ИЗВЕСТИЯ АКАДЕМИИ НАУК СССР. 1931
BULLETIN DE L'ACADÉMIE DES SCIENCES DE L'URSS
Classe des sciences mathématiques et naturelles
Отделение математических и естественных наук

SUR UNE CLASSE DE FORMULES D'INTERPOLATION

Par SERGE BERNSTEIN

1. Il est connu qu'aucune distribution des noeuds dans les polynômes d'interpolation de Lagrange ne peut garantir la convergence de ces polynômes dans le cas d'une fonction continue absolument arbitraire.

J'ai donné successivement* deux procédés différents pour remédier à cet incovenient en remplaçant les polynômes de Lagrange par des polynômes de degré un peu supérieur correspondant aux mêmes noeuds. Je voudrais développer ici quelques remarques concernant le second de ces procédés que j'ai indiqué incidemment dans les articles cités.

Le problème d'interpolation trigonométrique étant équivalent à celui de l'interpolation par polynômes, c'est le premier que nous considérerons, pour fixer les idées.

Soit $f(\theta)$ une fonction continue périodique de période 2π donnée en $2m+1$ points équidistants de cet intervalle

$$\theta_k = \frac{2k\pi}{2m+1},$$

où $k = 0, 1, \ldots, 2m$. Formons la somme trigonométrique $P_n(\theta)$ d'ordre

$$m + h = n$$

$$P_n(\theta) = \frac{1}{(2m+1)(2h+1)} \sum_{0}^{2m} \frac{\sin\frac{2m+1}{2}(\theta-\theta_k)\sin\frac{2h+1}{2}(\theta-\theta_k)}{\sin^2\frac{\theta-\theta_k}{2}} f(\theta_k) \quad (h \geqslant m) \quad (1)$$

* Sur une modification de la formule d'interpolation de Lagrange. Comm. Soc. Math. Kharkow, t. V (1931); Sur une formule d'interpolation de M. de la Vallée Poussin, ibid.

qui satisfait manifestement à la condition que

$$P_n(\theta_k) = f(\theta_k), \qquad (k=0, 1, \ldots, 2m).$$

De plus, en écrivant

$$P_n(\theta) = \frac{A_0}{2} + \sum_1^n A_i \cos i\theta + B_i \sin i\theta, \tag{2}$$

on trouve, en tenant compte de l'identité

$$\frac{\sin\frac{2m+1}{2}\theta \sin\frac{2h+1}{2}\theta}{\sin^2\frac{\theta}{2}} = 2h + 1 +$$

$$+ 2\{[2h+1][\cos\theta + \ldots + \cos(m-h)\theta] + 2h\cos(m-h+1)\theta +$$

$$+ \ldots + 2\cos(m+h-1)\theta + \cos(m+h)\theta\}$$

que

$$\left.\begin{array}{l} \left.\begin{array}{l} A_i = \dfrac{2}{2m+1}\displaystyle\sum_{k=0}^{2m} f(\theta_k)\cos i\theta_k \\ B_i = \dfrac{2}{2m+1}\displaystyle\sum_{k=0}^{2m} f(\theta_k)\sin i\theta_k \end{array}\right\} i \leqslant m-h \\ \left.\begin{array}{l} A_i = \dfrac{2}{2h+1}\cdot\dfrac{n+1-i}{2m+1}\displaystyle\sum_{k=0}^{2m} f(\theta_k)\cos i\theta_k \\ B_i = \dfrac{2}{2h+1}\cdot\dfrac{n+1-i}{2m+1}\displaystyle\sum_{k=0}^{2m} f(\theta_k)\sin i\theta_k \end{array}\right\} m-h < i \leqslant n \end{array}\right\}. \tag{3}$$

Observons que les cas extrêmes, où $h=0$, $h=m$, correspondent, respectivement, à la formule classique de Lagrange, et à la formule de M. Jackson.* Toutes les formules intermédiaires, où $0 < h < m$, sont

* Jackson. A formula of trigonometric interpolation. Rendiconti del Circolo Matematico di Palermo 1914; S. Bernstein. Sur le convergence absolue des séries trigonométriques. C. R. Paris, Juin, 1914, et en russe: Об абсолютной сходимости тригонометрических рядов. Comm. Soc. Math. Kharkow, t. XIV, 1914.

caractérisées par le fait que les coefficients de $P_n(\theta)$, pour $i \leqslant m-h$, sont identiques à ceux de la formule correspondante de Lagrange, les autres coefficients satisfaisant deux à deux aux idéntités

$$(n+1-j)A_i = (n+1-i)A_j, \quad (n+1-j)B_i = -(n+1-i)B_j \tag{4}$$

lorsque $i+j=2m+1$.

On peut remarquer aussi, que pour $m-h<i\leqslant m$, on a

$$A_i = \frac{n+1-i}{2h+1}A_i^0, \quad B_i = \frac{n+1-i}{2h+1}B_i^0 \tag{5}$$

si l'on désigne par A_i^0, B_i^0 les coefficients correspondants de la formule classique de Lagrange; et ensuite les coefficients correspondant à $m<i\leqslant n$ se déduisent des formules (4).

Il est essentiel de noter que, d'après ce qui précède, les sommes trigonométriques interpolatrices $P_{m+h}(\theta)$ dans le cas où $f(\theta)$ est une somme trigonométrique d'ordre non supérieur à $m-h$ sont identiques à ces dernières: $P_{m+h}(\theta) = f(\theta)$.

Montrons à présent que l'on a

$$|P_{m+h}(\theta)| \leqslant \sqrt{\frac{2m+1}{2h+1}}M, \tag{6}$$

si

$$|f(\theta_k)| \leqslant M. \tag{7}$$

A cet effet, observons d'abord que

$$\frac{1}{(2m+1)(2h+1)}\sum_0^{2m}\frac{\sin^2\frac{2h+1}{2}(\theta-\theta_k)}{\sin^2\frac{\theta-\theta_k}{2}} = 1, \tag{8}$$

car la somme trigonométrique considérée étant au plus de l'ordre h et ne changeant pas de valeur, lorsqu'on remplace θ par $\theta+\frac{2\pi}{2m+1}$, doit se réduire à une constante C; cette constante C qui est la somme des termes constants de chaque terme de (8) tous égaux à $\frac{1}{2m+1}$, est donc égale à

$$\frac{2m+1}{2m+1} = 1.$$

Par conséquent, en vertu de l'inégalité

$$\sum_0^{2m}\left|\frac{\sin\frac{2m+1}{2}(\theta-\theta_k)\sin\frac{2h+1}{2}(\theta-\theta_k)}{\sin^2\frac{\theta-\theta_k}{2}}\right| \leqslant$$

$$\leqslant\sqrt{\sum_0^{2m}\frac{\sin^2\frac{2m+1}{2}(\theta-\theta_k)}{\sin^2\frac{\theta-\theta_k}{2}}\sum_0^{2m}\frac{\sin^2\frac{2h+1}{2}(\theta-\theta_k)}{\sin^2\frac{\theta-\theta_k}{2}}}=$$

$$=(2m+1)\sqrt{(2m+1)(2h+1)},$$

on a

$$|P_{m+h}(\theta)|\leqslant\sqrt{\frac{2m+1}{2h+1}}M. \tag{6}$$

Le signe d'égalité ne pourra ici être réalisé que pour $h=m$.

Mais pour le cas, où

$$N=\frac{2m+1}{2h+1}$$

est un nombre entier, nous donnerons une limite supérieure de $|P_{m+h}(\theta)|$ qui pourra effectivement être atteinte.

Si

$$|f(\theta_k)|\leqslant 1, \tag{7bis}$$

on a, en supposant que $N=\dfrac{2m+1}{2h+1}$ est un nombre entier,

$$|P_{m+h}(\theta)|\leqslant L=\frac{1}{N}\left[\frac{1}{\sin\frac{\pi}{2N}}+\frac{1}{\sin\frac{3\pi}{2N}}+\dots+\frac{1}{\sin\frac{2N-1}{2N}\pi}\right]. \tag{9}$$

En effet, posons $k=\lambda N+\rho$, où λ et $\rho<N$ sont deux nombres entiers positifs, et soit $z_k=\theta-\theta_k$; nous aurons donc

$$\frac{1}{(2m+1)(2h+1)}\sum_{k=0}^{2m}\frac{\left|\sin\frac{2m+1}{2}z_k\sin\frac{2h+1}{2}z_k\right|}{\sin^2\frac{z_k}{2}}=$$

$$=\frac{\left|\sin\frac{2m+1}{2}z_0\right|}{(2m+1)(2h+1)}\sum_{\rho=0}^{N-1}\sum_{\lambda=0}^{2h}\frac{\left|\sin\frac{2h+1}{2}\left(z_0+\frac{2\rho\pi}{2m+1}\right)\right|}{\sin^2\frac{1}{2}\left(z_0+\frac{2\rho\pi}{2m+1}+\frac{2\lambda\pi}{2h+1}\right)}=$$

$$=\frac{2h+1}{2m+1}\left|\sin\frac{2m+1}{2}z_0\right|\sum_{\rho=0}^{N-1}\frac{1}{\left|\sin\frac{2h+1}{2}\left(z_0+\frac{2\rho\pi}{2m+1}\right)\right|}=$$

$$=\left|\frac{\sin\frac{N}{2}\varphi}{N}\right|\sum_{\rho=0}^{N-1}\frac{1}{\left|\sin\left(\frac{\varphi}{2}+\frac{\rho\pi}{N}\right)\right|}\leqslant\frac{1}{N}\sum_{\rho=0}^{N-1}\frac{1}{\sin\frac{2\rho+1}{2N}\pi},\tag{10}$$

le maximum absolu de cette somme étant manifestement atteint pour

$$\varphi=(2h+1)z_0=\frac{\pi}{N}\cdot$$

Il est fort remarquable que la somme trigonométrique $P_{m+h}(\theta)$ qui réalise l'extremum est de l'ordre de $m-h$ seulement, de sorte que notre proposition peut être complétée de la façon suivante:

Si une somme trigonométrique $S_{m-h}(\theta)$ d'ordre $m-h$ ne dépasse pas 1 en valeur absolue en $2m+1$ équidistants

$$\theta_k=\frac{2k\pi}{2m+1},$$

on a pour toute valeur de θ

$$|S_{m-h}(\theta)|\leqslant L=\frac{1}{N}\sum_{\rho=0}^{N-1}\frac{1}{\sin\frac{2\rho+1}{2N}\pi},\tag{9bis}$$

pourvu que

$$N=\frac{2m+1}{2h+1}$$

soit un nombre entier, la valeur L pouvant effectivement être atteinte, si

$$S_{m-h}(\theta)=\frac{\sin\frac{2m+1}{2}\theta}{N}\sum_{\rho=0}^{N-1}\frac{1}{\sin\frac{2h+1}{2}(\theta-\theta_\rho)}.\tag{11}$$

Il suffit d'observer que

$$S_{m-h}(\theta_k)=(-1)^{k+\lambda}=(-1)^\rho \ (\text{où } k=\lambda N+\rho)$$

et que le second membre se réduit à L pour

$$\theta=\frac{2N-1}{2m+1}\pi.$$

L'inégalité (6) permet d'établir la convergence de la formule d'interpolation (1), quelle que soit la fonction continue $f(\theta)$, pourvu que $\frac{2m+1}{2h+1}$ ne croisse pas infiniment.

Soit, en effet,

$$\rho_n = \max |P_n(\theta) - f(\theta)|;$$

où $P_n(\theta)$ est donné par la formule (1), soit d'autre part

$Q_{m-h}(\theta)$ le polynôme trigonométrique d'approximation de $f(\theta)$ d'ordre $m-h$, et $E_{m-h}(f(\theta))$ la meilleure approximation correspondante.

D'après ce qui précède, si on remplace dans le formule (1) $f(\theta_k)$ par $Q_{m-h}(\theta_k)$, on retrouve au premier membre $Q_{m-h}(\theta)$; par conséquent,

$$P_n(\theta) = Q_{m-h}(\theta) +$$

$$+ \frac{1}{(2m+1)(2h+1)} \sum_{0}^{2m} \frac{\sin\frac{2m+1}{2}(\theta-\theta_k)\sin\frac{2h+1}{2}(\theta-\theta_k)}{\sin^2\frac{\theta-\theta_k}{2}} [f(\theta_k) - Q_{m-h}(\theta_k)];$$

d'où, d'après (6),

$$|P_n(\theta) - Q_{m-h}(\theta)| < \sqrt{\frac{2m+1}{2h+1}} E_{m-h}[f(\theta)].$$

Donc,

$$\rho_n < E_{m-h}[f(\theta)] \left[\sqrt{\frac{2m+1}{2h+1}} + 1\right], \tag{12}$$

ce qui prouve notre affirmation.

Bien entendu, en utilisant (9) au lieu de (6) on pourrait améliorer l'évaluation de l'erreur ρ_n de la formule (1), car il est aisé de voir que

$$L \sim \frac{2}{\pi} \int_{\frac{\pi}{2N}}^{\frac{\pi}{2}} \frac{dz}{\sin z} \sim \frac{2}{\pi} \log N, \tag{13}$$

lorsque $N \to \infty$. On en conclut, en particulier, que même, pour $N \to \infty$, la formule (1) converge, lorsque $f(\theta)$ satisfait à la condition de Dini-Lipschitz.

J'observerai que toutes les conclusions se conservent, si la formule (1) est remplacée par

$$P_n(\theta) = \frac{1}{4mh} \sum_0^{2m-1} \frac{\sin m(\theta - \theta_k) \sin h(\theta - \theta_k)}{\sin^2 \frac{\theta - \theta_k}{2}} f(\theta_k), \tag{1bis}$$

où

$$\theta_k = \frac{k\pi}{m} \qquad (k = 0, 1, \dots, 2m-1),$$

et

$$n = m + h - 1$$

2. J'ajouterai encore une proposition qui se ratache au même ordre d'idées:

Si une somme trigonométrique $S_n(\theta)$ d'ordre n atteint son maximum absolu M dans l'intervalle $(0, \alpha)$, où $\alpha < \frac{\pi}{n}$, on a l'inégalité

$$M \leqslant \frac{\sqrt{S_n^2(0) + S_n^2(\alpha) - 2S_n(0)\, S_n(\alpha) \cos n\alpha}}{\sin n\alpha} \tag{14}$$

le signe d'égalité ayant lieu pour

$$S_n(\theta) = \frac{S_n(\alpha) \sin n\theta + S_n(0) \sin n(\alpha - \theta)}{\sin n\alpha}.$$

Montrons d'abord que le valeur de M est bornée supérieurement. A cet effet, formons le somme d'ordre n $Q_n(\theta)$ qui s'écarte le moins de zéro parmi celles qui satisfont aux deux conditions

$$Q_n(0) = 0, \quad Q_n(\theta_0) = 1,$$

où

$$\theta_0 \leqslant \frac{\pi}{2n}.$$

On aura manifestement

$$Q_n(\theta) = \frac{\sin n\theta}{\sin n\theta_0}$$

et l'écart minimum est

$$L = \frac{1}{\sin n\theta_0}; \tag{15}$$

car, s'il existait une somme $\varphi_n(\theta)$, telle que $|\varphi_n(\theta)| < L$, la somme d'ordre u

$$R_n(\theta) = \frac{\sin n\theta}{\sin n\theta_0} - \varphi_n(\theta),$$

qui s'annulle aux points 0 et $\theta_0 < \frac{\pi}{2n}$, aurait encore $2n-1$ racines supérieures à $\frac{\pi}{2n}$ entre les $2n$ points $\frac{2k+1}{2n}\pi$, où $P_n(\theta)$ aurait des signes opposés.

Ainsi, la distance du maximum absolu d'une somme $Q_n(\theta)$ d'ordre n à une racine de $Q_n(\theta) = 0$ n'est pas inférieure à $\frac{\pi}{2n}$.

Il en résulte que les maxima absolus de

$$|S_n(\theta) - S_n(0)| \quad \text{et} \quad |S_n(\theta) - S_n(\alpha)|$$

sont, respectivement, atteints à l'extérieur des intervalles

$$\left(0, \frac{\alpha}{2}\right) \quad \text{et} \quad \left(\frac{\alpha}{2}, \alpha\right);$$

donc, en vertu de (15), en supposant

$$|S_n(0)| \leqslant 1, \quad |S_n(\alpha)| \leqslant 1,$$

on aura

$$M + 1 > \frac{M-1}{\sin \frac{n\alpha}{2}},$$

d'où

$$M < \frac{1 + \sin \frac{n\alpha}{2}}{1 + \sin \frac{n\alpha}{2}}.$$

La valeur de M étant bornée, il existe par conséquent une somme $S_n(\theta)$ pour laquelle M atteint son maximum.

Je dis que le nombre k des points $\theta_1, \theta_2, \ldots, \theta_k$ d'écart maximum (de signe successivement opposé) de cette somme $S_n(\theta)$ extérieurs à $(0, \alpha)$ est au moins $2n-1$.

En effet, soit $\theta_0 < \alpha$ un point intérieur de l'intervalle $(0, \alpha)$, où

$$|S_n(\theta_0)| = M$$

et soit $S_n(\theta_1) > 0$, pour fixer les idées. Examinons d'abord l'hypothèse de k pair (inférieur à $2n-1$); alors la somme trigonométrique

$$\varphi(\theta) = \sin\frac{\theta}{2}\sin\frac{\theta-\beta_0}{2}\sin\frac{\theta-\alpha}{2}\sin\frac{\theta-\beta_1}{2}\cdots\sin\frac{\theta-\beta_{k-1}}{2}$$

d'ordre $\frac{k+2}{2} \leqslant n$, où

$$\beta_0 < \alpha \quad \text{et} \quad \theta_1 < \beta_1 < \theta_2 < \cdots < \beta_{k-1} < \theta_k$$

aura des signes opposés à ceux de $S_n(\theta)$ aux points θ_i $(i > 0)$, et on pourra disposer de β_0 pour avoir $S_n(\theta_0)\varphi(\theta_0) > 0$. Donc, $\lambda > 0$ étant suffisamment petit, la somme

$$S_n(\theta) + \lambda\varphi(\theta)$$

aurait son maximum absolu à l'intérieur de $(0, \alpha)$ supérieur à M.

De même, si $k < 2n-1$ était impair, il suffirait de former la somme

$$S_n(\theta) + \lambda\varphi(\theta)\sin\frac{\theta-\beta_k}{2},$$

où $\beta_k > \theta_k$ d'ordre non supérieur à n car $\frac{k+3}{2} \leqslant n$, pour s'assurer de l'impossibilité de cette autre hypothèse.

Par conséquent, la maximum absolu de $|S_n(\theta)|$ est atteint au moins en $2n$ points; donc, d'après la remarque faite plus haut, la distance entre deux de ses racines successives est égale à $\frac{\pi}{n}$, et par conséquent, on a nécessairement

$$S_n(\theta) = M_0 \cos n(\theta + c), \tag{16}$$

où les constantes M_0 et c se déterminent au moyen des valeurs données $S_n(0)$ et $S_n(\alpha)$.

Ainsi, on a

$$M_0 \cos nc = S_n(0), \quad M_0 \cos n(\alpha + c) = S_n(\alpha),$$

d'où

$$S_n(\theta) = S_n(0)\cos n\theta + \frac{S_n(\alpha) - S_n(0)\cos n\alpha}{\sin n\alpha}\sin n\theta. \tag{17}$$

Donc,

$$M_0 = \frac{\sqrt{S_n^2(0) + S_n^2(\alpha) - 2S_n(0)\, S_n(\alpha) \cos n\alpha}}{\sin n\alpha} \qquad \left(\alpha < \frac{\pi}{n}\right) \tag{18}$$

et on a effectivement

$$M \leqslant M_0. \tag{14bis}$$

c. q. f. d.

En particulier, si

$$S_n(0) = S_n(\alpha) = 1,$$

on a

$$M \leqslant \frac{1}{\cos \frac{n\alpha}{2}}, \quad \left(\alpha < \frac{\pi}{n}\right) \tag{19}$$

l'égalité ayant lieu pour

$$S_n(\theta) = \frac{\cos n\left(\theta - \frac{\alpha}{2}\right)}{\cos \frac{n\alpha}{2}}.$$

Dans ce cas, le maximum absolu est effectivement atteint pour $\theta = \frac{\alpha}{2}$ entre 0 et α.

Mais le raisonnement précédent ne prouve aucunement qu'il doit exister une somme trigonométrique $S_n(\theta)$ prenant des valeurs données quelconques $S_n(0)$ et $S_n(\alpha)$ et ayant son maximum absolu M dans l'intervalle $(0, \alpha)$. Nous avons montré seulement que si une telle somme d'ordre n existe, la somme qui conduit à la plus grande valeur M_0 de ce maximum absolu M est donnée par la formule (17).

Par conséquent, la condition nécessaire et suffisante pour que le maximum absolu puisse être atteint dans l'intervalle $(0, \alpha)$ est que le maximum de (17) se trouve dans cet intervalle.

Donc, pour que le maximum absolu de $S_n(\theta)$ puisse être atteint dans l'intervalle $(0, \alpha)$ il faut et il suffit: que l'on ait en même temps les deux inégalités

$$\frac{S_n(\alpha)}{S_n(0)} \geqslant \cos n\alpha, \quad \frac{S_n(0)}{S_n(\alpha)} \geqslant \cos n\alpha, \tag{20}$$

si

$$\alpha \leqslant \frac{\pi}{2n};$$

que l'une, au moins, des inégalités (20) soit remplie, si

$$\alpha > \frac{\pi}{2n}.$$

Par exemple, si on a $S_n(\alpha) = 1$, $S_n(0) = -\rho$, où $0 < \rho < 1$, le maximum absolu de $S_n(\theta)$ ne pourrait être dans l'intervalle $(0, \alpha)$ que pour $\alpha \geqslant \frac{1}{n} \arccos(-\rho)$.

Corollaire. Si on a

$$|S_n(0)| \leqslant 1, \quad |S_n(\alpha)| \leqslant 1, \tag{21}$$

où $\alpha < \frac{\pi}{n}$, le maximum absolu M de $|S_n(\theta)|$ étant atteint dans $(0, \alpha)$, on a

$$M \leqslant \frac{1}{\cos \frac{n\alpha}{2}}. \tag{19}$$

Cela est évident pour $\alpha \geqslant \frac{\pi}{2n}$, car le maximum de (18), sous les conditions (21), est réalisé pour $S_n(0) = S_n(\alpha) = 1$; mais, grâce aux inégalités (20), pour $\alpha < \frac{\pi}{2n}$, la conclusion subsiste également.

On peut tirer de (19) la conséquence suivante:

Si $|S_n(\theta_k)| \leqslant 1$ en $2\lambda n$ points

$$\theta_k = \frac{k\pi}{\lambda n}$$

équidistants, où $\lambda > 1$, on a pour toute valeur de θ

$$|S_n(\theta)| \leqslant \frac{1}{\cos \frac{\pi}{2\lambda}}. \tag{22}$$

D'ailleurs, le signe d'égalité sera effectivement réalisé pour λ entier par la somme

$$S_n(\theta) = \frac{\cos\left(n\theta - \frac{\pi}{2\lambda}\right)}{\cos \frac{\pi}{2\lambda}}.$$