad \tilde{x} \in D$$

или

$$\tilde{x} \in \partial D, \qquad \tilde{x}^* \in D.$$

В первом из этих случаев $G(\tilde{x}^*, y) = 0$, $G_H(\tilde{x}^*, y) = 0$. Следовательно,

$$a = F(\tilde{x}) = G_H(\tilde{x}, y) - G(\tilde{x}, y).$$

На множестве $\overline{D^+}$ рассмотрим функцию

$$F_1(x) = G_H(x, y) - G(x, y),$$

гармоническую внутри D^+. В силу принципа минимума $F_1(x)$ достигает наименьшего значения только на $\partial(D^+)$; при этом, как показывают соотношения

$$F_1(\tilde{x}) = F(\tilde{x}) = a < 0,$$

указанный минимум отрицателен и строго меньше a. Если $x \in \partial D^+ \cap \partial D$, то, очевидно, $F_1(x) \geqslant 0$. Поэтому если отрицательный минимум функции $F_1(x)$ достигается в некоторой точке $\hat{x} \in \partial D^+$, то $\hat{x} \in D \cap H$.

Пусть $F_1(\hat{x}) = b$, тогда

$$b < F_1(\tilde{x}) = a < 0.$$

В точках $x \in H$ имеем $F(x) = 2F_1(x)$. Поэтому

$$F(\hat{x}) = 2F_1(\hat{x}) = 2b < b < a = F(\tilde{x}),$$

что противоречит предположению о том, что $\tilde{x}$ является точкой (глобального) минимума функции $F(x)$. Следовательно, неравенство (2.6) в рассматриваемом случае выполняться не может.

В оставшемся случае имеем $\tilde{x} \in \partial D$, $\tilde{x}^* \in D$, и значит $G(\tilde{x}, y) = 0$, $G_H(\tilde{x}^*, y) = 0$. Следовательно,

$$a = F(\tilde{x}) = G_H(\tilde{x}, y) - G(\tilde{x}^*, y).$$

Рассмотрим функцию

$$F_2(x) = G_H(x, y) - G(x^*, y),$$

гармоническую на множестве $(D^-)^*$, за исключением особенности в точке $x = y$, если $y \notin H$. В последнем случае $F_2(x) \to +\infty$ при $x \to y$. Следовательно, $F_2(x)$ достигает минимума только на границе $\partial((D^-)^*)$. Рассуждая так же, как и в предыдущем случае, вновь приходим к противоречию с предположением $a < 0$.

Следовательно, $F(x) \geqslant 0$ для всех $x \in \overline{\mathbb{R}}^n$. Таким образом, неравенство (2.3) доказано.

Для доказательства (2.2) достаточно показать, что рассмотренные выше функции $F_1(x)$ и $F_2(x)$ неотрицательны при $x \in (\overline{\mathbb{R}}^n)^+$. Как отмечалось выше, $F_1(x)$ и $F_2(x)$ могли бы достигать отрицательного минимума только при условии $x \in H$, но в последнем случае

$$F_1(x) = F_2(x) = (1/2)F(x) \geqslant 0$$

по выше доказанному. Таким образом, доказательство неравенства (2.2) завершено.

Докажем утверждение о случаях равенства. Предположим, что $G_H(x, y) = G(x, y)$ при некотором $x \in D^+ \setminus H$. Применяя принцип максимума и учитывая (2.2), заключаем, что последнее равенство выполняется в некоторой окрестности точки x и, следовательно, $G_H(x, y) \equiv G(x, y)$.

Если $x \in (D_H)^+ \setminus H$ и $G_H(x, y) = G(x^*, y)$, то точка x^* должна принадлежать D^- и $G_H(x, y) \equiv G(x^*, y)$ в некоторой окрестности точки x. Нетрудно видеть, что последнее соотношение может выполняться только при выполнении условий $D^+ = D^-$ и $y \in H$. Следовательно, при условии $x \notin H$ утверждение о случае равенства в (2.2) доказано.

Пусть $x \in D$. Обозначим через D^0 ту связную компоненту множества $D \cap D^*$, которая содержит точку x. Если таковой компоненты не существует, то $x \notin H$ и неравенство (2.3) равносильно неравенству (2.2), а для такого случая утверждение о равенстве уже доказано. Отметим, что при $x \in H$ указанная выше компонента заведомо существует.

Если в точке $x \in D^0$ в соотношении (2.3) имеет место знак равенства, то, согласно принципу максимума, соответствующее равенство имеет место для всех точек $x \in \overline{D^0}$. Очевидна следующая альтернатива: либо D симметрична относительно H, либо существует точка $z \in \partial D^0$ такая, что $z \in D \setminus H$ или $z \in D^* \setminus H$. В первом из указанных случаев доказывать нечего. Во втором случае утверждение о равенстве в (2.3) вновь свелось к утверждению о равенстве в (2.2) при дополнительном условии $x \notin H$. Следовательно, утверждение о равенстве в (2.3) полностью доказано.

При $x \in H$ выполняются равенства: $F_1(x) = F_2(x) = (1/2)F(x)$, где функции F_1, F_2 и F определены выше. Поэтому, доказав утверждение о случае равенства в (2.3) при $x \in H$, мы тем самым доказали и утверждение о случае равенства в (2.2) при таких x. Первые два неравенства теоремы вместе с утверждениями о случаях достижения равенства в них доказаны. Третье неравенство доказывается по той же схеме, при этом используется уже доказанное соотношение (2.2) и очевидное при $x \in H$ равенство $G_H(x,y) - G_H(x^*,y) = G(x,y) - G(x^*,y) = 0$. •

Следствие 1. *В условиях теоремы* 1

$$\frac{\partial G_H(x,y)}{\partial x_1} \geqslant \left|\frac{\partial G(x,y)}{\partial x_1}\right| \tag{2.7}$$

для всех $x \in H \cap D$, $x \neq y$. *Равенство в* (2.7) *достигается только при выполнении хотя бы одного из условий* (2.1).

Доказательство. Функции

$$F^{\pm}(x) = [G_H(x,y) - G_H(x^*,y)] \pm [G(x,y) - G(x^*,y)]$$

— гармонические в некоторой окрестности $\mathcal{U}$ точки $x \in H \cap D$, $x \neq y$. Если ни одно из условий (2.1) не выполняется, то по теореме 1 $F^{\pm}(x) > 0$ для всех $x \in \mathcal{U}^+$. Применяя к функции $F^{\pm}(x)$ лемму Хопфа, см., например, [9], при $x \in D \cap H$ имеем

$$\frac{\partial F^{\pm}(x)}{\partial x_1} = 2\left(\frac{\partial G_H(x,y)}{\partial x_1} \pm \frac{\partial G(x,y)}{\partial x_1}\right) > 0,$$

и требуемое утверждение доказано. •

Приведем формулировки аналогичных утверждений о гармонической мере, доказательства которых полностью повторяют доказательства предыдущих теоремы и следствия.

Теорема 2. *Пусть область $D \subset \overline{\mathbb{R}^n}$ симметрична относительно гиперплоскости H, область D_1 вложена в D, и пусть E — замкнутое множество, состоящее из регулярных точек $\partial D \cap \partial D_1$, $P_H E$ — результат поляризации E относительно H. Обозначим через $\omega(x, E)$ и $\omega(x, P_H E)$ гармонические меры соответственно множеств E и $P_H E$ относительно областей D_1 и $P_H D_1$. Тогда для всех $x \in (P_H D_1)^+$*

$$\omega(x, P_H E) \geqslant \max\{\omega(x, E), \omega(x^*, E)\}, \tag{2.8}$$

$$\omega(x, P_H E) + \omega(x^*, P_H E) \geqslant \omega(x, E) + \omega(x^*, E), \tag{2.9}$$

$$\omega(x, P_H E) - \omega(x^*, P_H E) \geqslant |\omega(x, E) - \omega(x^*, E)|. \tag{2.10}$$

Если область D_1 имеет регулярную границу и не симметрична относительно H, то при $x \in (P_H D_1)^+$ знак равенства в соотношениях (2.8), (2.9), а при $x \in (P_H D_1)^+ \setminus H$ и в соотношении (2.10) достигается только в тех случаях, когда

$$E = P_H E \text{ и } D_1 = P_H D_1 \quad \text{или} \quad E^* = P_H E \text{ и } D_1^* = P_H D_1. \tag{2.11}$$

Если же D_1 симметрична относительно H, то в (2.9) имеем тождественное равенство. Равенство в (2.8) выполняется при всех $x \in H$. При $x \in (P_H D_1)^+ \setminus H$ равенство в (2.8) и (2.10) достигается при тех же условиях, что и в несимметричном случае.

Следствие 2. *В условиях теоремы 2 при всех $x \in H \cap D$ выполняется неравенство*

$$\frac{\partial \omega(x, P_H E)}{\partial x_1} \geqslant \left| \frac{\partial \omega(x, E)}{\partial x_1} \right|, \tag{2.12}$$

равенство в котором достигается только при выполнении условий (2.11).

Неравенства (2.7) и (2.12) могут быть полезными при изучении задач об интегрируемости градиентов функций Грина и гармонических мер (см. [10]). В связи с этим было бы интересно доказать или опровергнуть следующее предположение.

Гипотеза 1. *При условиях следствий* 1 *и* 2 *выполняются неравенства*

$$|\nabla G_H(x,y)| \geqslant |\nabla G(x,y)|,$$

$$|\nabla \omega(x, P_H E)| \geqslant |\nabla \omega(x, E)|.$$

Из полученных выше результатов вытекает справедливость предполагаемых неравенств при условии, что $x \in H$ достаточно близко к границе рассматриваемой области, а сама граница является достаточно гладкой.

Традиционным объектом исследования в теории симметризации являются неравенства для интегральных средних различных типов. Многие из таких неравенств были получены на основе метода функций Бернстайна [2, 11]. Доказанные выше теоремы сразу же приводят к соответствующим аналогам результатов в [2, 11] для поляризации.

Во всех рассматриваемых ниже случаях $m_k(\cdot)$ обозначает меру Лебега измеримых множеств в $\mathbb{R}^k$, а также соответствующую меру на k-мерных линейных многообразиях или на k-мерных сферах в $\mathbb{R}^n$, $n > k$.

Теорема 3. *Пусть* D *— область в* $\overline{\mathbb{R}^n}$, *и пусть* $G(x,y)$ *и* $G_H(x,y)$ *— функции Грина, определенные в теореме* 1, $y \in D^+$. *Пусть* Σ *—* k*-мерная поверхность,* $1 \leqslant k \leqslant n$, *симметричная относительно* H *и такая, что существуют рассматриваемые ниже интегралы.*

Тогда для любой выпуклой неубывающей функции $\Phi : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ *выполняется неравенство*

$$\int\limits_{\Sigma} \Phi(G(x,y))\,dm_k(x) \leqslant \int\limits_{\Sigma} \Phi(G_H(x,y))\,dm_k(x). \tag{2.13}$$

Если $\Sigma \cap D \neq \varnothing$ *и* Φ *не сводится к константе (при рассматриваемых значениях аргумента), то равенство в* (2.13) *достигается только в случае* $G_H(x,y) \equiv G(x,y)$ *при* $y \in \mathbb{R}^n_+$ *и только в случаях* $G_H(x,y) \equiv G(x,y)$ *или* $G_H(x^*,y) \equiv G(x,y)$ *при* $y \in H$.

Теорема 4. *Пусть выполняются условия теоремы* 2 *и пусть* Σ *и* Φ *такие же, как в теореме* 3. *Тогда*

$$\int\limits_{\Sigma} \Phi(\omega(x,E))\,dm_k(x) \leqslant \int\limits_{\Sigma} \Phi(\omega(x,P_H E))\,dm_k(x). \tag{2.14}$$

Пусть $\Sigma \cap D \neq \varnothing$ *и* Φ *не сводится к константе. Если* D_1 *не симметрична относительно* H *или если* D_1 *симметрична относительно* H, *но* Φ *не сводится к линейной функции на рассматриваемых множествах значений функций* $\omega(x, E)$ *и* $\omega(x, P_H E)$, *то равенство в* (2.14) *достигается только в тех случаях, когда* $E = P_H E$ *и* $D_1 = P_H D_1$ *или* $E^* = P_H E$ *и* $D_1^* = P_H D_1$.

Если же D_1 *симметрична, а* Φ *— линейная функция, то для любого множества* E *в* (2.14) *имеет место знак равенства.*

Доказательство сформулированных утверждений проводится по следующей простой схеме. Пусть $\Sigma^{(0)} = \Sigma \cap H$ и пусть $\Sigma^{(+1)}$ и $\Sigma^{(-1)}$ — части многообразия Σ, лежащие „выше" и „ниже" H соответственно. Тогда неравенство (2.13), например, эквивалентно соотношению

$$\int\limits_{\Sigma^{(+1)}} [\Phi(G(x,y)) + \Phi(G(x^*,y))]\, dm_k(x) \leqslant \int\limits_{\Sigma^{(+1)}} [\Phi(G_H(x,y)) + \Phi(G_H(x^*,y))]\, dm_k(x).$$

Справедливость последнего неравенства вытекает из теоремы 1 и следующего элементарного факта о выпуклых неубывающих функциях.

Пусть a_1, a_2, b_1, $b_2 \in \mathbb{R}$ таковы, что

$$a_1 + b_1 \geqslant a_2 + b_2 \quad \text{и} \quad b_1 > \max\{a_2, b_2\}.$$

Тогда для любой выпуклой неубывающей функции $\Phi(t)$ выполняется неравенство

$$\Phi(a_1) + \Phi(b_1) \geqslant \Phi(a_2) + \Phi(b_2). \tag{2.15}$$

Если Φ на промежутке $[a_1, b_1]$ не сводится к константе, то равенство в (2.15) может иметь место только при условии $a_1 + b_1 = a_2 + b_2$.

§3. Симметризация

Как отмечалось выше, Волонтис ввел преобразование поляризации плоских конденсаторов в работе [3], где применил его для доказательства принципа симметризации Полиа. В. Н. Дубинин, развивая собственный подход, систематически использовал поляризацию в задачах, связанных с k-мерными симметризациями в пространстве $\mathbb{R}^n$ [12, 5]. В случае произвольного k, $1 \leqslant k \leqslant n-1$, k-мерные штейнеровская и сферическая симметризации изучались независимо Б.Е. Левицким [13] и Ю. Сарвасом [14].

Ниже приводятся определения k-мерных симметризаций, связанные с подходящей координатной системой. В этом мы будем следовать работе [15], опуская для упрощения некоторые подробности, касающиеся измеримости рассматриваемых множеств. Изложение, менее зависящее от выбора координатной системы, приведено в [5].

k-мерная симметризация Штейнера связана с представлением пространства $\mathbb{R}^n$ в виде декартова произведения $\mathbb{R}^n = \mathbb{R}^k \times \mathbb{R}^m$, где $1 \leqslant k \leqslant n-1$ и $m = n-k$. Точки $\mathbb{R}^n$ будем записывать в виде (x, y), где $x \in \mathbb{R}^k$, $y \in \mathbb{R}^m$. Для произвольного множества $\Omega \subset \mathbb{R}^n$ и $y \in \mathbb{R}^m$ через $\Omega(y)$ обозначаем „y-слой“ Ω, т.е.

$$\Omega(y) = \{x \in \mathbb{R}^k : (x, y) \in \Omega\}.$$

Под k-мерной симметризацией Штейнера открытого или замкнутого множества Ω понимаем множество

$$\Omega^{\#} = \{(x, y) \in \mathbb{R}^n : x \in \Omega^{\#}(y),\ y \in \mathbb{R}^m\},$$

где через $\Omega^{\#}(y)$ обозначена соответствующая k-мерная симметризация Шварца множества $\Omega(y)$ (см., например, [1, 5, 15]).

Далее мы будем говорить, что открытое множество Ω и его k-мерная симметризация Штейнера $\Omega^{\#}$ *по существу совпадают*, если $\Omega^{\#}$ является параллельным переносом множества Ω на некоторый вектор, ортогональный подпространству $\mathbb{R}^m$. В противном случае говорим, что указанные множества *по существу не совпадают* или *различны*. Аналогичную терминологию будем использовать также и в других случаях: для других конфигураций и для других симметризационных преобразований.

Для того чтобы определить k-мерную сферическую симметризацию при $1 \leqslant k \leqslant n-2$, представим $z \in \mathbb{R}^n$ в виде $z = (\zeta, w)$, где $\zeta \in \mathbb{R}^{k+1}$ и $w \in \mathbb{R}^{m-1}$, $m = n-k$. Для каждого w введем сферическую координатную систему в $\mathbb{R}^{k+1} \times \{w\}$, полагая $r = |\zeta|$ и считая, что центры сфер S^k расположены вдоль положительной x_1-полуоси пространства $\mathbb{R}^{k+1}$. Пусть $\mathbb{Z} = \{z \in \mathbb{R}^n : r = 0\}$. Представим точку $z \in \mathbb{R}^n \setminus \mathbb{Z}$ в виде $z = (x, r, w)$, где $x \in S^k$. Считая r и w фиксированными, будем рассматривать множества

$$\Omega(r, w) = \{x \in S^k : (x, r, w) \in \Omega\}.$$

Под k-мерной сферической симметризацией Ω понимаем множество

$$\Omega^{\#} = (\mathbb{Z} \cap \Omega) \cap \{(x, r, w) \in \mathbb{R}^n : x \in \Omega^{\#}(r, w),\ r > 0,\ w \in \mathbb{R}^{m-1}\},$$

где через $\Omega^{\#}(r,w)$ обозначена „сферическая шапочка" с центром в точке $(1,0,\dots,0) \in \mathbb{R}^{k+1}$, имеющая такую же сферическую m_k-меру, как и множество $\Omega(r,w)$.

Введем метрику, по отношению к которой будем рассматривать сходимость открытых ограниченных множеств. Пусть $B^n = \{x : |x| < 1\}$. Если $A \subset \overline{\mathbb{R}}^n$ и $r > 0$, то

$$rA = \{rx : x \in A\}, \qquad A + rB^n = \bigcup_{x \in A} \{x + rB^n\},$$

где

$$x + rB^n = \{y : y - x \in rB^n\} \quad \text{при } x \in \mathbb{R}^n.$$

На множестве $\mathcal{O}$ всех открытых ограниченных множеств из $\mathbb{R}^n$ определим функцию

$$d(A,B) = \inf\{r > 0 : \partial A \subset \partial B + rB^n,\ \partial B \subset \partial A + rB^n\}.$$

Под сходимостью последовательности множеств $D_j \in \mathcal{O}$ к множеству $D \in \mathcal{O}$ понимаем сходимость в метрике $d(\cdot,\cdot)$. Более точно, $\lim_{j\to\infty} D_j = D$ тогда и только тогда, когда $\lim_{j\to\infty} d(D_j, D) = 0$ и, кроме того, в каждой связной компоненте D' множества D найдется точка x' такая, что $x' \in D_j \cap D'$ для всех достаточно больших номеров j.

Замечание. В данной работе используется сходимость последовательностей открытых множеств в отличие от обычно используемой в таких случаях сходимости последовательностей компактов (ср. [5]).

Сформулируем в удобной для дальнейшего форме некоторые результаты геометрического характера. Для компактов аналогичные утверждения получены в работах [3, 14, 5]. Мы опускаем доказательства, которые приводятся в работе [8] и которые только техническими деталями, связанными с использованием метрики $d(\cdot,\cdot)$, отличаются от доказательств в [3, 14, 5].

Лемма 1 (ср. Сарвас, [14]). *Пусть $D \in \mathcal{O}$ и пусть $D^{\#}$ — k-мерная симметризация Штейнера (k-мерная сферическая симметризация) D. Тогда существует пара $(k-1)$-мерных симметризаций S_1 и S_2 такая, что*

$$D^{\#} = \lim_{j\to\infty} (S_1 \circ S_2)^j (D),$$

где $(S_1 \circ S_2)^j$ *означает* j*-ю итерацию суперпозиции* $S_1 \circ S_2$.

Следующая лемма при $n = 2$ по существу принадлежит Волонтису (см. [3, лемма 2]), в случае $n > 2$ это утверждение доказал и неоднократно использовал В. Н. Дубинин (см. доказательство теоремы 3 в [5]).

Лемма 2. *Пусть* $D, D_0 \in \mathcal{O}$, $\overline{D}_0 \subset D$ *и пусть* $D^\#$ *— 1-мерная симметризация Штейнера или 1-мерная сферическая симметризация* D. *Тогда существуют компакт* $K \subset D^\#$ *и последовательность поляризаций* P_j, $j = 1, 2, \dots$ *такие, что*

$$K \supset P_j D_{j-1}$$

для всех достаточно больших номеров j. *Здесь* $D_j = P_j D_{j-1}$ *при* $j \geqslant 1$.

При этом, в случае симметризации Штейнера, все гиперплоскости, определяющие поляризации P_j, *ортогональны* x_1*-оси, а в случае сферической симметризации все такие гиперплоскости проходят через начало координат.*

Последняя из необходимых нам геометрических лемм будет использоваться при доказательстве утверждений о случаях равенства в функциональных неравенствах, связанных с симметризацией.

Лемма 3. *Пусть* $D \in \mathcal{O}$ *и пусть* $D^\#$ *—* k*-мерная симметризация Штейнера или* k*-мерная сферическая симметризация* D. *Если* D *и* $D^\#$ *существенно различны, тогда найдется гиперплоскость* H *такая, что*

$$D \neq P_H D,$$

где $P_H D$ *— поляризация* D *относительно* H.

При этом в случае симметризации Штейнера H *содержит подпространство* $\mathbb{R}^m$, *а в случае сферической симметризации* H *проходит через подпространство* $\{r = 0\} \times \mathbb{R}^{m-1}$. *Кроме того, в каждом из рассматриваемых случаев*

$$D^\# = (P_H D)^\#.$$

Основными результатами этого параграфа являются теоремы 5 и 6 о выпуклых интегральных средних. В случае 1-мерных симметризаций и без утверждений о случаях равенства эти теоремы были доказаны в работе А. Бернстайна и Б. А. Тейлора [11]. Для двумерного случая соответствующие теоремы единственности получены М. Эссеном и Д. Шиа [16].

Теорема 5. *Пусть $\Omega^\#$ — k-мерная симметризация Штейнера или k-мерная сферическая симметризация области $\Omega \subset \mathbb{R}^n$ (считаем, что симметризации связаны с соответствующими представлениями пространства $\mathbb{R}^n$, указанными в начале этого раздела). Через G и $G^\#$ обозначим функции Грина областей Ω и $\Omega^\#$ с полюсами в точках y и $y^\#$ соответственно. Здесь $y^\#$ — симметризация точечного множества $\{y\}$.*

Пусть Σ обозначает плоскость $\mathbb{R}^k(y) = \{(x,y) : x \in \mathbb{R}^k\}$ в случае симметризации Штейнера или сферу $S^k(r,w) = \{(x,r,w) : x \in S^k\}$ в случае сферической симметризации.

Для любой выпуклой неубывающей функции $\Phi : \mathbb{R} \mapsto \mathbb{R}$ выполняется неравенство

$$\int\limits_\Sigma \Phi(G(x,y))\,dm_k(x) \leqslant \int\limits_\Sigma \Phi(G^\#(x,y^\#))\,dm_k(x). \tag{3.1}$$

Если $\Sigma \cap \Omega \neq \varnothing$ и Φ не сводится к константе, то равенство в (3.1) достигается только в том случае, когда конфигурации $\{\Omega,\, y\}$ и $\{\Omega^\#,\, y^\#\}$ по существу совпадают.

В следующей теореме под k-полосой понимаем любую область $\Omega \subset \mathbb{R}^n = \mathbb{R}^k \times \mathbb{R}^m$, каждый y-слой которой или пуст или совпадает с $\mathbb{R}^k$, т.е. $\Omega(y) = \varnothing$ или $\Omega(y) = \mathbb{R}^k$. Аналогично под k-цилиндром понимаем область $\Omega \subset \mathbb{R}^n = S^k \times \mathbb{R}_0 \times \mathbb{R}^{m-1}$, для которой $\Omega(r,w) = \varnothing$ или $\Omega(r,w) = S^k$ при любых $r \geqslant 0$, $w \in \mathbb{R}^{m-1}$.

Теорема 6. *Пусть Ω, $\Omega^\#$, Σ и Φ такие же, как в теореме 5. Предположим дополнительно, что $\Omega \subset D$, где D — k-полоса в случае симметризации Штейнера и k-цилиндр в случае сферической симметризации. Пусть $E \subset \partial\Omega \cap \partial D$ — замкнутое множество регулярных точек $\partial\Omega$, $E^\#$ — соответствующая симметризация E. Пусть $\omega(x,E)$ и $\omega(x,E^\#)$ — гармонические меры множеств E и $E^\#$ относительно областей Ω и $\Omega^\#$ соответственно.*

Тогда

$$\int\limits_\Sigma \Phi(\omega(x,E))\,dm_k(x) \leqslant \int\limits_\Sigma \Phi(\omega(x,E^\#))\,dm_k(x). \tag{3.2}$$

Пусть $\Sigma \cap \Omega \neq \varnothing$ и Φ не сводится к константе. Если $\Omega \neq D$ или если $\Omega = D$, но Φ не сводится к линейной функции, то равенство в (3.2) достигается только в том случае, когда конфигурации $\{\Omega,\, E\}$ и $\{\Omega^\#,\, E^\#\}$ по существу совпадают.

Если $\Omega = D$ и Φ — линейная функция, то в (3.2) имеет место знак равенства.

Следствие 3. *В предположениях теоремы 5*

$$G(x,y) \leqslant G(x^{\#},y^{\#}). \tag{3.3}$$

Если $x^{\#}$, $y^{\#} \in \Omega^{\#}$, то равенство здесь достигается только в том случае, когда конфигурации $\{\Omega,\ x,\ y\}$ и $\{\Omega^{\#},\ x^{\#},\ y^{\#}\}$ по существу совпадают.

Следствие 4. *В предположениях теоремы 6*

$$\omega(x,E) \leqslant \omega(x^{\#},E^{\#}). \tag{3.4}$$

Пусть $x^{\#} \in \Omega^{\#}$. Если в случае сферической симметризации исключить из рассмотрения ситуацию $\Omega = D$, $x = (y,r,w)$, где $y \in S^k$, $w \in \mathbb{R}^m$, $r = 0$, то равенство в (3.4) *имеет место лишь при совпадении по существу конфигураций $\{\Omega,\ E,\ x\}$ и $\{\Omega^{\#},\ E^{\#},\ x^{\#}\}$.*

В исключительном случае в (3.4) *имеет место знак равенства для любого множества E.*

Доказательства неравенств (3.1) и (3.2) основаны на применении теорем 3 и 4 и лемм 1 и 2. При этом используется тот факт, что сходимость в метрике $d(\cdot,\cdot)$ последовательности открытых множеств порождает сходимость соответствующих последовательностей функций Грина и последовательностей гармонических мер. Неравенства (3.3) и (3.4) вытекают непосредственно из (3.1) и (3.2).

Для доказательства утверждений о случаях равенства в теоремах 5 и 6, а также в их следствиях, нужно на первом шаге применить лемму 3 и утверждение о случаях равенства в теоремах 3 и 4, а затем использовать уже доказанные (нестрогие) неравенства (3.1)–(3.4).

§4. Метрика Пуанкаре

В этом разделе будем рассматривать области D на расширенной плоскости $\overline{\mathbb{R}}^2$, которую отождествляем с комплексной сферой $\overline{\mathbb{C}}$. При этом мы используем обычные обозначения: $z = x + iy$, $\overline{z} = x - iy$, $w = u + iv$, $U_r(z_0) = \{z : |z - z_0| < r\}$, $U_r = U_r(0)$, $U = U_1$, $\mathbb{T}_r = \partial U_r$ и т.д.

Всюду ниже считаем, что рассматриваемые исходные области имеют более двух граничных точек, следовательно, они имеют единичный круг U в качестве универсальной накрывающей поверхности. Пусть $\Pi : U \mapsto D$ — универсальное накрывающее отображение, тогда метрика Пуанкаре λ_D области D определяется уравнением

$$\lambda_D(\Pi(z))|\Pi'(z)| = 1/(1-|z|^2) \qquad (z \in U,\ w = \Pi(z)). \tag{4.1}$$

Хорошо известно, что метрика Пуанкаре может быть охарактеризована как максимальное решение уравнения

$$\Delta \log \lambda = 4\lambda^2 \tag{4.2}$$

в области D [17, с. 13].

В работе [18] А. Вейтсман рассмотрел некоторые вопросы, связанные с изменением метрики Пуанкаре при круговой симметризации. В частности, он получил решение задачи В. Хеймана [19, с. 32] об обобщении принципа симметризации на универсальные накрывающие.

Здесь мы изучим задачи, связанные с изменением метрики Пуанкаре при поляризации, из доказанных нами утверждений следуют результаты Вейтсмана. Отметим, что наш подход позволяет доказать, в дополнение к результатам в [18], и соответствующие утверждения о единственности в задаче Хеймана.

Наши результаты о метрике Пуанкаре вытекают из следующей теоремы.

Теорема 7. *Пусть D — открытое множество на сфере $\overline{\mathbb{C}}$, имеющее более двух граничных точек, $P_H D$ — поляризация D относительно вещественной оси.*

Пусть B, C — вещественные константы ($B \leqslant \infty$, $C < \infty$, $C \leqslant B$) и пусть $g : \mathbb{R} \mapsto \mathbb{R}$ — неотрицательная неубывающая и выпуклая функция. Если $u \in C^2(D)$ и $v \in C^2(P_H D)$ удовлетворяют условиям

$$\begin{cases} \Delta u = g(u) \\ u(z) = B \quad \text{при } z \in \overline{\mathbb{C}} \setminus D \\ \lim\limits_{\substack{z\to\zeta \\ \forall \zeta \in \partial D}} u(z) = B, \end{cases} \tag{4.3}$$

$$\begin{cases} \Delta v \geqslant g(v) \\ v(z) = C \quad \text{при } z \in \overline{\mathbb{C}} \setminus (P_H D) \\ \limsup\limits_{\substack{z\to\zeta \\ \forall \zeta \in \partial (P_H D)}} v(z) \leqslant C, \end{cases} \tag{4.4}$$

тогда для всех z таких, что $\operatorname{Im} z \geqslant 0$, *выполняются неравенства*

$$v(z) \leqslant \min\{u(z), u(\overline{z})\}. \tag{4.5}$$

$$v(z) + v(\overline{z}) \leqslant u(z) + u(\overline{z}). \tag{4.6}$$

Если в дополнение к условиям теоремы $B = C < \infty$ на множестве $P_H D$ выполняется равенство $\Delta v = g(v)$ и

$$\lim_{\substack{z \to \zeta \\ \forall \zeta \in \partial(P_H D)}} v(z) = B,$$

то

$$v(\overline{z}) - v(z) \geqslant |u(\overline{z}) - u(z)|. \tag{4.7}$$

Выделим в отдельную теорему утверждение о случаях равенства в (4.5), (4.6) и (4.7). Для удобства формулировок далее исключаем из рассмотрения случай тривиальных решений $u \equiv v \equiv B$, соответствующих условиям $B = C$, $g(B) = 0$.

Теорема 8. *Пусть выполняются условия теоремы 7. Пусть $z \in D$ и пусть Δ_1 и Δ_2 — связные компоненты множества D, содержащие точки z и $\overline{z}$ соответственно. Пусть Δ_1' и Δ_2' — аналогичные связные компоненты множества $P_H D$ (некоторые из указанных компонент Δ_j и Δ_j' могут быть пустыми множествами).*

Тогда при условии $\operatorname{Im} z \geqslant 0$ *равенство в* (4.6) *достигается только в случаях*

$$\Delta_1' = \Delta_1, \ \Delta_2' = \Delta_2 \quad \textit{и} \quad v(z) \equiv u(z) \ \textit{в} \ \Delta_1 \cup \Delta_2, \tag{4.8}$$

или

$$\Delta_1' = \Delta_2^*, \ \Delta_2' = \Delta_1^* \quad \textit{и} \quad v(\overline{z}) \equiv u(z) \ \textit{в} \ \Delta_1 \cup \Delta_2. \tag{4.9}$$

Если $\operatorname{Im} z > 0$, *то равенства $v(z) = u(z)$ и $v(z) = u(\overline{z})$ имеют место только при условиях $\Delta_1 = \Delta_1'$, $v(z) \equiv u(z)$ в Δ_1 и $\Delta_1 = (\Delta_2')^*$, $v(z) \equiv u(\overline{z})$ в Δ_1 соответственно; если* $\operatorname{Im} z = 0$, *то равенство $v(z) = u(z)$ имеет место только при выполнении хотя бы одного из указанных условий.*

Если $\operatorname{Im} z > 0$, *то равенства $v(\overline{z}) - v(z) = u(\overline{z}) - u(z)$ и $v(\overline{z}) - v(z) = u(z) - u(\overline{z})$ имеют место только при выполнении соотношений* (4.8) *и* (4.9) *соответственно.*

Следствие 5. *Пусть выполняются условия теоремы 7, при которых имеет место соотношение* (4.7), *и пусть* $z = x \in \mathbb{R} \cap D$, $v \not\equiv \mathrm{const}$. *Тогда*

$$-\frac{\partial v(x)}{\partial y} \geqslant \left|\frac{\partial u(x)}{\partial y}\right|. \tag{4.10}$$

Пусть $\Delta \ni x$ *и* $\Delta' \ni x$ *— соответствующие связные компоненты множеств* D *и* $P_H D$. *Равенства* $\frac{\partial v(x)}{\partial y} = \frac{\partial u(x)}{\partial y}$ *и* $\frac{\partial v(x)}{\partial y} = -\frac{\partial u(x)}{\partial y}$ *имеют место только при выполнении условий* $\Delta' = \Delta$ *или* $\Delta' = \Delta^*$ *соответственно. Равенство* $\frac{\partial v(x)}{\partial y} = 0$ *имеет место только в случае* $\Delta^* = \Delta$.

Доказательства теорем 7 и 8 основаны на применении хорошо известных вариантов принципа максимума для решений дифференциальных неравенств. Для удобства читателей приведем некоторые формулировки, ограничиваясь достаточными для наших целей случаями.

Рассмотрим уравнение

$$\Delta u = g(u), \tag{4.11}$$

где g — неотрицательная неубывающая и выпуклая функция. Доказательство приводимой ниже леммы о существовании решений уравнения (4.11) повторяет доказательство теоремы 4.1 из работы [17].

Пусть

$$G_r(z,\zeta) = \log\left|\frac{r^2 - z\overline{\zeta}}{r(z-\zeta)}\right|$$

— функция Грина круга U_r, $r > 0$. Пусть

$$A(r) = \max_{|z|<r} \iint\limits_{U_r} G_r(z,\zeta)\, dm_\zeta.$$

Лемма 4. *Пусть* g *— такая же, как в* (4.11), $f \in C(\mathbb{T}_r)$ *и пусть* $M_r = \max\limits_{|\zeta|=r} f(\zeta)$. *Если* $g'(M_r - 0) = c < \infty$ *и*

$$(2\pi)^{-1} c A(r) < 1,$$

то существует и единственно решение $v(z)$ *уравнения* (4.11) *такое, что* $v \in C^2(U_r) \cap C(\overline{U}_r)$ *и* $v \equiv f$ *на* $\mathbb{T}_r$.

Лемма 5. *Пусть функции $u_1, u_2 \in C^2(D)$ удовлетворяют в области $D \subset \overline{\mathbb{C}}$ условиям: $\Delta u_1 = g(u_1)$, $\Delta u_2 \geqslant g(u_2)$. Если*

$$\liminf_{z\to\zeta} u_1(z) \geqslant \limsup_{z\to\zeta} u_2(z)$$

для всех $\zeta \in \partial D$, то $u_1(z) \geqslant u_2(z)$ для всех $z \in D$.

Доказательство. Пусть $F(z) = u_1(z) - u_2(z)$. Предположим, что

$$\inf_{z\in D} F(z) = a < 0. \tag{4.12}$$

Выберем последовательность $z_k \to z_0$, минимизирующую $F(z)$. Из условий леммы и сделанного предположения вытекает, что $z_0 \in D$. Тогда

$$\Delta F(z_0) \leqslant g(u_1(z_0)) - g(u_2(z_0)) \leqslant 0. \tag{4.13}$$

Строгое неравенство в (4.13) противоречит предположению о том, что $F(z)$ имеет глобальный минимум в точке z_0.

Если же в (4.13) имеем знак равенства, то $g(t)$ равна константе $g(u_2(z_0))$ при $t \leqslant u_2(z_0)$. Отсюда, учитывая (4.12), заключаем, что $\Delta F(z) \leqslant 0$ в некоторой окрестности точки z_0. Следовательно, $F(z) \equiv a$ в указанной окрестности, как функция, принимающая минимальное значение внутри области супергармоничности. Таким образом, множество $\{z : F(z) = a\}$ — открытое, что легко приводит к противоречию с условиями леммы. •

Лемма 6 (принцип максимума, см. [20]). *Пусть $c(z)$ ограничена на $\bar{D}$ и пусть функция $u = u(z) \leqslant 0$, $u \in C^2(D)$ является решением дифференциального неравенства*

$$\Delta u + c(z) u \geqslant 0.$$

Если $u(z_0) = 0$ при некотором $z_0 \in D$, то $u \equiv 0$ в D.

Будем использовать также следующий вариант леммы Хопфа.

Лемма 7 (лемма Хопфа, [21]). *Пусть $U_r(z_0) \subset D$, $z_1 \in \partial D \cap \partial U_r(z_0)$ и пусть функция $u = u(z)$ удовлетворяет условиям принципа максимума, непрерывна* *на множестве* $D \cup \{z_1\}$ *и* $u(z_1) = 0$. *Тогда если* $u \not\equiv 0$ *в* D, *то* $\frac{\partial u(z_1)}{\partial n} > 0$, *где* $\frac{\partial u}{\partial n}$ *— производная относительно внешней нормали к окружности* $\partial U_r(z_0)$.

Для доказательства теоремы 8 потребуется обобщение теоремы 7 на случай решений u и v, имеющих заданные граничные значения (не обязательно равные константам B и C, как в (4.3) и (4.4)). Мы будем использовать только следующую лемму о решениях в круге U_r, доказательство которой (как и доказательство аналогичного утверждения для произвольных областей) полностью повторяет доказательство теоремы 7, приводимое ниже.

Лемма 8. *Пусть* $u_k, v_k \in C^2(U_{r_0}) \cap C(\overline{U}_{r_0})$, $k = 1, 2$, *удовлетворяют соотношениям*

$$\Delta u_k = g(u_k), \qquad u_k(r_0 e^{i\varphi}) = p_k(\varphi);$$
$$\Delta v_k \geqslant g(v_k), \qquad v_k(r_0 e^{i\varphi}) = q_k(\varphi).$$

Если

$$p_1(\varphi) \leqslant \min\{q_1(\varphi), q_2(\varphi)\},$$
$$p_1(\varphi) + p_2(\varphi) \leqslant q_1(\varphi) + q_2(\varphi)$$

для всех $\varphi \in [0, \pi)$, *то*

$$u_1(z) \leqslant \min\{v_1(z),\ v_2(z)\},$$
$$u_1(z) + u_2(z) \leqslant v_1(z) + v_2(z)$$

для всех $z \in U_{r_0}$.

Следствие 6. *Пусть* u, v, p *и* q *такие же, как* u_1, v_1, p_1 *и* q_1 *в лемме* 8. *Если*

$$p(\varphi) \leqslant \min\{q(\varphi),\ q(-\varphi)\},$$
$$p(\varphi) + p(-\varphi) \leqslant q(\varphi) + q(-\varphi)$$

для всех $\varphi \in [0, \pi]$, *то функции* u *и* v *при всех* $z \in (U_{r_0})^+$ *удовлетворяют неравенствам* (4.5) *и* (4.6).

Доказательство теоремы 7. Докажем неравенства (4.5) и (4.6). Следуя схеме доказательства теоремы 1, рассмотрим функцию

$$F(z) = [u(z) + u(\overline{z})] - [v(z) + v(\overline{z})], \qquad z \in \overline{\mathbb{C}}.$$

Предполагая, что (4.6) не выполняется, имеем

$$\inf_{z \in \overline{\mathbb{C}}} F(z) = a < 0. \tag{4.14}$$

Выберем последовательность $z^{(n)} \to z_0 \in \overline{\mathbb{C}}$, минимизирующую $F(z)$, т.е. $F(z^{(n)}) \to a$ при $n \to \infty$. Из условий теоремы вытекает, что функция $F(z)$ может иметь отрицательный инфимум только в том случае, когда хотя бы одна из точек z_0 и $\overline{z}_0$ принадлежит множеству D. Так как $F(z) = F(\overline{z})$, то можем считать, что $\operatorname{Im} z_0 \geqslant 0$.

Исследуем возможные случаи местоположения точки z_0.

(1) Если $z_0 = x_0 \in \mathbb{R} \cap D$, то, в соответствии с условиями теоремы и предположением (4.14), имеем

$$\Delta F(x_0) = 2[\Delta u(x_0) - \Delta v(x_0)] \leqslant 2[g(u(x_0)) - g(v(x_0))] \leqslant 0. \tag{4.15}$$

Строгое неравенство в (4.15) означает (строгую) супергармоничность $F(z)$ в окрестности точки z_0 и легко приводит к противоречию с предположением (4.14). Если же в обоих неравенствах в (4.15) имеем знак равенства, то $g(t)$ равна константе $g(v(x_0))$ при всех $t \leqslant v(x_0)$. Отсюда, учитывая (4.14), заключаем, что $\Delta F(z) \leqslant 0$ в некоторой окрестности точки x_0. Следовательно, $F(z) \equiv a$ в указанной окрестности.

Случай $z_0 = \infty$ сводится к только что рассмотренному с помощью обычной замены $\zeta = 1/z$.

Как показывает проведенный анализ, далее мы можем считать, что точка глобального минимума z_0 лежит в верхней полуплоскости, т.е. $\operatorname{Im} z_0 > 0$.

(2) Рассмотрим случай $z_0 \in D$, $\overline{z}_0 \notin D$ (к нему сводится и случай $\overline{z}_0 \in D$, $z_0 \notin D$). В соответствии со сделанными предположениями

$$0 > a = \lim_{n \to \infty} F(z^{(n)}) \geqslant U(z_0) - v(z_0) + B - C \geqslant F_1(z_0), \tag{4.16}$$

где

$$F_1(z) = u(z) - v(z).$$

Теперь, как и при доказательстве теоремы 1, исследуем $F_1(z)$ на минимум при условии $z \in (\overline{D})^+$. В силу (4.16) этот минимум отрицателен и не превосходит a.

Пусть последовательность $\zeta^{(n)} \to z_1 \in (\overline{D})^+$ минимизирует $F_1(z)$. Если при этом $\operatorname{Im} z_1 > 0$ и $z_1 \in P_H D$, но $z_1 \notin D$, то

$$\lim_{n\to\infty} F_1(\zeta^{(n)}) = u(z_1) - v(z_1) = B - v(z_1) \geqslant B - C \geqslant 0. \tag{4.17}$$

Первое из выписанных здесь неравенств вытекает из принципа максимума, поскольку функция $v(z)$ (как и функция $u(z)$) субгармонична в силу условия $\Delta v \geqslant g(v) \geqslant 0$. Очевидно, (4.17) противоречит предположению об отрицательности наименьшего значения $F_1(z)$.

Пусть теперь $\operatorname{Im} z_1 > 0$, $z_1 \in P_H D$ и $z_1 \in D$. Тогда

$$\Delta F_1(z_1) = \Delta u(z_1) - \Delta v(z_1) \leqslant g(u(z_1)) - g(v(z_1)) \leqslant 0. \tag{4.18}$$

В случае строгого неравенства в (4.18) функция $F_1(z)$, супергармоническая в окрестности точки z_1, не может достигать минимума в этой точке.

Если в (4.18) имеем знак равенства, то, рассуждая как в пункте (1) этого доказательства, заключаем, что $F_1(z) \equiv F_1(z_1)$ в связной компоненте $\Delta \ni z_1$ множества $(D^+) \setminus \mathbb{R}$. Если при этом существует точка $\zeta_0 \in \partial\Delta \cap \partial D$, то, в соответствии с условиями теоремы,

$$F_1(z_1) = \lim_{\Delta \ni z \to \zeta_0} F_1(z) \geqslant B - C \geqslant 0,$$

что противоречит предположению $F_1(z_1) < 0$.

Если же $(\overline{\mathbb{R}}^2)^+ \subset D$, то $D = P_H D$. В последнем случае поляризация, как таковая, отсутствует, и утверждение теоремы вытекает непосредственно из леммы 5.

Для точки z_1 остается единственная возможность: $z_1 = x_1 \in \mathbb{R} \cap D$. Но тогда

$$F(z_1) = 2F_1(z_1) < F_1(z_1) \leqslant F_1^*(z_0) \leqslant F(z_0), \tag{4.19}$$

что противоречит предположению о том, что последовательность $\zeta^{(n)}$ минимизирует функцию $F(z)$. Первое из неравенств в (4.19) вытекает из предположения $F_1(z_1) < 0$, а последнее из них из (4.16).

(3) Для точки z_0, доставляющей отрицательный минимум функции $F(z)$, остается единственная возможность:

$$z_0 \in D \quad \text{и одновременно} \quad \overline{z}_0 \in D,$$

и при этом $\operatorname{Im} z_0 > 0$. В этом случае имеем

$$\Delta F(z_0) = [\Delta u(z_0) + \Delta u(\overline{z}_0)] - [\Delta v(z_0) + \Delta v(\overline{z}_0)] \leqslant$$

$$[g(u(z_0)) + g(u(\overline{z}_0))] - [g(v(z_0)) + g(v(\overline{z}_0))]. \tag{4.20}$$

Если правая часть неравенства в (4.20) отрицательна, то функция $F(z)$, супергармоническая в окрестности точки z_0, не может достигать минимума в этой точке. Поэтому в завершающей части доказательства будем предполагать, что выполняется неравенство

$$g(\gamma) + g(\delta) \geqslant g(\alpha) + g(\beta), \tag{4.21}$$

где

$$\alpha = v(z_0), \;\; \beta = v(\overline{z}_0), \;\; \gamma = u(z_0), \;\; \delta = u(\overline{z}_0). \tag{4.22}$$

В соответствии со сделанным предположением

$$\gamma + \delta < \alpha + \beta. \tag{4.23}$$

Не ограничивая общности, можем считать,что $\gamma \leqslant \beta$.

Рассмотрим случай, когда

$$\max\{\alpha, \;\beta\} = \beta' \leqslant \delta. \tag{4.24}$$

Из (4.23), (4.24) вытекает, что

$$\gamma < \min\{\alpha, \;\beta\}.$$

Последнее неравенство приводит к следующему соотношению между функциями F и F_1:

$$0 > F(z_0) = [\gamma - \alpha] + [\delta - \beta] \geqslant \gamma - \alpha = F_1(z_0). \tag{4.25}$$

Как показано в пункте (2) этого доказательства, если функция $F_1(z)$ достигает отрицательного минимума в точке z_1, то $z_1 = x_1 \in \mathbb{R} \cap D$. Следовательно, $F_1(z_0) \geqslant F_1(x_1)$. Отсюда, используя (4.25), получаем

$$F(x_1) = 2F_1(x_1) < F_1(x_1) \leqslant F_1(z_0) \leqslant F(z_0),$$

что противоречит предположению о том, что z_0 является точкой глобального минимума функции $F(z)$.

Обратимся теперь к случаю, когда $\beta' > \delta$ и функция $g(t)$ не сводится к константе на промежутке $t \leqslant \beta'$. Пусть

$$\alpha' = \min\{\alpha, \ \beta\}.$$

При $\alpha' \geqslant \gamma$ сделанное предположение и свойство монотонности $g(t)$ приводят к неравенству

$$g(\alpha) + g(\beta) > g(\gamma) + g(\delta),$$

противоречащему (4.21). При $\alpha' < \gamma$ мы приходим к такому же противоречию, используя (4.23) и свойства выпуклости и монотонности функции $g(t)$.

Остается рассмотреть случай, когда $\beta' > \delta$ и

$$g(t) = c, \quad c \geqslant 0, \quad \text{при } t \leqslant \beta'.$$

В силу сделанных предположений $\Delta F(z) \leqslant 0$ в достаточно малой окрестности Δ точки z_0. Тогда $F(z) \equiv a$ в Δ, как функция, достигающая минимума внутри области супергармоничности.

Поскольку все предыдущие рассуждения применимы к любой точке $\zeta \in \partial\Delta$, то либо неравенство (4.6) доказано, либо $F(z) \equiv a$ в связной компоненте $\Upsilon \ni z_0$ множества $D \cap D^*$.

Пусть $z^{(n)} \to \zeta$, где $z^{(n)} \in \Upsilon$, $\zeta \in \partial\Upsilon$. Если $\zeta \notin D$ и $\zeta \notin D^*$, то

$$\lim_{n\to\infty} F(z^{(n)}) \geqslant 2(B-C) \geqslant 0,$$

что противоречит тождеству $F(z) \equiv a$ в Υ.

В случае $\zeta \in D$ (аналогично в случае $\zeta \in D^*$) имеем

$$0 > a = \lim_{n\to\infty} F(z^{(n)}) \geqslant B - C + F_1(\zeta). \tag{4.26}$$

Используя (4.26) и повторяя рассуждения пункта (2), приходим к противоречию с предположением (4.14).

Таким образом, во всех возможных случаях предположение (4.14) приводит к противоречию. Следовательно, неравенство $a \geqslant 0$, а вместе с ним и неравенство (4.6) доказаны.

Неравенство (4.5) вытекает теперь из (4.6), из соотношения $F_1(x) = (1/2)F(x)$ при $x \in \mathbb{R}$ и из установленного в пункте (2) факта, согласно которому функция $F_1(z)$ может иметь отрицательный минимум только при $z \in \mathbb{R}$.

Для доказательства неравенства (4.7) рассмотрим функцию

$$F_2(z) = [u(\overline{z}) - u(z)] - [v(\overline{z}) - v(z)].$$

Предположим, что

$$\sup_{z:\operatorname{Im} z \geqslant 0} F_2(z) = b > 0. \tag{4.27}$$

Из условий теоремы и уже доказанного неравенства (4.5) вытекает, что супремум в (4.27) достигается в некоторой точке $z_0 \in D$, $\operatorname{Im} z > 0$. Имеем

$$\Delta F_2(z_0) = [g(\delta) - g(\gamma)] - [g(\beta) - g(\alpha)],$$

где параметры α, β, γ, δ определены в (4.22) и удовлетворяют соотношениям

$$\alpha \leqslant \gamma, \quad \delta - \gamma > \beta - \alpha \geqslant 0. \tag{4.28}$$

Из (4.28) и свойств функции $g(t)$ следует, что $\Delta F_2(z) \geqslant 0$ в некоторой окрестности $\mathcal{U}$ точки z_0. Теперь из принципа максимума для субгармонических функций вытекает, что $F_2(z) \equiv b$ в U. Отсюда, как и при доказательстве неравенств (4.5), (4.6), получаем требуемое утверждение. •

Доказательство теоремы 8. (1) Предположим, что $v(z_0) = u(z_0)$ для некоторого $z_0 \in D$, $\operatorname{Im} z_0 > 0$. Пусть $\Delta \ni z_0$ и $\Delta' \ni z_0$ — связные компоненты множеств $(D^+)\setminus\mathbb{R}$ и $((P_H D)^+)\setminus\mathbb{R}$ соответственно. Применяя теорему о среднем, получим соотношение

$$-\Delta F_1(z) - [g(v(z)) - g(u(z))] = -\Delta F_1(z) + c(z) F_1(z) \geqslant 0,$$

где $c(z)$ — некоторая функция, определенная в окрестности точки z_0. Применяя принцип максимума к функции $-F_1(z) \leqslant 0$ и используя связность множества Δ, заключаем, что $v \equiv u$ в Δ.

Если $\Delta \neq \Delta'$, то найдется точка $\zeta \in \partial\Delta \cap \Delta'$. В силу принципа максимума для субгармонических функций либо $v(\zeta) < C$, либо $v(z) \equiv C$ в Δ'. В первом случае из условий теоремы вытекает, что найдется точка $\zeta' \in \Delta$ такая, что $u(\zeta') - v(\zeta') > 0$. Последнее противоречит тождеству $u \equiv v$. Следовательно, $\Delta = \Delta'$, $B = C$, и теорема в рассматриваемом случае доказана.

Во втором случае, вновь пользуясь принципом максимума, получаем: $B = C$, $u(z) \equiv v(z) \equiv B$ и $g(B) = 0$.

Случай $\overline{z}_0 \in D$, $\operatorname{Im} z_0 > 0$, $v(z_0) = u(\overline{z}_0)$ рассматривается аналогично.

(2) Пусть существует точка z_0, $\operatorname{Im} z_0 > 0$, лежащая в связной компоненте Δ_1 множества D, такая, что $\overline{z}_0$ лежит в связной компоненте $\Delta_2 \subset D$ и

$$v(z_0) + v(\overline{z}_0) = u(z_0) + u(\overline{z}_0). \tag{4.29}$$

Обозначим через Δ_1' и Δ_2' связные компоненты множества $P_H D$, содержащие точки z_0 и $\overline{z}_0$ соответственно.

Если $\Delta_1' \neq \Delta_1$ и $\Delta_1' \neq (\Delta_2)^*$, то из (4.29) и из результата, доказанного в пункте (1), получаем неравенства

$$v(z_0) < u(z_0), u(\overline{z}_0) < v(\overline{z}_0). \tag{4.30}$$

Предположим сначала, что g не сводится к линейной функции на промежутке $[v(z_0), v(\overline{z}_0)]$. Тогда

$$\Delta F(z_0) \leqslant [g(u(z_0)) + g(u(\overline{z}_0))] - [g(v(z_0)) + g(v(\overline{z}_0))] < 0.$$

Следовательно, функция $F(z)$, определенная в доказательстве теоремы 7, супергармонична в окрестности точки z_0 и не может достигать минимума в этой точке. Последнее противоречит равенству (4.29) и неравенству (4.6). Следовательно, или $\Delta_1' = \Delta_1$, $\Delta_2' = \Delta_2$, или $\Delta_1' = (\Delta_2)^*$, $\Delta_2' = (\Delta_1)^*$. В первом из этих случаев, применяя лемму 5, получаем неравенство $v(z) \leqslant u(z)$ при $z \in \Delta_1 \cup \Delta_2$. Отсюда и из (4.30) вытекает, что $v(z_0) = u(z_0)$, $v(\overline{z}_0) = u(\overline{z}_0)$, и доказательство свелось к ситуации, рассмотренной в (1). Второй случай рассматривается аналогично.

Пусть теперь $g(t) = kt + a$ при $t \in [v(z_0),\ v(\overline{z}_0)]$, где $k \geqslant 0$, $a \in \mathbb{R}$. Используя (4.30), получаем

$$\begin{aligned}\Delta F(z) &\geqslant [g(v(z)) + g(v(z))] - [g(u(z)) + g(u(z))]\\ &\geqslant 2\left[g\left(\frac{v(z) + v(\overline{z})}{2}\right) - g\left(\frac{u(z) + u(\overline{z})}{2}\right)\right].\end{aligned}$$

Применяя теорему о среднем, приходим к соотношению

$$\Delta F(z) + c_1(z)\, F(z) \geqslant 0,$$

где функция $c_1(z)$ определена в некоторой окрестности $\mathcal{U}$ точки z_0. Применяя принцип максимума к функции $-F(z) \leqslant 0$, заключаем, что

$$v(z) + v(\overline{z}) = u(z) + u(\overline{z}) \tag{4.31}$$

для всех $z \in \mathcal{U}$.

Учитывая тот факт, что предыдущие рассуждения этого пункта применимы к любой точке $z \in \mathcal{U}$, $\operatorname{Im} z > 0$, приходим к одному из следующих заключений: либо при некотором $z' \in \Delta_1', \operatorname{Im} z' > 0$, функция $g(t)$ не сводится к линейной на промежутке $[v('),\ v(\overline{z}')]$ и тогда утверждение теоремы выполняется, либо равенство (4.31) имеет место при всех z таких, что $\overline{z} \in \Delta_2'$. В последнем случае нетрудно получить противоречие с предположением $\Delta_1' \neq \Delta_1$, $\Delta_1' \neq (\Delta_2)^*$, что, как и выше, приводит к требуемому утверждению.

(3) Пусть Δ и Δ' — связные компоненты множеств D и $P_H D$, содержащие точку $x_0 \in \mathbb{R}$. Предположим, что $\Delta' \neq \Delta$, $\Delta' \neq \Delta^*$ и что

$$u(x_0) = v(x_0). \tag{4.32}$$

Пусть $r_0 = \operatorname{dist}(x_0, \partial D) > 0$. Через $p_r(\varphi)$ и $q_r(\varphi)$ будем обозначать значения функций $v(z)$ и $u(z)$ в точке $z = x_0 + re^{i\varphi}$, $|\varphi| \leqslant \pi$. Пусть $0 < r_1 \leqslant r_0$, φ_0, $0 < \varphi_0 < \pi$. В соответствии с выше доказанным при сделанных предположениях выполняются неравенства

$$p_{r_1}(\varphi_0) + p_{r_1}(-\varphi_0) < q_{r_1}(\varphi_0) + q_{r_1}(-\varphi_0), \tag{4.33}$$

$$p_{r_1}(\varphi_0) < \min\{q_{r_1}(\varphi_0),\ q_{r_1}(-\varphi_0)\}. \tag{4.34}$$

Из теоремы 7 и неравенств (4.33), (4.34) вытекает, что существует функция $f(\varphi)$, непрерывная на окружности $\mathbb{T}_{r_1}(x_0)$, такая, что

$$p_{r_1}(\varphi_0) < f(\varphi_0),$$

$$p_{r_1}(\varphi) \leqslant f(\varphi)$$

для всех φ, $0 \leqslant \varphi < 2\pi$, и

$$f(\varphi) + f(-\varphi) \leqslant q_{r_1}(\varphi) + q_{r_1}(-\varphi), \tag{4.35}$$

$$f(\varphi) \leqslant \min\{q_{r_1}(\varphi),\ q_{r_1}(-\varphi)\} \tag{4.36}$$

при всех φ, $0 \leqslant \varphi \leqslant \pi$.

Если r_1 достаточно мало, то, согласно лемме 4, существует решение $v_1(z) \in C^2(U_{r_1}(x_0)) \cap C(\overline{U}_{r_1}(x_0))$ задачи Дирихле для уравнения (4.11) и граничной функции $f(\varphi)$. Применяя к функциям v_1 и v лемму 5, получаем неравенство $\omega(z) \leqslant 0$, где $\omega(z) = v(z) - v_1(z)$, $z \in U_{r_1}(x_0)$. Так как $\Delta\omega \geqslant g(v) - g(v_1)$, то из теоремы о среднем вытекает соотношение

$$\Delta\omega + c_2(z)\omega \geqslant 0,$$

где $c_2(z)$ — некоторая функция, определенная в круге $U_{r_1}(x_0)$. Используя принцип максимума, из последних соотношений получаем строгое неравенство

$$v(z) < v_1(z),$$

верное для всех $z \in U_{r_1}(x_0)$. Применяя следствие 6 и учитывая (4.35), (4.36), находим:

$$v_1(z) \leqslant u(z)$$

для всех $z \in (U_{r_1}(x_0))^+$. Из двух последних неравенств при $z = x_0$ получаем неравенство $v(x_0) < u(x_0)$, противоречащее предположению (4.32). Отсюда вытекает утверждение теоремы для рассматриваемого случая. Приведенное доказательство показывает также, что двойное равенство $v(z) = u(z) = u(\bar{z})$ имеет место только в случаях, указанных в формулировке теоремы.

Утверждение о случаях достижения равенства в (4.7) доказывается аналогично предыдущему, при этом используется тот факт, что функция $F_2(z)$ является субгармонической при рассматриваемых значениях z. •

Доказательство следствия 5. Неравенство (4.8) вытекает непосредственно из соотношений (4.5) и (4.7). Докажем утверждение о равенстве $\frac{\partial v(x)}{\partial y} = 0$, в остальных случаях доказательство проводится аналогично. Предположим, что $\Delta \neq \Delta^*$. Тогда по теоремам 7 и 8 $\omega(z) = v(z) - v(\bar{z}) < 0$ для всех $z \in \Delta$, $\operatorname{Im} z > 0$. Применяя теорему о среднем, как при доказательстве теоремы 8, получаем равенство

$$\Delta\,\omega(z) + c(z)\,\omega(z) = 0,$$

где функция $c(z)$ определена в некоторой окрестности точки x. Если $\frac{\partial v(x)}{\partial y} = 0$, то по лемме Хопфа $\omega(z) \equiv 0$ в некоторой окрестности точки x и требуемое утверждение вытекает из теоремы 8. •

Перейдем к изучению задач, связанных непосредственно с метрикой Пуанкаре открытых множеств. Отметим, что на таких множествах указанная метрика определяется покомпонентно. Следующая теорема является основным результатом в данном направлении.

Теорема 9. *Пусть D — открытое множество на $\overline{\mathbb{C}}$, имеющее более двух граничных точек, и пусть $P_H D$ — поляризация D относительно $\mathbb{R}$. Тогда*

$$\lambda_{P_H D}(z) \leqslant \min\{\lambda_D(z),\ \lambda_D(\bar{z})\}, \tag{4.37}$$

$$\lambda_{P_H D}(z) + \lambda_{P_H D}(\bar{z}) \leqslant \lambda_D(z) + \lambda_D(\bar{z}), \tag{4.38}$$

$$\lambda_{P_H D}(\bar{z}) - \lambda_{P_H D}(z) \geqslant |\lambda_D(\bar{z}) - \lambda_D(z)| \tag{4.39}$$

для всех z таких, что $\operatorname{Im} z \geqslant 0$.

Пусть Δ_1, Δ_2, Δ'_1 *и* Δ'_2 *— связные компоненты, определенные в формулировке теоремы* 8. *Равенства* $\lambda_{P_H D}(z) = \lambda_D(z)$ *и* $\lambda_{P_H D}(z) = \lambda_D(\bar{z})$, *а при условии* $\operatorname{Im} z > 0$ *также и равенства* $\lambda_{P_H D}(\bar{z}) - \lambda_{P_H D}(z) = \lambda_D(\bar{z}) - \lambda_D(z)$ *и* $\lambda_{P_H D}(\bar{z}) - \lambda_{P_H D}(z) = \lambda_D(z) - \lambda_D(\bar{z})$ *имеют место только при выполнении условий* $\Delta'_1 = \Delta_1$, $\Delta'_2 = \Delta_2$ *и* $\Delta'_1 = \Delta_1^*$, $\Delta'_2 = \Delta_1^*$ *соответственно. Равенство в* (4.38) *имеет место только при выполнении хотя бы одного из этих условий.*

Доказательство. Для доказательства неравенств (4.37), (4.38) используем обычный в таких случаях подход, основанный на аппроксимации.

Пусть D_1, D_2, ... — последовательность подмножеств, исчерпывающих D изнутри, т.е.

$$\overline{D}_k \subset D_{k+1}, \quad k = 1, 2, \dots \quad \text{и} \quad \cup_{n=1}^{\infty} D_n = D.$$

Пусть λ_n обозначает метрику Пуанкаре множества D_n. Тогда $\lambda_n \to \lambda_D$ равномерно на компактах из D (см. [22, с. 297]). Из известных результатов вытекает (см. [23, с. 477]), что

$$\lim_{D_n \ni z \to \zeta \in \partial D_n} \lambda_n(z) = \infty, \qquad \sup_{z \in P_H D_k} \lambda_{P_H D}(z) < \infty. \tag{4.40}$$

Следовательно, теорема 7 применима к множеству D_n и к функциям $u = \lambda_n$, $v = \lambda_{P_H D}$. Значит для таких u и v выполняются неравенства (4.5) и (4.6). Отсюда, переходя к пределу при $n \to \infty$, получаем (4.37) и (4.38).

Для доказательства неравенства (4.39) используем введенную выше аппроксимацию. При этом дополнительно предполагаем, что граница каждого из множеств D_n состоит из конечного числа замкнутых жордановых кривых, каждая из которых состоит из конечного числа прямолинейных отрезков параллельных координатным осям. Понятно, что любая пара соседних граничных отрезков образует угол равный $\pi/2$ или $3\pi/2$. Пусть $\Omega_n = P_H D_n$ — поляризация множества D_n. Тогда часть границы $\partial\Omega_n$, лежащая в нижней полуплоскости, также состоит из конечного числа вертикальных и горизонтальных отрезков. При этом соседние граничные отрезки могут образовывать углы равные $\pi/2$ или $3\pi/2$.

Зафиксируем точку $z_0 \in \partial\Omega_n$, такую что $\operatorname{Im} z_0 \leqslant 0$. Тогда, по крайней мере, одна из точек z_0 и $\bar{z}_0$, пусть для определенности точка z_0, принадлежит ∂D_n.

Мы утверждаем, что выполняется следующее соотношение:

$$\liminf_{\substack{z \to z_0 \\ z \in \Omega_n}} [\lambda_{\Omega_n}(z) - \lambda_n(z)] \geqslant 0. \tag{$*$}$$

Если утверждение $(*)$ уже доказано, то, повторяя доказательство неравенства (4.7) теоремы 7, мы докажем, что (4.39) выполняется для множеств D_n. Отсюда, переходя к пределу и используя тот факт, что $\lambda_n \to \lambda_D$ и $\lambda_{\Omega_n} \to \lambda_{P_H D}$ равномерно на компактах из D и $P_H D$ соответственно, получим неравенство (4.39).

Докажем утверждение $(*)$. При этом будем считать, что точка z_0 лежит внутри граничного отрезка $[z_0 - l, z_0 + l] \subset \partial\Omega_n \cap \partial D_n$, где $l > 0$ достаточно мало. В остальных случаях, когда хотя бы одна из границ $\partial\Omega_n$ и D_n имеет угол в точке z_0, доказательство лишь техническими деталями отличается от доказательства приводимого ниже.

Так как l мало, то один из полукругов $\Delta^{\pm} = \{z \in U_l(z_0),\ \pm\operatorname{Im}(z - z_0) > 0\}$, пусть Δ^+, принадлежит множеству Ω_n, а следовательно и множеству D_n. Пусть Let $D(l) = \overline{\mathbb{C}} \setminus [z_0 - l, z_0 + l]$. Метрика Пуанкаре является монотонной функцией области, поэтому утверждение $(*)$ вытекает из следующего предельного равенства:

$$\lim_{\substack{z \to \zeta \\ \forall \zeta \in \partial(P_H D)}} v(z) = B,$$

$$\lim_{\substack{z \to z_0 \\ z \in \Delta^+}} \left[\lambda_{D(l)}(z) - \lambda_{\Delta^+}(z)\right] = 0.$$

Используя конформное отображение областей $D(l)$ и Δ^+ на верхнюю полуплоскость, находим

$$\lambda_{D(l)}(z) = \frac{|\zeta'(z)|}{4|\zeta|^{1/2}\operatorname{Im}(\zeta^{1/2})},$$
$$\lambda_{\Delta^+}(z) = \frac{|\zeta||\zeta'(z)|}{\operatorname{Im}(\zeta^2)},$$

где

$$\zeta = \zeta(z) = -(z - (z_0 - l))/(z - (z_0 + l)).$$

Пусть $\zeta(z) = 1 + \delta_1 + i\delta_2$, тогда $\delta_2 > 0$ и $\delta_1 \to 0$, $\delta_2 \to 0$ при $z \to z_0$, $z_0 \in \Omega_n$. После элементарных вычислений приходим к искомому предельному соотношению:

$$\begin{aligned}
&\lambda_{D(l)}(z) - \lambda_{\Delta^+}(z) \\
&= \frac{\operatorname{Im}(\zeta^2) - 4|\zeta|^{3/2}\operatorname{Im}(\zeta^{1/2})}{4|\zeta|^{1/2}\operatorname{Im}(\zeta^2)\operatorname{Im}(\zeta^{1/2})}|\zeta'(z)| \\
&= \frac{\sin(2\arctan\frac{\delta_2}{1+\delta_1}) - 4\sin(\frac{1}{2}\arctan\frac{\delta_2}{1+\delta_1})}{4|\zeta|^2\sin(2\arctan\frac{\delta_2}{1+\delta_1})\sin(\frac{1}{2}\arctan\frac{\delta_2}{1+\delta_1})}|\zeta'(z)| \to 0
\end{aligned}$$

при $z \to z_0$.

Поскольку неравенства (4.37), (4.38) и (4.39) установлены, то рассуждения, примененные при доказательстве теоремы 8, доказывают также и утверждения о случаях равенства в этих неравенствах. •

Следствие 7 (см. Минда, [24]). *Пусть открытое множество D таково, что $(D^-)^* \subset D^+$. Если $z, \bar{z} \in D$ и $\operatorname{Im} z > 0$, то*

$$\lambda_D(z) \leqslant \lambda_D(\bar{z}). \tag{4.41}$$

Пусть Δ_1 и Δ_2 — связные компоненты D, содержащие точки z и $\bar{z}$ соответственно. Равенство в (4.41) достигается тогда и только тогда, когда $\Delta_1 = \Delta_2^*$.

Следствие 8. *При выполнении условий теоремы 9 для всех $z = x \in \mathbb{R} \cap D$*

$$-\frac{\partial\,\lambda_{P_H D}(x)}{\partial\,y} \geqslant \left|\frac{\partial\,\lambda_D(x)}{\partial\,y}\right|. \tag{4.42}$$

Пусть $\Delta \ni x$, $\Delta' \ni x$ — связные компоненты множеств D и $P_H D$ соответственно. Равенства $\frac{\partial\,\lambda_{P_H D}(x)}{\partial\,y} = \frac{\partial\,\lambda_D(x)}{\partial\,y}$ и $\frac{\partial\,\lambda_{P_H D}(x)}{\partial\,y} = -\frac{\partial\,\lambda_D(x)}{\partial\,y}$ достигаются только в случаях $\Delta' = \Delta$ и $\Delta' = \Delta^*$ соответственно. Таким образом, $\frac{\partial\,\lambda_{P_H D}(x)}{\partial\,y} = 0$ тогда и только тогда, когда $\Delta = \Delta^*$.

Доказательство следствия 8 точно такое же, как доказательство следствия 5. В связи с неравенством (4.42) представляет интерес следующее предположение.

Гипотеза 2. *В условиях теоремы* 9

$$|\nabla \lambda_{P_H D}(x)| \geqslant |\nabla \lambda_D(x)|.$$

Используя схему доказательства теорем 3 и 4, легко получаем, как следствие теоремы 9, следующее утверждение.

Теорема 10. *Пусть D — открытое множество на $\overline{\mathbb{C}}$. Тогда для любой симметричной относительно $\mathbb{R}$ кривой L, для которой существуют рассматриваемые интегралы, и для любой неубывающей выпуклой функции $\Phi : \mathbb{R} \mapsto \mathbb{R}$ выполняется неравенство*

$$\int_L \Phi(\lambda_{P_H D}(z))\,|dz| \leqslant \int_L \Phi(\lambda_D(z))\,|dz|. \tag{4.43}$$

Если $D \cap L \neq \varnothing$ и Φ не сводится к константе, то равенство в (4.43) *достигается только в тех случаях, когда $P_H\Delta = \Delta$ или $P_H\Delta = \Delta^*$, где Δ — объединение связных компонент множества D, пересекающихся с L.*

Теорема 10 вместе с леммами 1–3, связывающими симметризационные преобразования и поляризацию, приводит к следующему утверждению.

Теорема 11. *Пусть $D^\#$ — круговая симметризация открытого множества $D \subset \overline{\mathbb{C}}$ относительно луча $\mathbb{R}_0$. Пусть $D^\#$ имеет более двух граничных точек и пусть Φ такая же, как в теореме* 10. *Тогда при всех $r > 0$*

$$\int_0^{2\pi} \Phi(\lambda_{D^\#}(re^{i\theta}))\,d\theta \leqslant \int_0^{2\pi} \Phi(\lambda_D(re^{i\theta}))\,d\theta.$$

Если $D \cap \mathbb{T}_r \neq \varnothing$ и Φ не сводится к константе, то равенство здесь имеет место только в том случае, когда $(\Delta_r)^\# = e^{i\alpha}\Delta_r$, где $\alpha \in \mathbb{R}$ и Δ_r — объединение связных компонент D, пересекающих $\mathbb{T}_r$.

Следующая теорема дает решение упоминавшейся выше задачи Хеймана [19, с. 32]. Впервые решение этой проблемы, без исследования случаев равенства, было получено Вейтсманом [18].

Теорема 12. *Пусть D, $D^{\#}$ и Δ_r такие же, как в теореме 11. Тогда для всех $r \geqslant 0$*

$$\lambda_{D^{\#}}(r) \leqslant \min_{|z|=r} \lambda_D(z). \tag{4.44}$$

Равенство в (4.44) при некотором $r \geqslant 0$ имеет место тогда и только тогда, когда $(\Delta_r)^* = e^{i\alpha}\Delta_r$ при некотором $\alpha \in \mathbb{R}$.

Приведем некоторые утверждения, характеризующие метрику Пуанкаре кругосимметричных множеств.

Теорема 13 (см. Вейтсман, [22]). *Пусть область D кругосимметрична относительно луча $\mathbb{R}_0$. Пусть $D \cap \mathbb{T}_r = \{z : |\arg z| < \theta_0(r)\}$, $r > 0$, $0 < \theta_0(r) \leqslant \pi$; в случае $\mathbb{T}_r \subset D$ будем считать, что $\theta_0(r) = \pi$. Тогда $\lambda_D(re^{i\theta})$, рассматриваемая как функция θ, строго возрастает при $0 \leqslant \theta \leqslant \theta_0(r)$, за исключением случаев $D = U_R$, $D = \overline{\mathbb{C}} \setminus \overline{U}_R$ и $D = \{z : r_1 < |z| < r_2\}$, где $0 \leqslant r_1 < r_2 \leqslant \infty$. В исключительных случаях $\lambda_D(re^{i\theta})$ постоянна на $\mathbb{T}_r$.*

Отметим, что аналогичное утверждение для внутреннего радиуса области было доказано в [25].

Доказательство. Пусть $L(\theta) = e^{-i\theta}\mathbb{R}$, $0 \leqslant \theta \leqslant \pi$, и пусть $D(\theta)$ — результат поляризации D относительно направленной прямой $L(\theta)$. В силу кругосимметричности D имеем: $D(\theta) = D$ для всех θ, $0 \leqslant \theta \leqslant \pi$.

Пусть

$$0 \leqslant \theta_1 < \theta_2 \leqslant \theta_0(r), \qquad \theta' = (1/2)(\theta_1 + \theta_2).$$

Применяя следствие 7 для случая поляризации относительно $L(\theta')$, получаем неравенство

$$\lambda_D(re^{i\theta_1}) \leqslant \lambda_D(re^{i\theta_2}),$$

знак равенства в котором имеет место лишь в том случае, когда D симметрична относительно $L(\theta')$. Нетрудно видеть, что в последнем случае область D является одной из круговых областей, указанных в формулировке теоремы. •

Следствие 9. *Пусть область D кругосимметрична относительно $\mathbb{R}_0$ и пусть пересечение $-\mathbb{R} \cap D$ состоит из интервалов $[-b_k, -a_k]$, где $0 \leqslant a_1 < b_1 \leqslant a_2 < b_2 \leqslant \cdots$. Тогда на каждом из интервалов $[-b_k, -a_k]$ метрика Пуанкаре, рассматриваемая как функция переменного x, имеет единственную стационарную точку, которая является точкой локального минимума. Если при этом*

$z = 0 \in D$, то $\frac{\partial \lambda_D(-x)}{\partial x} < 0$ при $0 < x < b_1$ и $\frac{\partial \lambda_D(0)}{\partial x} \leqslant 0$. Если дополнительно $D \neq U_R$ ни при каком $R > 0$, то $\frac{\partial \lambda_D(0)}{\partial x} < 0$.

Доказательство. Так как λ_D субгармонична в D, то величина

$$\lambda_D(-r) = \max_{|\theta| \leqslant \pi} \lambda_D(re^{i\theta})$$

является выпуклой функцией от $\log r$ в каждом из интервалов $a_k < r < b_k$. Отсюда, используя лемму Хопфа, нетрудно получить требуемые утверждения. •

В качестве последнего, также традиционного, приложения предлагаемого метода укажем следующую теорему о росте аналитических функций.

Теорема 14. *Пусть функция $f(z)$ — аналитическая в круге U, $f(0) \geqslant 0$, $f(U) = D$. Пусть $g(z)$, $g(0) = f(0)$, — универсальное накрывающее отображение круга U на ту связную компоненту множества $P_H D$, которая содержит точку $w = f(0)$. Тогда для всех r, $0 < r < 1$, выполняется неравенство*

$$M(r, f) \leqslant M(r, g). \tag{4.45}$$

Здесь используется обычное обозначение

$$M(r, f) = \max_{|z|=r} |f(z)|.$$

Равенство в (4.45) достигается только в тех случаях, когда $f(z) = g(e^{i\alpha} z)$ или $f(z) = \overline{g(e^{-i\alpha}\overline{z})}$.

Доказательство. Из принципа подчинения следует, что теорему достаточно доказать для случая, когда f также является универсальным накрывающим отображением круга U на область D. Можем также считать, что $M(r, f) = |f(r)|$.

Рассмотрим, например, случай $\operatorname{Im} f(r) \geqslant 0$. Случай $\operatorname{Im} f(r) < 0$ рассматривается аналогично. Пусть $l = f([0, r])$ и пусть $P_H l$ — поляризация l относительно $\mathbb{R}$. Нетрудно видеть, что существует жорданова кусочно-аналитическая кривая $L \subset (P_H l)^+$, соединяющая точки $f(0)$ и $f(r)$.

Обозначим через $\rho_D(w_1, w_2)$ и $\rho_{P_H D}(w_1, w_2)$ гиперболические расстояния между точками w_1 и w_2 на соответствующих накрывающих поверхностях. Применяя теорему 9, получаем

$$\begin{aligned}\rho_D(f(0), f(r)) = \int_l \lambda_D(w)\,|dw| \geqslant \int_L \lambda_{P_H D}(w)\,|dw| \\ \geqslant \rho_{P_H D}(f(0), f(r)).\end{aligned} \tag{4.46}$$

При этом равенство в первом из выписанных неравенств достигается только в случае $P_H D = D$.

Пусть z_0 — образ точки $f(r)$ при отображении $g^{-1}(w)$, $g^{-1}(g(0)) = 0$, таком, что аналитическое продолжение функции $g^{-1}(w)$ из точки $g(0)$ в точку $f(r)$ осуществляется вдоль кривой L. Пусть $r_0 = |z_0|$. В случае $P_H D \neq D$ из (4.46) получаем неравенство $r_0 < r$, которое в силу принципа максимума для аналитических функций приводит к строгому неравенству в (4.45). Теорема доказана. •

В качестве следствия из теоремы 14 получаем следующий результат Вейтсмана [18, теорема 3], дополненный утверждением о случаях равенства.

Следствие 10. *В условиях теоремы* 14 *пусть* g *— универсальное накрывающее отображение круга* U *на круговую симметризацию* $D^\#$ *области* D *относительно луча* $\mathbb{R}_0$, $g(0) = f(0) \geqslant 0$. *Тогда для функций* f *и* g *выполняется неравенство* (4.45) *и равенство в нем достигается только в случае* $D = D^\#$, *если* $f(0) > 0$, *и только в случае* $D = e^{i\alpha}D$, $\alpha \in \mathbb{R}$, *если* $f(0) = 0$.

Комментарии

Укажем очевидные возможные обобщения полученных выше результатов. Прежде всего отметим, что их аналоги выполняются для поляризации относительно гиперсферы. Такая поляризация рассматривалась В. Н. Дубининым [12]. Другое возможное распространение наших результатов связано с „частичными симметризационными преобразованиями“ типа частичных симметризаций, рассмотренных в [25]. Такое обобщение будет связано с поляризацией римановых поверхностей.

Далее, в работе [25], посвященной решению задачи Полиа–Сегё о непрерывной симметризации плоских областей, построено семейство преобразований, трансформирующих данную область в результат ее штейнеровской симметризации. Такие преобразования строились на основе поляризации. Комбинируя метод работы [25] с методом настоящей работы, можно получить непрерывное вложение области Ω и ее штейнеровской симметризации $\Omega^{\#}$ в однопараметрическое семейство областей. Указанное вложение будет монотонным в отношении изменения как геометрических характеристик области, так и ее функциональных характеристик типа емкости или интегральных средних.

Касаясь возможности рассмотрения более общих функционалов, отметим хорошие перспективы, которые открывают результаты из уже упоминавшейся работы Ф. Брока и автора [8].

Отдельно укажем, что теоремы 7–12 о свойствах метрики Пуанкаре представляют особый интерес в связи со многими задачами теории функций комплексного переменного. Некоторые из возможных приложений видны непосредственно.

Благодарности. Основная часть этой работы была завершена во время визита автора в Университет г. Лейпцига в декабре 1994 г. Автор выражает признательность этому Университету за гостеприимство и за оказанную поддержку. Особенно я благодарен доктору Ф. Броку, который организовал этот визит, был первым критиком некоторых результатов этой статьи и соавтором последующих исследований по данной тематике.

Список литературы

[1] Полиа Г., Сеге Г., *Изопериметрические неравенства в математической физике*, Физматгиз, М., 1962.

[2] Baernstein A. II, *Integral means, univalent functions and circular symmetrization*, Acta Math. 133 (1974), 139–169.

[3] Wolontis V., *Properties of conformal invariants*, Amer. J. Math. 74 (1952), no. 3, 587–606.

[4] Дубинин В. Н., *Симметризация в геометрической теории функций комплексного переменного*, Успехи мат. наук 49 (1994), № 1, 3–76.

[5] Dubinin V. N., *Capacities and geometric transformations of subsets in n-space*, Geom. Funct. Anal. 3 (1993), 342–369.

[6] Дубинин В. Н., *Преобразование функций и принцип Дирихле*, Мат. заметки 38 (1985), № 1, 49–55.

[7] Солынин А. Ю., *Применение поляризации для доказательства функциональных неравенств*, Препринт ПОМИ № 10/1995, ПОМИ, С.-Петербург, 1995, 24 с.

[8] Brock F., Solynin A. Yu., *An approach to symmetrization via polarization*, Mem. Amer. Math. Soc. (to appear).

[9] Gilbarg D., Trudinger N., *Elliptic partial differential equations of second order*, 2nd ed., Grundlehren Math. Wiss., vol. 224, Springer-Verlag, Berlin-New York, 1983.

[10] Wu J.-M., *Level sets and the Green function*, Potential Theory (Nagoya, 1990), de Gruyter, Berlin, 1992, pp. 141–145.

[11] Baernstein A. II, Taylor B. A., *Spherical rearrangements, subharmonic functions, and *-functions in n-space*, Duke Math. J. 43 (1976), 245–268.

[12] Дубинин В. Н., *Преобразование конденсаторов в пространстве*, Докл. АН СССР **296** (1987), № 1, 18–20.

[13] Левицкий Б. Е., *K-симметризация и экстремальные кольца*, Математический анализ, Кубан. гос. ун-т, Краснодар, 1971, сс. 35–40.

[14] Sarvas J., *Symmetrization of condensers in n-space*, Ann. Acad. Sci. Fenn. Ser. A I Math. no. 522 (1972), 1–44.

[15] Baernstein A. II, *A unified approach to symmetrization*, Partial Differential Equations of Elliptic Type (Cortona, 1992), Sympos. Math., XXXV, Cambridge Univ. Press, Cambridge, 1994, pp. 47–91.

[16] Essén M., Shea D., *On some questions of uniqueness in the theory of symmetrization*, Ann. Acad. Sci. Fenn. Ser. A I Math. **4** (1978/1979), 311–340.

[17] Heins M., *On a class of conformal metrics*, Nagoya Math. J. **21** (1962), 1–60.

[18] Weitsman A., *Symmetrization and the Poincaré metric*, Ann. of Math. (2) **124** (1986), 159–169.

[19] Hayman W., *Research problems in function theory*, Athlone Press, London, 1967.

[20] Protter M., Weinberger H., *Maximum principles in differential equations*, Prentice-Hall, Inc., Englewood Cliffs, NJ, 1967.

[21] Serrin J., *A symmetry problem in potential theory*, Arch. Rational Mech. Anal. **43** (1971), 304–318.

[22] Weitsman A., *A symmetry property of the Poincaré metric*, Bull. London Math. Soc. **11** (1979), 295–299.

[23] Beardon A., Pommerenke Ch., *The Poincaré metric of plane domains*, J. London Math. Soc. (2) **18** (1978), 475–483.

[24] Minda D., *Inequalities for the hyperbolic metric and applications to geometric function theory*, Lecture Notes in Math., vol. 1275, Springer, Berlin-New York, 1987, pp. 235–252.

[25] Солынин А. Ю., *Непрерывная симметризация множеств*, Зап. науч. семин. ЛОМИ **185** (1990), 125–139.

С.-Петербургское отделение
Математического института
им. В. А. Стеклова РАН
191011, Санкт-Петербург
наб. р. Фонтанки, 27
Россия
E-mail: solynin@pdmi.ras.ru

Поступило 13 февраля 1996 г.