И. Г. Карелина, Ю. В. Покорный, О функции Грина краевой задачи на графе,
Дифференц. уравнения, 1994, том 30, номер 1, 41–47

https://www.mathnet.ru/de8268

ЯНВАРЬ 1994 г., ТОМ 30, № 1

УДК 517.927.6

И. Г. КАРЕЛИНА, Ю. В. ПОКОРНЫЙ

О ФУНКЦИИ ГРИНА КРАЕВОЙ ЗАДАЧИ НА ГРАФЕ

В работах [1, 2] на связном конечном открытом геометрическом графе (топологической сети) $\Gamma\subset\mathbf{R}^n$ введено уравнение

$$Lu\equiv-(p(x)u')'+q(x)u=f(x)\quad(x\in\Gamma),\tag{1}$$

возникающее в различных задачах физики. В предположении неосцилляции L на Γ доказана неотрицательность функции Грина $G(x, s)$ оператора L при краевых условиях

$$u|_{\partial\Gamma}=0.\tag{2}$$

Ниже на основе детального анализа функции Грина доказывается обратное утверждение: неосцилляция L и необходима для неотрицательности $G(x, s)$.

1. Излагаемый в [1, 2] подход к уравнению (1) на графе предлагает в качестве решений (1) рассматривать скалярные функции, заданные на всем Γ и обладающие в каждой внутренней вершине графа свойствами непрерывности и специальной гладкости. Этот подход, чрезвычайно удобный для естественного описания качественных свойств решений, мало эффективен при построении и анализе регулярных свойств функции Грина. Ниже нам иногда удобнее будет трактовать уравнение (1) в виде системы обычных уравнений, каждое из которых задано на одном из ребер Γ. Напомним некоторые понятия из [1, 2].

Открытый связный граф Γ состоит из конечного набора $\{\gamma_i\}_{i=1}^m$ интервалов (ребер) и совокупности $J(\Gamma)$ некоторых их общих концов (внутренних вершин Γ). Множество $\partial\Gamma$ остальных вершин — относительная граница Γ. Связное пересечение Γ с любым открытым множеством из $\mathbf{R}^n$ называется подграфом Γ. Для любой функции $u:\Gamma\to\mathbf{R}^1$ через $u_i(\cdot)$ обозначается ее сужение на ребро γ_i, т. е. полагается $u_i(x)=u(x)$ при $x\in\gamma_i$ и $u_i(x)\equiv0$ при $x\notin\gamma_i$.

Предположения об уравнении (1): функции $p(\cdot)$, $q(\cdot)$, $f(\cdot)$ равномерно непрерывны на замыкании каждого ребра γ_i, причем $\inf\limits_{x\in\Gamma}p(x)>0$ и $p(\cdot)$ равномерно дифференцируема на γ_i $(i=\overline{1, m})$.

Под решением уравнения (1) понимается любая функция $u:\Gamma\to\mathbf{R}^1$, удовлетворяющая (1) на каждом ребре γ_i, непрерывная в целом на Γ, т. е. в каждой из внутренних вершин удовлетворяющая равенствам

$$u_i(a)=u_j(a)\quad(i, j\in\mathfrak{N}(a),\ a\in J(\Gamma))\tag{3}$$

и условию гладкости

$$\sum_{i=1}^m\alpha_i(a)u_i'(a+0)=0\quad(a\in J(\Gamma)),\tag{4}$$

где $\alpha(a)=\{\alpha_i(a)\}_{i=1}^m$ — приписываемый каждой вершине $a\in J(\Gamma)$ набор положительных чисел, а через $u_i'(a+0)$ обозначена производная $u(\cdot)$

в точке a при параметризации γ_i в направлении «от a». В (3) через $\mathfrak{N}(a)$ обозначено множество индексов ребер, примыкаемых к вершине a.

Если уравнение (1) переписать в виде системы

$$-(p_i(x)u_i')'+q_i(x)u_i=f_i(x) \quad (x\in\gamma_i,\ i=\overline{1,m}) \qquad (1^*)$$

из m уравнений, то задачу (1), (2) можно рассматривать как краевую задачу (1*), (2) — (4). Несложно проверяется, что последняя задача замкнута, т. е. число скалярных условий в (2) — (4) совпадает с порядком $2m$ системы (1*). Задачу (1*), (2) — (4), а точнее, условия (3), (4) нам удобно рассматривать на элементах из произведения $\prod_{i=1}^{m} C^1(\gamma_i)$ пространств непрерывно дифференцируемых на γ_i функций.

Обозначим через $l_1(u),\dots,l_{2m}(u)$ произвольным образом перенумерованные функционалы, порождающие краевые условия (2) — (4), так что эти условия примут вид $l_i(u)=0$ $(i=\overline{1,2m})$. Для того чтобы задача (1*) с условиями $l_k(u)=c_k$ при любых f_i, c_k была однозначно разрешима, необходимо и достаточно, согласно общей теории, чтобы соответствующая однородная задача

$$-(p(x)u')'+q(x)u=0 \quad (x\in\overset{0}{\Gamma}=\Gamma\backslash J(\Gamma)) \qquad (1^\circ)$$

с условиями $l_i(u)=0$ имела только тривиальное решение.

2. В настоящем пункте изучается вопрос о существовании функции Грина исходной задачи в случае невырожденности последней и главное устанавливаются ее важнейшие свойства. Под функцией Грина мы понимаем при этом функцию двух переменных $G(x,s)$, заданную на $\Gamma\times\overset{0}{\Gamma}$ и такую, что при каждой $f(\cdot)$, непрерывной на графе, решение исходной краевой задачи может быть представлено в виде

$$u(x)=\int_\Gamma G(x,s)f(s)\,ds. \qquad (5)$$

Тем самым определение функции Грина предполагает наличие свойств, обеспечивающих суммируемость в подынтегральном выражении. Оказывается, что $G(x,s)$ может быть определена уже в классе функций, непрерывных на $\Gamma\times\overset{0}{\Gamma}$.

Теорема 1. *У невырожденной задачи (1) — (4) существует функция Грина $G(x,s)$, единственная в классе непрерывных на $\Gamma\times\overset{0}{\Gamma}$ функций и такая, что*

1° при каждом фиксированном $s=s_0\in\overset{0}{\Gamma}$ функция $g(x)=G(x,s_0)$ внутри каждого ребра $\gamma_i\in\Gamma$ $(i=\overline{1,m})$ является решением однородного уравнения (1°) при $x\neq s$;

2° во внутренних вершинах $a\in J(\Gamma)$ эта функция $g(x)=G(x,s_0)$ удовлетворяет условию гладкости $\sum_{i=1}^{m}\alpha_i(a)g_i'(a+0)=0$;

3° в граничных вершинах $b\in\partial\Gamma$ функция $g(x)=G(x,s_0)$ удовлетворяет условию Дирихле (2) $g|_{\partial\Gamma}=0$;

4° в точках $x=s_0\in\gamma_i$ сумма производных $g(x)=G(x,s_0)$ (посчитанных в обоих направлениях «от s_0») равна $-1/p_i(s_0)$;

5° пусть $s_0\in J(\Gamma)$ и γ_i— одно из ребер, примыкающих к s_0. Тогда функция

$$g^i(x)=\lim_{s\to s_0,\ s\in\gamma_i} G(x,s) \qquad (6)$$

при $x\neq s_0$ является решением однородного уравнения $Lu=0$, непрерывна на всем Γ, удовлетворяет условиям гладкости (4) в каждой из внутренних *вершин $a \in J(\Gamma)$, отличных от s_0, а при $x = s_0$ справедливо равенство*

$$\sum_{j=1}^{m} \alpha_j(s_0)\,(g^i)'_j(s_0+0) = -\frac{\alpha_i(s_0)}{p_i(s_0)}. \tag{7}$$

Доказательство. Заданную на $\overset{0}{\Gamma} \times \overset{0}{\Gamma}$ функцию $H(x, s)$ назовем фундаментальным решением однородного уравнения (1°), если для любой $f \in C(\Gamma)$ функция $u(x) = \int\limits_{\overset{0}{\Gamma}} H(x, s) f(s)\,ds$ удовлетворяет на $\overset{0}{\Gamma}$ уравнению (1).

Очевидно, функция Грина исходной задачи, если она существует, должна являться фундаментальным решением.

Доказательство теоремы мы проведем явным построением функции Грина. В классическом случае одномерных задач обычно в качестве фундаментального решения берут функцию Коши. (Здесь под функцией Коши, пользуясь терминологией для уравнений старших порядков, мы понимаем функцию Грина задачи Коши.) В нашем случае, когда граф состоит из набора ребер, можно было бы на каждом ребре ввести соответствующую функцию Коши. Однако это потребовало бы введения и фиксации на каждом ребре ориентации, что неизбежно привело бы к большим аналитическим издержкам. Поэтому нам удобнее воспользоваться приемом, не требующим явно внесения ориентации на граф.

На каждом ребре γ_i рассмотрим скалярное уравнение

$$-(p_i(x)u_i')' + q_i(x)u_i = f_i(x) \quad (x \in \gamma_i).$$

На замыкании каждого ребра $\bar{\gamma}_i$, очевидно, существует пара точек τ_i, σ_i таких, что условия $u_i(\tau_i) = u_i(\sigma_i) = 0$ дополняют последнее уравнение до невырожденной на этом ребре γ_i краевой задачи. Обозначим через $Q_i(x, s)$ ее функцию Грина, заданную на $\gamma_i \times \gamma_i$.

Лемма 1. *Функция $H(x, s)$, определяемая формулой*

$$H(x, s) = \begin{cases} Q_i(x, s), & (x, s) \in \gamma_i \times \gamma_i \, (i = \overline{1, m}), \\ 0, & (x, s) \notin \bigcup\limits_{i=1}^{m} \gamma_i \times \gamma_i, \end{cases} \tag{8}$$

является фундаментальным решением уравнения (1).*

Доказательство проводится непосредственной проверкой.

Доопределив функцию $Q_i(x, s)$ на $\overset{0}{\Gamma} \times \overset{0}{\Gamma}$ нулями вне $\gamma_i \times \gamma_i$, нам удобно будет представить $H(x, s)$ в виде $H(x, s) = \sum\limits_{i=1}^{m} Q_i(x, s)$.

Лемма 2. *Пусть $\{\varphi^i(x)\}_{i=1}^{2m}$ — фундаментальная система решений уравнения (1°), удовлетворяющая условию $l_j(\varphi^i) = \delta_{ji}$. Тогда функция, задаваемая равенством*

$$G(x, s) = H(x, s) - \sum_{i=1}^{2m} l_i(H(\cdot, s))\,\varphi^i(x), \tag{9}$$

является функцией Грина задачи (1) — (4).

Доказательство. По определению функций $Q_j(x, s)$ к каждой из них можно применить любой из функционалов l_i. Поэтому формула (9) корректна. Более того, функции

$$\psi^i(s) = l_i(H(\cdot, s)) \tag{10}$$

наверняка непрерывны в $\overset{0}{\Gamma}$ и, очевидно, имеют на границе каждого ребра γ_j конечные пределы (в силу легко проверяемого равенства $\lim\limits_{s \to a} (Q_j)'_x(a, s) = \frac{1}{p(a)}$, $a \in \bar{\gamma}_j \setminus \gamma_j$). Поэтому все ψ^i суммируемы в Γ. Значит, формула

(9) определяет фундаментальное решение уравнения (1^*). Нетрудно видеть также, что при каждом $s \in \overset{0}{\Gamma}$ задаваемая формулой (9) функция $G(x, s)$ удовлетворяет по x на границе $\overset{0}{\Gamma}$ как граничным условиям Дирихле (при $x \in \partial\Gamma$), так и условиям непрерывности и гладкости во внутренних вершинах, т. е. при $x \in J(\Gamma)$, $x \neq s$. Значит, и функция $u(x)$, определяемая равенством (5), является решением исходной краевой задачи. Лемма доказана.

Из формулы (9) легко видеть, что $G(x, s)$ непрерывна на $\Gamma \times \overset{0}{\Gamma}$. Единственность функции Грина в классе непрерывных на $\Gamma \times \overset{0}{\Gamma}$ функций следует из невырожденности исходной задачи.

При каждом $s_0 \in \overset{0}{\Gamma}$ функция $g(x) = G(x, s_0)$ обладает в силу представления (9) свойствами 1°—3°. Свойство 4° следует в силу (8) и (9) из аналогичного свойства функции $Q_i(x, s)$. Покажем свойство 5°.

Обозначим $g^i(x) = \lim\limits_{\substack{s \to s_0 \\ s \in \gamma_i}} G(x, s)$, где $s_0 \in J(\Gamma)$. Из (8) — (10) следует, что

$$g^i(x) = -\sum_{j=1}^{2m} \psi^{ji} \varphi^j(x) + \begin{cases} \lim\limits_{\substack{s \to s_0 \\ s \in \gamma_i}} Q_i(x, s), & x \in \gamma_i, \\ 0, & x \notin \gamma_i, \end{cases} \tag{11}$$

где $\psi^{ji} = \lim\limits_{\substack{s \to s_0 \\ s \in \gamma_i}} l_j(H(\cdot, s))$.

Уже из (11) легко видеть, что функция $g^i(x)$ удовлетворяет на $\overset{0}{\Gamma}$ однородному уравнению (1°), непрерывна в каждой внутренней вершине $a \in J(\Gamma)$. Легко проверяется также, что $g^i(x)$ удовлетворяет условиям гладкости (4) в каждой точке $a \in J(\Gamma)$, отличной от s_0. Установим свойство (7).

Пусть $s \in \gamma_i$. Тогда из свойства 2° следует, что

$$-\alpha_i G_i'(s_0+0, s) = \sum_{j \neq i} \alpha_j G_j'(s_0+0, s),$$

где через $G_i'(s_0+0, s)$ обозначена производная по x функции $G_i(x, s)$, являющейся сужением по переменной x функции Грина $G(x, s)$ на ребро γ_i.

С другой стороны, в силу свойства 4° справедливо равенство

$$G_i'(s+0, s) + G_i'(s-0, s) = -\frac{1}{p_i(s)}, \tag{12}$$

где слева оба слагаемых суть односторонние производные по x функции $G_i(x, s)$, вычисленные в точке $x = s$ при локальной ориентации этой точки в двух противоположных направлениях: $s+0$ означает ориентацию от s в сторону вершины s_0, а $s-0$ символизирует противоположную ориентацию.

При $x, s \in \gamma_i$ функция $G_i(x, s)$ отличается от функции $Q_i(x, s)$, определенной в начале доказательства теоремы, слагаемым, производная которого по x равномерно непрерывна на $\gamma_i \times \gamma_i$. Поэтому $G_i(x, s)$ наследует свойство $Q_i(x, s)$, которое заключается в следующем. Упорядочим направлением «от s» каждый из интервалов, на которые распадается γ_i при выбрасывании s; тогда на каждом из треугольников, на которые распадается квадрат $\gamma_i \times \gamma_i$ при выбрасывании его диагонали $x = s$, функция $Q_i'(x, s)$ допускает доопределение на границе этого треугольника до функции, непрерывной на замыкании этого треугольника. Поэтому первое слагаемое в (12) стремится при $s \to s_0$ к $G_i'(s_0+0, s_0)$. В то же время предел второго слагаемого в (12) при $s \to s_0$ совпадает с пределом $G_i'(s_0+0, s)$ при $s \to s_0$. Поэтому свойство (7) получается из (12) предельным переходом. Теорема доказана.

Теорема 2. *Для того чтобы функция Грина задачи (1) — (4) была равномерно непрерывна по совокупности переменных на* $\Gamma \times \Gamma$, *необходимо и достаточно, чтобы для каждой внутренней вершины* $a \in J(\Gamma)$ *отношение* $\alpha_i(a)/p_i(a)$ *не зависело от* $i \in \mathfrak{N}(a)$.

Доказательство. Из представления (9) функции Грина следует ее совокупная непрерывность в каждой из точек множества $\Gamma \times \overset{0}{\Gamma}$. Для доказательства теоремы нам необходимо показать существование предела $G(x, s)$ при $(x, s) \to (x_0, s_0)$ для любой точки (x_0, s_0) такой, что $x_0 \in \Gamma$ и $s_0 \in J(\Gamma) = \Gamma \setminus \overset{0}{\Gamma}$.

Фиксируем $s_0 \in J(\Gamma)$. В представлении (9) функции Грина есть определенный произвол в выборе фундаментального решения $H(x, s)$, построение которого основано на выборе для каждого ребра γ_i произвольной двухточечной невырожденной задачи и использовании ее функции Грина $Q_i(x, s)$ для конструирования $H(x, s)$. Сейчас нам будет удобно считать, что на каждом из ребер, примыкающих к s_0, в качестве одной из двух точек соответствующей двухточечной задачи выбирается сама точка s_0. Тогда автоматически будет $Q_i(x, s_0) \equiv 0$ при всех i, т. е. $H(x, s)$ имеет при $s \to s_0$ равномерный нулевой предел. Так как все $\varphi^i(x)$ непрерывны на Γ, то в силу (9) нам остается обсудить наличие пределов при $s \to s_0$ у функций $l_i(H(\cdot, s)) = \psi^i(s)$.

Пусть функционал l_i соответствует одному из условий (2), т. е.

$$l_i(u) = u(b) \tag{2*}$$

для некоторой граничной вершины $b \in \partial\Gamma$. Можно считать без ограничения общности, что к точке b примыкает лишь одно ребро γ_{j_0}. При $x \in \gamma_{j_0}$ по построению $H(x, s)$ должно быть $H(x, s) = Q_{j_0}(x, s)$, т. е. $\psi^i(s) \equiv Q_{j_0}(b, s)$ и требуемое свойство вытекает из непрерывности функции Грина $Q_{j_0}(x, s)$ двухточечной задачи на γ_{j_0}.

Пусть теперь функционал l_i соответствует одному из условий непрерывности (3) в одной из внутренних вершин $a \in J(\Gamma)$, т. е.

$$l_i(u) = u_\nu(a) - u_\mu(a) \quad (\text{при } \nu, \mu \in \mathfrak{N}(a)). \tag{3*}$$

В этом случае функция $\psi^i(s) = l_i(H(\cdot, s))$ определяется значением $H_\nu(a, s) - H_\mu(a, s)$, предельным для $H(x_\nu, s) - H(x_\mu, s)$ при $x_\nu \in \gamma_\nu$, $x_\mu \in \gamma_\mu$ и $x_\mu, x_\nu \to a$. Но при таких x_μ, x_ν должно быть $H(x_\nu, s) - H(x_\mu, s) = Q_\nu(x_\nu, s) - Q_\mu(x_\mu, s)$. Если при этом s не принадлежит ни одному из ребер γ_ν, γ_μ, то оба слагаемых здесь есть тождественные нули. Если же s принадлежит либо γ_ν, либо γ_μ, то соответствующее слагаемое имеет конечный предел при $s \to a$ в силу совокупной непрерывности функции Грина $Q_j(x, s)$ на квадрате $\gamma_j \times \gamma_j$, причем если $s \to s_0$, то этот совокупный предел равен нулю в силу выбора $Q_j(x, s)$: если $j \in \mathfrak{N}(s_0)$, то $Q_j(x, s_0) \equiv 0$.

Таким образом, для каждого функционала l_i, порождающего любое из условий (2*) или (3*), соответствующая функция $\psi^i(s) = l_i(H(\cdot, s))$ имеет нулевой предел при $s \to s_0$.

Рассмотрим теперь случай, когда l_i соответствует одному из условий гладкости (4), т. е. когда

$$l_i(u) = \sum_{j=1}^{m} \alpha_j(a) u_j'(a+0) \tag{4*}$$

для некоторой внутренней вершины $a \in J(\Gamma)$. Пусть γ_{j_0} — одно из ребер, примыкающих к s_0, т. е. $j_0 \in \mathfrak{N}(s_0)$, и пусть $s \in \gamma_{j_0}$. Если a не примыкает к γ_{j_0}, т. е. $j_0 \notin \mathfrak{N}(a)$, то $H(x, s) \equiv 0$ при x, близких к a, т. е. соответствующая

$\psi^i(s)$ есть тождественный нуль на γ_{j_0}. Если же a примыкает к γ_{j_0}, то

$$\psi^i(s) \equiv l_i(H(\cdot, s)) = \alpha_{j_0}(a) \frac{\partial}{\partial x} Q_{j_0}(a, s). \qquad (13)$$

Если $a \neq s_0$, то точки a и s_0 являются разными концами ребра γ_{j_0}, причем по выбору $Q_{j_0}(x, s)$ должно быть $Q_{j_0}(x, s_0) \equiv 0$. Поэтому в силу непрерывности производной $\frac{\partial}{\partial x} Q_{j_0}(x, s)$ имеет место $\psi^i(s) \to 0$ при $s \in \gamma_{j_0}$ и $s \to s_0$.

Таким образом, для выбранного нами фундаментального решения, специального для точки s_0, в представлении (9) при $s \to s_0$ ненулевой предел может иметь лишь одна функция $\psi^i(s) = l_i(H(\cdot, s))$, порождаемая условием вида (4*) при $a = s_0$. Этот предел многозначен — он зависит от того, вдоль какого из ребер γ_{j_0}, примыкающих к s_0, стремится к s_0 точка s. Согласно (13) и в силу легко проверяемого равенства $\lim\limits_{s \to s_0,\, s \in \gamma_{j_0}} (Q_{j_0})'_x(a, s) = = \frac{1}{p_{j_0}(a)}$ этот предел равен $\alpha_{j_0}(s_0)/p_{j_0}(s_0)$. Для непрерывности $\psi^i(s)$ в точке $s = s_0$ необходимо и достаточно, чтобы этот предел не зависел от $j_0 \in \mathfrak{N}(s_0)$, т. е. $\alpha_\nu(s_0)/p_\nu(s_0) = \alpha_\mu(s_0)/p_\mu(s_0)$ $(\nu, \mu \in \mathfrak{N}(s_0))$, что и означает требуемое.

3. Напомним, что пучностью [3] нетривиального решения $u(\cdot)$ уравнения $Lu = 0$ называется подграф $\Gamma_0 \subset \Gamma$ такой, что $u|_{\partial\Gamma_0} = 0$ и $u(\cdot)$ не имеет нулей в Γ_0. В скалярном случае пучность — интервал между соседними нулями. L и уравнение $Lu = 0$ называют неосциллирующим на Γ, если ни одно решение уравнения $Lu = 0$ не имеет пучности в Γ. Если L не осциллирует на Γ, то задача

$$Lu = f, \ u|_{\partial\Gamma} = 0 \qquad (14)$$

невырождена, а ее функция Грина $G(x, s)$ строго положительна на $\Gamma \times \Gamma$. Оказывается, это свойство обратимо.

Теорема 3. *Пусть $G(x, s)$ — функция Грина задачи (14). Тогда следующие свойства эквивалентны:*

а) $G(x, s)$ неотрицательна на $\Gamma \times \Gamma$;

б) $G(x, s) > 0$ на $\Gamma \times \Gamma$ и $u'(a) \neq 0$ при всех $a \in \partial\Gamma$;

в) L не осциллирует на Γ.

Доказательство. Импликация б)$\to$а) тривиальна, а в)$\to$б) установлена в [2]. Покажем, что а)$\to$б).

Пусть $s_0 \in \Gamma$ и $g(x) = G(x, s_0)$. Предположим вначале, что $s_0 \in \overset{0}{\Gamma}$, т. е. $s_0 \notin J(\Gamma)$. Будем пользоваться свойствами 1°—4° теоремы 1. Если $g(x_0) = 0$ при некотором $x_0 \in \overset{0}{\Gamma}$ и $x_0 \neq s_0$, то в силу неравенства $g(x) \geqslant 0$, справедливого в окрестности x_0, имеем $g'_\nu(x_0) = 0$ и поэтому $g(x) \equiv 0$ на ребре γ_i, содержащем x_0, если, конечно, $s_0 \notin \gamma_i$. Если же $s_0 \in \gamma_i$, то $g(x)$ есть тождественный нуль на той из двух частей $\gamma_i \setminus \{s_0\}$, которая содержит x_0. В силу неотрицательности $g(x)$ на второй из этих частей мы получаем противоречие 4°. В случае же $s_0 \notin \gamma_i$ из равенства $g(x) = 0$ на γ_i делаем вывод о том, что $g'_i(a_i) = g'_i(b_i) = 0$, где через a_i и b_i обозначены концы γ_i. На всех ребрах, примыкающих к a_i и b_i, $g(x)$ неотрицательна, что влечет за собой в силу 1° равенство $g(x) \equiv 0$ на этих ребрах.

Продолжая этот процесс, доберемся до ребра, содержащего s_0, на котором противоречие получается аналогично изложенному выше. Если $g'(b) = 0$ при некотором $b \in \partial\Gamma$, то вследствие 3° $g(x) \equiv 0$ в окрестности b на ребре, примыкающем к b, что противоречит предыдущему.

Аналогичным образом с учетом 5° устанавливается свойство б) и для предельных значений $G(x, s)$ при $s_0 \in J(\Gamma)$ и при стремлении s к s_0 вдоль одного из примыкающих к s_0 ребер. Значит, а)$\to$б).

Покажем теперь, что б)$\to$в). Обозначим через $u_0(x)$ решение задачи (14) при $f(x) \equiv 1$, а через $v_0(x)$ — решение той же задачи при $f(x) \equiv$

$\equiv u_0(x)$. Так как

$$u_0(x)=\int_\Gamma G(x,s)\,ds, \quad v_0(x)=\int_\Gamma G(x,s)\,u_0(s)\,ds,$$

то в силу б) обе функции $u_0(\cdot)$ и $v_0(\cdot)$ строго положительны на Г и имеют ненулевые производные в точках $\partial\Gamma$. Поэтому их отношение $r(x)=$ $=u_0(x)/v_0(x)$ равномерно непрерывно на Г. Тем самым функция $v_0(x)$ оказывается решением уравнения $Lu=ru$, т. е. $-(pv_0')'+(q-r)v_0=0$, причем $v_0|_{\partial\Gamma}=0$ и $v_0(x)>0$ на Г, т. е. Г является пучностью для $v_0(\cdot)$. При этом $r(x)>0$ на Г. Поэтому и в силу аналога теоремы Штурма на графе [2] уравнение $Lu=0$ не осциллирует на Г. Теорема доказана.

Литература

1. Пенкин О. М., Покорный Ю. В. // Дифференц. уравнения. 1988. Т. 24, № 4. С. 701—703.
2. Покорный Ю. В., Пенкин О. М. // Дифференц. уравнения. 1989. Т. 25, № 7. С. 1141—1150.
3. Покорный Ю. В. // Докл. расширенных заседаний семинара института прикладной математики им. И. Н. Векуа. Тбилиси, 1988. Т. 3, № 3. С. 139—142.

Институт математики Воронежского государственного университета

Поступила в редакцию 20 мая 1991 г.