Г. А. Бакай, Большие уклонения для обрывающегося обобщенного процесса восстановления, *Теория вероятн. и ее примен.*, 2021, том 66, выпуск 2, 261–283

DOI: 10.4213/tvp5342

Том 66 **ТЕОРИЯ ВЕРОЯТНОСТЕЙ И ЕЕ ПРИМЕНЕНИЯ 2021** **Выпуск 2**

БАКАЙ Г. А.[*]

БОЛЬШИЕ УКЛОНЕНИЯ ДЛЯ ОБРЫВАЮЩЕГОСЯ ОБОБЩЕННОГО ПРОЦЕССА ВОССТАНОВЛЕНИЯ[1)]

Пусть случайные векторы $(\xi(i),\eta(i))\in\mathbf{R}^{d+1}$, $i\in\mathbf{N}$, являются независимыми и одинаково распределенными, $\xi(i)\in\mathbf{R}^d$ — случайные векторы, $\eta(i)$ — несобственные неотрицательные случайные величины, $\mathbf{P}(\eta(i)=+\infty)\in(0,1)$. Предполагается, что распределение вектора $(\xi(1),\eta(1))$ при условии $\{\eta(1)<+\infty\}$ удовлетворяет условию Крамера.

Обрывающимся обобщенным процессом восстановления называем процесс $Z_T=\sum_{k=1}^{N_T}\xi(k)$, где $N_T=\max\{k\in\mathbf{N}\colon \eta(1)+\dots+\eta(k)\leqslant T\}$ — процесс восстановления, построенный по несобственным случайным величинам $\eta(i)$. В работе найдены точные асимптотики вероятностей

$$\mathbf{P}\bigl(Z_T\in I_{\Delta_T}(x)\bigr)\quad \text{и}\quad \mathbf{P}(Z_T=x)$$

в нерешетчатом и сильно арифметическом случаях соответственно; здесь $I_{\Delta_T}(x)=\{y\in\mathbf{R}^d\colon x_j\leqslant y_j<x_j+\Delta_T,\ j=1,\dots,d\}$ и Δ_T — достаточно медленно стремящаяся к нулю положительная функция.

Ключевые слова и фразы: обобщенный процесс восстановления, большие уклонения, условие Крамера, обрывающиеся процессы восстановления.

DOI: https://doi.org/10.4213/tvp5342

1. Введение. Пусть $X=(\xi,\eta), X(1)=(\xi(1),\eta(1)),\dots$ — независимые одинаково распределенные векторы со значениями в $\mathbf{R}^{d+1}$, при этом ξ есть d-мерный случайный вектор, а η — неотрицательная несобственная случайная величина, $\mathbf{P}(\eta=+\infty)\in(0,1)$. Элементы пространства $\mathbf{R}^{d+1}$ будем обозначать (h,t), где $h=(h_1,\dots,h_d)\in\mathbf{R}^d$, $t\in\mathbf{R}$. Евклидову норму вектора h будем обозначать $\|h\|$. Скалярное произведение в $\mathbf{R}^d$ будем обозначать $\langle\,\cdot\,,\cdot\,\rangle$.

[*]Математический институт им. В. А. Стеклова Российской академии наук, Москва, Россия; e-mail: gavrik_lur_bakay@mail.ru

[1)]Исследование выполнено за счет гранта Российского научного фонда (проект № 19-11-00111) в Математическом институте им. В. А. Стеклова Российской академии наук.

Будем говорить, что распределение вектора $X = (\xi, \eta)$ *удовлетворяет условию Крамера*, если функция

$$R(h,t) = \mathbf{E}\big(\exp(\langle h, \xi\rangle + t\eta);\, \eta < +\infty\big)$$

определена на множестве $A \subseteq \mathbf{R}^{d+1}$,

$$A = \{(h,t) \in \mathbf{R}^{d+1} \colon R(h,t) < +\infty\},$$

и его внутренность $\operatorname{int} A$ непуста.

Пусть

$$N_T = \max\{k \colon \eta(1) + \cdots + \eta(k) \leqslant T\}$$

— процесс восстановления, построенный по величинам $\eta(i)$, $i \in \mathbf{N}$, и

$$Z_T = \sum_{i=1}^{N_T} \xi(i)$$

— *обобщенный процесс восстановления.*

Большие уклонения для собственных обобщенных процессов восстановления изучались в ряде работ А. А. Боровкова, А. А. Могульского и Е. И. Прокопенко, где наряду с Z_T рассматривался также процесс Y_T, задаваемый формулой $Y_T = \sum_{i=1}^{N_T+1} \xi(i)$, в более общем неоднородном случае, когда распределение вектора $(\xi(1), \eta(1))$ отличается от остальной последовательности. В нерешетчатом одномерном ($d = 1$) случае в работах [1], [2] получены точные асимптотики больших уклонений в интегро-локальной форме для процессов Z_T и Y_T в *регулярной зоне уклонений*, а также асимптотики вероятностей больших уклонений для конечномерных распределений процессов.

В многомерном ($d \geqslant 2$) нерешетчатом случае в цикле статей [3]–[5] установлены аналоги этих результатов для процесса Z_T в *регулярной* (см. [3]) и *нерегулярной зонах уклонений* (см. [4]). В работе [5] получены точные асимптотики больших уклонений для процесса Y_T.

В арифметическом случае аналоги этих результатов имеются в работе [6] (в одномерном случае) и в работе [7] (в многомерном случае).

Отметим, что в работах [1]–[7] используется метод, основанный на анализе асимптотики меры восстановления. Тот же подход применяется и в данной работе (см. лемму 7).

Часть результатов работ [1]–[3], [6], [7] были также получены в [8]. В работе [8] не рассматривался процесс Y_T, в то же время там обсуждались приложения полученных результатов к последовательностям с регенерацией, в частности к марковским цепям.

В основной теореме 1 настоящей статьи указываются точные асимптотики в нерешетчатом и сильно арифметическом случаях:

$$\mathbf{P}(Z_T \in I_{\Delta_T}(x)) \sim \Delta_T^d \frac{F_1(x/T)}{T^{d/2}} \exp\biggl(-L\Bigl(\frac{x}{T}\Bigr)T\biggr), \qquad T \to \infty,$$

$$\mathbf{P}(Z_T = x) \sim q_\xi \frac{F_2(x/T)}{T^{d/2}} \exp\biggl(-L\Bigl(\frac{x}{T}\Bigr)T\biggr), \qquad T \in q_\eta \mathbf{Z}, \quad T \to \infty,$$

соответственно.

Эти соотношения выполняются равномерно по $x = x(T)$ таким, что $x/T \in K_1' \subset B_1'$, где K_1' — произвольное компактное подмножество множества B_1', определенного в (2.14). Функции L, F_1 и F_2 определены в (3.3), (3.5) и (3.6) соответственно.

В описанном случае $x/T \in K_1' \subset B_1'$ результат по форме совпадает с результатами работ [1]–[3], [6], [7] и [8], в которых рассматривался собственный случай ($\mathbf{P}(\eta < +\infty) = 1$). При этом накладывалось дополнительное условие $t_0(h_{x/T}) < \widehat{t}$, которое в рассматриваемом нами несобственном случае ($\mathbf{P}(\eta < +\infty) < 1$) не требуется.

Если же $x = x(T)$ изменяется таким образом, что $x/T \in K_2'$, где K_2' — произвольное компактное подмножество множества B_2', определенного в (2.15), то асимптотика имеет качественно иной вид (теорема 2):

$$\mathbf{P}(Z_T \in I_{\Delta_T}(x)) \sim \Delta_T^d \frac{F_0(x/T)}{T^{(d-1)/2}} \exp\biggl(-L_0\Bigl(\frac{x}{T}\Bigr)T\biggr), \qquad T \to \infty,$$

$$\mathbf{P}(Z_T = x) \sim q_\xi \frac{F_0(x/T)}{T^{(d-1)/2}} \exp\biggl(-L_0\Bigl(\frac{x}{T}\Bigr)T\biggr), \qquad T \in q_\eta \mathbf{Z}, \quad T \to \infty,$$

в нерешетчатом и сильно арифметическом случаях соответственно. Эти соотношения выполняются равномерно по $x/T \in K_2'$. Функции L_0 и F_0 определены соответственно в (3.14) и (3.16).

Работа организована следующим образом. В п. 2 вводятся основные обозначения. В п. 3 сформулированы теоремы 1 и 2; их доказательства даны в п. 4. В п. 5 приведены формулировки вспомогательных утверждений; их доказательства содержатся в п. 6.

2. Предварительные сведения. Пусть $X = (\xi, \eta)$ — случайный вектор, $\xi \in \mathbf{R}^d$, $\eta \in \mathbf{R} \cup \{+\infty\}$, причем $\mathbf{P}(\eta = +\infty) < 1$. Будем говорить, что распределение *собственное*, если $\mathbf{P}(\eta = +\infty) = 0$, в противном случае оно называется *несобственным*.

Будем говорить, что распределение X удовлетворяет *условию Крамера*, если функция

$$R(h,t) := \mathbf{E}\bigl(\exp(\langle h, \xi\rangle + t\eta);\, \eta < +\infty\bigr) \tag{2.1}$$

определена на множестве

$$A := \{(h,t) \in \mathbf{R}^{d+1} \colon R(h,t) < +\infty\}, \tag{2.2}$$

внутренность которого предполагается непустой. В силу неотрицательности случайной величины η для произвольного $(h_0, t_0) \in A$ функция $R(h_0, \cdot\,)$ строго монотонна на луче $(-\infty, t_0]$ и $\lim_{s\to-\infty} R(h_0, s) = 0$.

Введем обозначения

$$S_k^\xi = \sum_{i=1}^{k} \xi(i), \quad S_k^\eta = \sum_{i=1}^{k} \eta(i), \qquad k \in \mathbf{N}.$$

Для произвольных $(h, t) \in A$, $k \in \mathbf{N}$ и таких множеств $U \in \mathcal{B}(\mathbf{R}^d)$ и $V \in \mathcal{B}(\mathbf{R})$, что $\sup\{s \in \mathbf{R}\colon s \in V\} < +\infty$, справедливо неравенство

$$R^k(h,t) = \mathbf{E}\exp\bigl(\langle h, S_k^\xi\rangle + tS_k^\eta\bigr) \geqslant \inf_{u\in U,\, v\in V} e^{\langle h,u\rangle + tv}\,\mathbf{P}\bigl(S_k^\xi \in U,\, S_k^\eta \in V\bigr),$$

откуда следует, что

$$\mathbf{P}\bigl(S_k^\xi \in U,\, S_k^\eta \in V\bigr) \leqslant R^k(h,t) \sup_{u\in U,\, v\in V} e^{-(\langle h,u\rangle + tv)}. \tag{2.3}$$

Функция $R(h,t)$ является положительной и выпуклой на множестве A и аналитической на $\operatorname{int} A$. Обозначим градиент и матрицу Гессе функции $\ln R(h,t)$ следующим образом:

$$M(h,t) := \operatorname{grad}\ln R(h,t), \qquad \Sigma^2(h,t) := (\ln R(h,t))''. \tag{2.4}$$

Функцией уклонений вектора X будем называть функцию

$$\Lambda(\theta,\tau) := \sup_{(h,t)}\bigl(\langle h,\theta\rangle + t\tau - \ln R(h,t)\bigr). \tag{2.5}$$

Положим

$$A' := \{M(h,t)\colon (h,t) \in \operatorname{int} A\}. \tag{2.6}$$

На множестве A' справедливо следующее представление (см. [9]):

$$\Lambda(\theta,\tau) = \langle h(\theta,\tau), \theta\rangle + t(\theta,\tau)\tau - \ln R(h(\theta,\tau), t(\theta,\tau)),$$

где

$$\begin{gathered} M(h(\theta,\tau), t(\theta,\tau)) = (\theta,\tau), \qquad \operatorname{grad}\ \Lambda(\theta,\tau) = (h(\theta,\tau), t(\theta,\tau)), \\ \Sigma^{-2}(h(\theta,\tau), t(\theta,\tau)) := (\Lambda(\theta,\tau))'' = \bigl(\Sigma^2(h(\theta,\tau), t(\theta,\tau))\bigr)^{-1}. \end{gathered} \tag{2.7}$$

В последнем равенстве под второй производной подразумевается матрица Гессе функции $\Lambda(\theta,\tau)$.

Назовем собственное распределение случайной величины ζ *решетчатым*, если найдутся такие $a, b \in \mathbf{R}$, что $\mathbf{P}(\zeta \in a + b\mathbf{Z}) = 1$. В противном случае собственное распределение будем называть *нерешетчатым*. Собственное распределение вектора X будем называть нерешетчатым, если для произвольного вектора $e \in \mathbf{R}^{d+1}$ распределение случайной величины $\langle X, e\rangle$ нерешетчатое.

Назовем собственное распределение вектора X *сильно арифметическим*, если выполнены следующие условия:

1) распределение невырождено, т.е. $\langle X, e\rangle$ не является константой ни для какого $e \in \mathbf{R}^{d+1}$;

2) распределение вектора сильно решетчато, т.е. найдутся такие матрица S и вектор b, что

$$\mathbf{P}(X \in b + S\mathbf{Z}^{d+1}) = 1;$$

будем считать, что b и S выбираются таким образом, что S имеет наибольший возможный определитель;

3) решетка распределения X “вертикальна”, т.е. $S_{i,d+1} = S_{d+1,j} = 0$ для $1 \leqslant i, j \leqslant d$;

4) величину b в условии 2) можно выбрать равной нулю.

Множество $S\mathbf{Z}^{d+1}$ назовем решеткой распределения X. Положим $q_\eta := |S_{d+1,d+1}|$, $q_\xi := |\det S|/q_\eta$. Пусть

$$I_\Delta(x) := \{y \in \mathbf{R}^d \colon x_j \leqslant y_j < x_j + \Delta,\ j = 1, \dots, d\}, \qquad x \in \mathbf{R}^d, \quad \Delta > 0.$$

Несобственное распределение вектора X будем называть нерешетчатым или сильно арифметическим, если собственное распределение $\widehat{X}$, задаваемое формулой

$$\mathbf{P}(\widehat{X} \in A) = \mathbf{P}(X \in A \mid \|X\| < +\infty), \qquad A \in \mathcal{B}(\mathbf{R}^{d+1}),$$

является нерешетчатым или сильно арифметическим соответственно; в последнем случае его решеткой назовем решетку распределения $\widehat{X}$.

Теорема A (см. [10])**.** 1) *Пусть собственное распределение вектора X нерешетчатое и удовлетворяет условию Крамера. Тогда существует такая последовательность $\widehat{\Delta}_n > 0$, $\widehat{\Delta}_n \to 0$, что для произвольной последовательности $\Delta_n > \widehat{\Delta}_n$, $\Delta_n \to 0$, при $n \to \infty$ выполнено соотношение*

$$\begin{aligned}\mathbf{P}\bigl(S_n^\xi \in I_{\Delta_n}(x),\ S_n^\eta \in [s, s+\Delta_n)\bigr)&\\ \sim \frac{\Delta_n^{d+1} \exp(-\Lambda(x/n, s/n)n)}{(\sqrt{2\pi n})^{d+1}\sqrt{\det(\Sigma^2(h(x/n,s/n), t(x/n,s/n)))}}&.\end{aligned} \tag{2.8}$$

2) *Пусть собственное распределение X сильно арифметическое и удовлетворяет условию Крамера. Тогда при $n \to \infty$*

$$\begin{aligned}\mathbf{P}(S_n^\xi = x,\ S_n^\eta = s)&\\ \sim \frac{q_\xi q_\eta \exp(-\Lambda(x/n, s/n)n)}{(\sqrt{2\pi n})^{d+1}\sqrt{\det(\Sigma^2(h(x/n,s/n), t(x/n,s/n)))}}&.\end{aligned} \tag{2.9}$$

Данные соотношения выполняются равномерно по $(x,s)=(x(n),s(n))$ *таким, что* $(x/n,s/n)\in K'$, *где* K' — *произвольное компактное подмножество* A'. *В соотношении* (2.9) *дополнительно предполагается, что* $(x(n),s(n))\in S\mathbf{Z}^{d+1}$ *при всех* n.

Замечание 1. В работе [10] не рассматривались несобственные случайные величины, однако результат теоремы A верен и в случае, когда величины $\eta(i)$, $i\in\mathbf{N}$, несобственные. Соотношения (2.8) и (2.9) имеют тот же вид.

Доказательство теоремы A. Мы проведем доказательство в сильно арифметическом случае, в нерешетчатом доказательство аналогично. Заметим, что

$$\mathbf{P}\biggl(\sum_{i=1}^{n} X(i)=(x,s)\biggr)=\mathbf{P}\biggl(\sum_{i=1}^{n}\widehat{X}(i)=(x,s)\biggr)\bigl(\mathbf{P}(\eta<+\infty)\bigr)^{n}, \tag{2.10}$$

где, как и прежде, распределение векторов $\widehat{X}(i)$, $i\in\mathbf{N}$, задается формулой

$$\mathbf{P}\bigl(\widehat{X}(i)\in U\bigr)=\mathbf{P}\bigl(X(i)\in U\mid\eta(i)<+\infty\bigr),\qquad U\in\mathcal{B}(\mathbf{R}^{d+1}).$$

Сохраняя обозначения, имеем

$$\widehat{R}(h,t)=\frac{R(h,t)}{\mathbf{P}(\eta<+\infty)},\qquad \widehat{M}(h,t)=M(h,t),$$
$$\widehat{\Sigma}^2(h,t)=\Sigma^2(h,t),\qquad \widehat{\Lambda}(\theta,\tau)=\Lambda(\theta,\tau)+\ln\mathbf{P}(\eta<+\infty).$$

Применяя теорему A к первому сомножителю в правой части (2.10), получаем требуемое. Теорема A доказана.

Рассмотрим множество

$$B:=\operatorname{int}\{h\in\mathbf{R}^d\colon \text{существует } t \text{ такое, что } (h,t)\in\operatorname{int}A,\ R(h,t)>1\}.$$

В силу монотонности функции $R(h,t)$ по второй переменной и определения множества B существует единственное $t_0(h)$, удовлетворяющее условию

$$R(h,t_0(h))=1,\qquad h\in B. \tag{2.11}$$

Функция $t_0(h)$ является выпуклой вверх на множестве B (это следует из выпуклости вниз функции $R(h,t)$), а также бесконечно дифференцируемой (в силу бесконечной дифференцируемости функции $R(h,t)$ и теоремы о неявной функции). Положим

$$B':=\{-\operatorname{grad}t_0(h),\ h\in B\}. \tag{2.12}$$

Введем множества

$$B_0 := \{h \in B\colon t_0(h) = 0\}, \qquad B_1 := \operatorname{int}\{h \in B\colon t_0(h) < 0\}, \tag{2.13}$$

$$B_1' := \{-\operatorname{grad} t_0(h),\ h \in B_1\}, \tag{2.14}$$

$$B_2' := \operatorname{int}\{-\beta \operatorname{grad} t_0(h),\ h \in B_0,\ \beta \in (0,1)\}. \tag{2.15}$$

Заметим, что указанные множества могут быть непустыми лишь при выполнении условия Крамера.

3. Основные результаты.

Теорема 1. *Предположим, что множество B_1', определенное формулой (2.14), непусто и $\theta = x/T \in B_1'$.*

1) *Пусть распределение X нерешетчатое. Тогда*

$$\mathbf{P}\big(Z_T \in I_{\Delta_T}(x)\big) \sim \Delta_T^d \frac{F_1(\theta)}{T^{d/2}} \exp(-L(\theta)T), \qquad T \to \infty. \tag{3.1}$$

2) *Пусть распределение X сильно арифметическое. Тогда*

$$\mathbf{P}(Z_T = x) \sim q_\xi \frac{F_2(\theta)}{T^{d/2}} \exp(-L(\theta)T), \qquad T \in q_\eta \mathbf{Z}, \quad T \to \infty. \tag{3.2}$$

Соотношения (3.1) и (3.2) выполнены равномерно по $\theta \in K_1'$, где K_1' — произвольное компактное подмножество B_1'. В сильно арифметическом случае векторы $x = x(T)$ предполагаются такими, что при всех $T \in q_\eta \mathbf{Z}$ векторы $(x(T), T)$ принадлежат решетке распределения X.

Здесь

$$L(\theta) := \langle \theta, h_\theta \rangle - (-t_0(h_\theta)) \tag{3.3}$$

с функцией h_θ такой, что $-\operatorname{grad} t_0(h_\theta) = \theta$, $\theta \in B'$, и

$$\alpha_0(\theta) := \big(\ln R(h,t)_t'\big|_{h_\theta, t_0(h_\theta)}\big)^{-1}, \tag{3.4}$$

$$F_1(\theta) := D_1(\theta)\big((2\pi)^d \det(-t_0''(h_\theta))\big)^{-1/2}, \tag{3.5}$$

$$F_2(\theta) := D_2(\theta)\big((2\pi)^d \det(-t_0''(h_\theta))\big)^{-1/2}, \tag{3.6}$$

$$D_1(\theta) := \alpha_0(\theta) \int_0^{+\infty} \exp\big(t_0(h_\theta)z\big)\mathbf{P}(\eta > z)\, dz, \tag{3.7}$$

$$D_2(\theta) := \alpha_0(\theta) q_\eta \sum_{k=0}^{+\infty} \exp\big(t_0(h_\theta) q_\eta k\big)\mathbf{P}(\eta > q_\eta k). \tag{3.8}$$

Замечание 2. Наряду с первой функцией уклонений $\Lambda(\theta,\tau)$ можно рассмотреть вторую функцию уклонений, введенную ранее в [11]:

$$\Lambda_2(\theta,\tau) = \inf_{\alpha>0} \alpha\Lambda\left(\frac{\theta}{\alpha}, \frac{\tau}{\alpha}\right), \qquad \theta \in \mathbf{R}^d, \quad \tau \in \mathbf{R}, \tag{3.9}$$

которая естественным образом возникает при анализе асимптотики меры восстановления. В терминах функции Λ_2 при $\theta \in B_1'$ функция $L(\theta)$ допускает представление

$$L(\theta) = \Lambda_2(\theta, 1).$$

Теорема 2. *Предположим, что множество B_2', определенное формулой (2.15), непусто и $\theta = x/T \in B_2'$.*

1) *Пусть распределение X нерешетчатое. Тогда*

$$\mathbf{P}\big(Z_T \in I_{\Delta_T}(x)\big) \sim \Delta_T^d \, \frac{F_0(\theta)}{T^{(d-1)/2}} \exp(-L_0(\theta)T), \qquad T \to \infty. \tag{3.10}$$

2) *Пусть распределение X сильно арифметическое. Тогда*

$$\mathbf{P}(Z_T = x) \sim q_\xi \, \frac{F_0(\theta)}{T^{(d-1)/2}} \exp(-L_0(\theta)T), \qquad T \in q_\eta \mathbf{Z}, \quad T \to \infty. \tag{3.11}$$

Соотношения (3.10) и (3.11) выполнены равномерно по $\theta \in K_2'$, где K_2' — произвольное компактное подмножество B_2'. В сильно арифметическом случае $x = x(T)$ таковы, что при всех $T \in q_\eta \mathbf{Z}$ векторы $(x(T), T)$ принадлежат решетке распределения X.

Здесь использованы следующие обозначения: $\beta_0 = \beta_0(\theta) \in \mathbf{R}$ определяется из условия

$$t_0(h_{\theta/\beta_0}) = 0, \qquad \theta \in B_2', \tag{3.12}$$

и

$$\gamma = \gamma(\theta) := \frac{\theta}{\beta_0(\theta)} \in \mathbf{R}^d, \tag{3.13}$$

$$L_0(\theta) := \langle h_{\gamma(\theta)}, \theta\rangle = \langle h_{\gamma(\theta)}, \gamma(\theta)\rangle \beta_0(\theta), \tag{3.14}$$

$$G(\gamma) := \frac{\alpha_0(\gamma)\mathbf{P}(\eta = +\infty)}{\sqrt{-\det(t_0''(h_\gamma))}\,\sqrt{\langle \gamma, (-t_0''(h_\gamma))^{-1}\gamma\rangle}}, \tag{3.15}$$

$$F_0(\theta) := G(\gamma(\theta))\big(\sqrt{2\pi\beta_0(\theta)}\big)^{-(d-1)}. \tag{3.16}$$

Замечание 3. Если следовать терминологии работ [1]–[7], множество B_2' для обрывающегося обобщенного процесса восстановления естественно назвать *нерегулярной зоной уклонений*. При выполнении события $\{Z_T \in I_{\Delta_T}(x)\}$ при $x/T \in B_2'$ величина $T - N_T$ может принимать большие (порядка T) значения. В случае собственного распределения величин η для анализа такого рода вероятностей требуется (помимо моментных условий) дополнительное условие на поведение функции распределения величины η на бесконечности, однако в несобственном случае такого рода уклонение случается с положительной вероятностью $\mathbf{P}(\eta = +\infty)$.

Замечание 4. Функция L_0 также допускает представление в терминах второй функции уклонений, а именно:

$$L_0(\theta) = \inf_{\beta\in(0,1]} \beta\Lambda_2(\theta,\beta). \tag{3.17}$$

Отметим, что представление (3.17) справедливо и для функции $L(\theta)$, однако при этом минимум заведомо достигается при $\beta = 1$, если $\theta \in B_1'$.

Замечание 5. В случае $d = 1$

$$\sqrt{-\det(t_0''(h_\gamma))}\,\sqrt{\langle\gamma,(-t_0''(h_\gamma))^{-1}\gamma\rangle} = \gamma,$$

и, следовательно,

$$G(\gamma) = \frac{\alpha_0(\gamma)\mathbf{P}(\eta = +\infty)}{\gamma}.$$

4. Доказательство основных теорем.

Доказательство теоремы 1. Доказательство первой части (нерешетчатый случай) аналогично доказательству теоремы 3.1 работы [3]. Доказательство второй части (сильно арифметический случай) аналогично доказательству теоремы 2.1 работы [7]. Заметим лишь, что в случае обрывающегося обобщенного процесса восстановления "регулярной зоной уклонений" является именно множество B_1', введенное в (2.14). Природа этой регулярности точно та же, что и для собственных обобщенных процессов восстановления, и объясняется требованием сходимости интеграла в правой части (3.7) (суммы в правой части (3.8)).

Доказательство теоремы 2. Проведем доказательство в нерешетчатом случае. Пусть, как и прежде, $\theta(x,T) = x/T \in K_2'$. Зафиксируем $C > 0$ и представим исследуемые вероятности $\mathbf{P}(Z_T \in I_{\Delta_T}(x))$ в виде

$$\mathbf{P}\big(Z_T \in I_{\Delta_T}(x)\big) = \widetilde{P}_0(x,T,C) + \widetilde{S}_0(x,T,C),$$

где

$$\widetilde{P}_0(x,T,C) := \sum_{k=1}^{+\infty} \mathbf{P}\big(S_k^\xi \in I_{\Delta_T}(x),\, |S_k^\eta - \beta_0(\theta)T| \leqslant C\sqrt{T},\, S_{k+1}^\eta > T\big),$$
$$\widetilde{S}_0(x,T,C) := \mathbf{P}\big(Z_T \in I_{\Delta_T}(x)\big) - \widetilde{P}_0(x,T,C).$$

Рассмотрим функции $\beta_0(\theta)$ и $\gamma(\theta)$, заданные в (3.12) и (3.13), которые для краткости будем обозначать β_0 и γ соответственно. Введем также следующие обозначения:

$$\sigma_1^2 = \sigma_1^2(\theta) := \frac{\langle\gamma(\theta),(-t_0''(h_{\gamma(\theta)}))^{-1}\gamma(\theta)\rangle}{\beta_0(\theta)}, \qquad \theta \in B_2', \tag{4.1}$$

$$G_0(x,T,C) := \Delta_T^d \frac{\alpha_0(\gamma)\mathbf{P}(\eta=+\infty)\exp(-\langle h_\gamma, x\rangle)}{(\sqrt{2\pi T})^{d-1}\sqrt{2\pi}\,(\sqrt{\beta_0})^d\sqrt{\det(-t_0''(h_\gamma))}} \times \int_{-C}^{C} \exp\left(-\frac{\sigma_1^2 s^2}{2}\right) ds,$$

$$\widehat{G}_0(x,T) := \frac{\int_{-\infty}^{+\infty}\exp(-\sigma_1^2 s^2/2)\,ds}{\int_{-C}^{C}\exp(-\sigma_1^2 s^2/2)\,ds}\, G_0(x,T,C) = \frac{\Delta_T^d G(\gamma)}{(\sqrt{2\pi\beta_0 T})^{d-1}}\exp(-\langle h_\gamma, x\rangle).$$

Для оценки рассматриваемых вероятностей снизу нам потребуется следующее утверждение (его доказательство приведено в п. 6).

Лемма 1. *Пусть распределение вектора X нерешетчатое и векторы $x = x(T) \in \mathbf{R}^d$ таковы, что при всех достаточно больших T имеет место включение $x/T \in K_2'$, где K_2' — произвольное компактное подмножество B_2'. Тогда для любого $C > 0$ выполнено следующее соотношение*:

$$\widetilde{P}_0(x,T,C) \sim G_0(x,T,C), \qquad T\to\infty. \tag{4.2}$$

Соотношение (4.2) *выполняется равномерно по рассматриваемым* x.

Для произвольного $\varepsilon \in (0,1)$ выберем такое $C = C(\varepsilon, K_2') > 0$, что

$$\limsup_{\substack{T\to\infty\\ x/T\in K_2'}} \frac{\widehat{G}_0(x,T)}{G_0(x,T,C)} \leqslant \frac{1}{1-\varepsilon}.$$

Применяя для данного C лемму 1, получаем

$$\liminf_{\substack{T\to\infty\\ x/T\in K_2'}} \frac{\mathbf{P}(Z_T\in I_{\Delta_T}(x))}{\widehat{G}_0(x,T)} \geqslant (1-\varepsilon)\liminf_{\substack{T\to\infty\\ x/T\in K_2'}} \frac{\widetilde{P}_0(x,T,C)}{G_0(x,T,C)} = 1-\varepsilon. \tag{4.3}$$

Для оценки вероятностей сверху нам потребуется следующее утверждение (доказательство которого также приведено в п. 6).

Лемма 2. *Пусть распределение вектора X нерешетчатое. Тогда для произвольного $\varepsilon > 0$ найдется такое $C > 0$, не зависящее от T, что при всех достаточно больших T и всех x, рассматриваемых в лемме 1, выполнено неравенство*

$$\widetilde{S}_0(x,T,C) \leqslant \varepsilon \widehat{G}_0(x,T). \tag{4.4}$$

В силу леммы 2 для произвольного $\varepsilon > 0$ найдется такое $C = C(\varepsilon, K_2')$, что

$$\widetilde{S}_0(x,T,C) \leqslant \varepsilon \widehat{G}_0(x,T).$$

В то же время для данного C справедлива лемма 1, откуда следует, что

$$\limsup_{\substack{T\to\infty\\ x/T\in K_2'}} \frac{\mathbf{P}(Z_T\in I_{\Delta_T}(x))}{\widehat{G}_0(x,T)} \leqslant \limsup_{\substack{T\to\infty\\ x/T\in K_2'}} \frac{\widetilde{P}_0(x,T,C)}{G_0(x,T,C)} + \limsup_{\substack{T\to\infty\\ x/T\in K_2'}} \frac{\widetilde{S}_0(x,T,C)}{G_0(x,T,C)} \leqslant 1+\varepsilon. \tag{4.5}$$

Таким образом, теорема 2 следует из соотношений (4.3) и (4.5). В сильно арифметическом случае доказательство аналогично.

5. Вспомогательные утверждения.

Лемма 3. 1) *При каждом фиксированном $\theta\in B'$ функция*

$$g(\alpha,\theta)=\alpha\Lambda\left(\frac{\theta}{\alpha},\frac{1}{\alpha}\right),\qquad \alpha>0, \tag{5.1}$$

определена на некотором непустом интервале $(a(\theta),b(\theta))$ и является бесконечно дифференцируемой на этом интервале и выпуклой вниз.

2) *Минимум функции $g(\alpha,\theta)$ по $\alpha>0$ достигается внутри этого интервала в единственной точке $\alpha_0(\theta)$, введенной в (3.4). Частные производные функции на этом интервале заданы соотношениями*

$$\frac{\partial}{\partial\alpha}g(\alpha,\theta)=-\ln R\left(h\left(\frac{\theta}{\alpha},\frac{1}{\alpha}\right),t\left(\frac{\theta}{\alpha},\frac{1}{\alpha}\right)\right), \tag{5.2}$$

$$\frac{\partial^2}{\partial\alpha^2}g(\alpha,\theta)=\frac{1}{\alpha}\left\langle\left(\frac{\theta}{\alpha},\frac{1}{\alpha}\right),\Sigma^{-2}\left(h\left(\frac{\theta}{\alpha},\frac{1}{\alpha}\right),t\left(\frac{\theta}{\alpha},\frac{1}{\alpha}\right)\right)\left(\frac{\theta}{\alpha},\frac{1}{\alpha}\right)\right\rangle. \tag{5.3}$$

В то же время

$$g(\alpha_0(\theta),\theta)=L(\theta),\quad \frac{\partial}{\partial\alpha}g(\alpha_0(\theta),\theta)=0,\quad \sigma^2(\theta):=\frac{\partial^2}{\partial\alpha^2}g(\alpha_0(\theta),\theta)>0. \tag{5.4}$$

3) *Для произвольного компакта $K'\subset B'$ найдется такое $\delta>0$, зависящее только от компакта K', что для каждого $\theta\in K'$ имеет место вложение $(\alpha_0(\theta)-\delta,\alpha_0(\theta)+\delta)\subseteq(a(\theta),b(\theta))$.*

Лемма 4. 1) *Для каждого фиксированного $\theta\in B_1'$ функция*

$$g_1(\beta,\theta):=\beta L\left(\frac{\theta}{\beta}\right) \tag{5.5}$$

как функция переменной β определена в некоторой окрестности точки 1 и в этой окрестности является бесконечно-дифференцируемой и выпуклой вниз. Частные производные функции $g_1(\beta,\theta)$ задаются соотношениями

$$\frac{\partial}{\partial\beta}g_1(\beta,\theta)=t_0(h_{\theta/\beta}),\qquad \frac{\partial^2}{\partial\beta^2}g_1(\beta,\theta)=\frac{1}{\beta}\left\langle\frac{\theta}{\beta},(-t_0''(h_{\theta/\beta}))^{-2}\frac{\theta}{\beta}\right\rangle. \tag{5.6}$$

При этом для произвольного компакта $K_1' \subset B_1'$ найдется такое число $\delta_1 > 0$, зависящее только от K_1', что $g_1(\beta, \theta)$ при каждом фиксированном $\theta \in K_1'$ определена как функция β на интервале $(1 - \delta_1, 1 + \delta_1)$.

2) *В силу определения множества B_2' для каждого $\theta \in B_2'$ найдется такое $\beta_0(\theta) \in (0, 1)$, что $t_0(h_{\theta/\beta_0(\theta)}) = 0$.*

При этом функция $g_1(\beta, \theta)$ как функция переменной β определена на некотором непустом интервале $(\beta_0(\theta) - \delta, \beta_0(\theta) + \delta)$ и является на нем бесконечно дифференцируемой и выпуклой вниз. Частные производные функции на этом интервале заданы соотношениями (5.6).

В то же время

$$g_1(\beta_0(\theta), \theta) = \langle h_\gamma, \theta\rangle, \quad \frac{\partial}{\partial\beta} g_1(\beta_0(\theta), \theta) = 0, \quad \frac{\partial^2}{\partial\beta^2} g_1(\beta_0(\theta), \theta) = \sigma_1^2(\theta), \tag{5.7}$$

где, как и прежде, $\gamma = \gamma(\theta) = \theta/\beta_0(\theta)$, а $\sigma_1^2(\theta)$ определена в (4.1).

При этом для произвольного компакта $K_2' \subset B_2'$ найдется такое число $\delta_2 > 0$, зависящее только от K_2', что $g_1(\beta, \theta)$ при каждом фиксированном $\theta \in K_2'$ определена как функция β на интервале $(\beta_0(\theta) - \delta_2, \beta_0(\theta) + \delta_2)$.

Лемма 5. *Пусть распределение вектора X нерешетчатое, K' — произвольное компактное подмножество B' и векторы $(x, s) = (x(T), s(T))$, $x \in \mathbf{R}^d$, $s \in \mathbf{R}$, таковы, что $s(T) \to +\infty$ при $T \to \infty$ и $x/s \in K' \subset B'$ при всех достаточно больших T. Тогда для произвольного $C > 0$*

$$\sum_{\substack{k\in\mathbf{N}:\\ |k-\alpha_0 s|\leqslant C\sqrt{s}}} \mathbf{P}\big(S_k^\xi \in I_{\Delta_T}(x),\ S_k^\eta \in [s, s+\Delta_T)\big)$$
$$\sim \frac{\Delta_T^{d+1}\exp(-L(x/s)s)}{(\sqrt{2\pi s})^d\sqrt{2\pi}(\sqrt{\alpha_0})^{d+1}\sqrt{\det(\Sigma^2(h_0, t_0))}}$$
$$\times \int_{-C}^{C} \exp\biggl(-\frac{\sigma^2 u^2}{2}\biggr)\, du, \qquad T \to \infty,$$

причем это соотношение выполнено равномерно по рассматриваемым x и s. Здесь

$$\alpha_0 = \alpha_0\biggl(\frac{x}{s}\biggr), \qquad \kappa_0 = \biggl(\frac{x}{\alpha_0 s}, \frac{1}{\alpha_0}\biggr), \qquad h_0 = h(\kappa_0),$$
$$t_0 = t(\kappa_0), \qquad \sigma^2 = \sigma^2\biggl(\frac{x}{s}\biggr) = \frac{\langle\kappa_0, \Sigma^{-2}(h_0, t_0)\kappa_0\rangle}{\alpha_0}.$$

Лемма 6. *Пусть распределение вектора X нерешетчатое. Тогда для произвольного $\varepsilon > 0$ найдется такое $C > 0$, не зависящее от T, что при всех достаточно больших T и всех (x, s), рассматриваемых* *в лемме 5, выполнено неравенство*

$$\sum_{\substack{k\in\mathbf{N}:\\ |k-\alpha_0 s|>C\sqrt{s}}} \mathbf{P}\big(S_k^\xi \in I_{\Delta_T}(x),\, S_k^\eta \in [s, s+\Delta_T)\big)$$
$$\leqslant \varepsilon \frac{\Delta_T^{d+1}(\sqrt{2\pi s})^{-d}\exp(-L(x/s)s)}{\sqrt{2\pi}(\sqrt{\alpha_0})^{d+1}\sqrt{\det(\Sigma^2(h_0,t_0))}}.$$

Лемма 7. *Введем для краткости следующие обозначения*:

$$E(x,s,\Delta_T) := \sum_{k\in\mathbf{N}} \mathbf{P}\big(S_k^\xi \in I_{\Delta_T}(x),\, S_k^\eta \in [s, s+\Delta_T)\big), \tag{5.8}$$

$$Q(x,s,\Delta_T) := \Delta_T^d\, \frac{\alpha_0(x/s)\exp(-L(x/s)s)}{(\sqrt{2\pi s})^d\sqrt{\det(-t_0''(h_{x/s}))}}. \tag{5.9}$$

Предположим, что выполнены условия леммы 5. Тогда справедливо соотношение

$$E(x,s,\Delta_T) \sim \Delta_T Q(x,s,\Delta_T), \qquad T\to\infty, \tag{5.10}$$

которое выполняется равномерно по рассматриваемым x, s.

6. Доказательство вспомогательных утверждений.

Доказательство леммы 1. Введем следующее множество индексов:

$$H_0 = H_0(x,T,C,\Delta_T) := \{j\in\mathbf{Z}\colon |j\Delta_T| \leqslant C\sqrt{T}\}. \tag{6.1}$$

Для краткости будем использовать также обозначения $\theta = x/T$, $\beta_0 = \beta_0(\theta)$, $\gamma = \gamma(\theta)$ и $\sigma_1^2 = \sigma_1^2(\theta)$, где функции β_0, γ определены ранее в (3.12) и (3.13), а функция σ_1^2 определена в (4.1).

Исследуемую сумму вероятностей

$$\widetilde{P}_0(x,T,C) = \sum_{k=1}^{+\infty} \mathbf{P}\big(S_k^\xi \in I_{\Delta_T}(x),\, |S_k^\eta - \beta_0 T| \leqslant C\sqrt{T},\, S_{k+1}^\eta > T\big)$$

оценим сверху и снизу следующим образом:

$$\sum_{j\in H_0} E(x,\beta_0 T + j\Delta_T,\Delta_T)\mathbf{P}(\eta > T-\beta_0 T - j\Delta_T) \leqslant \widetilde{P}_0(x,T,C)$$
$$\leqslant \sum_{j\in H_0} E(x,\beta_0 T + j\Delta_T,\Delta_T)\mathbf{P}(\eta > T-\beta_0 T - (j+1)\Delta_T), \tag{6.2}$$

где функция $E(x,\cdot\,,\Delta_T)$ введена ранее в (5.8). Заметим, что соотношение

$$\mathbf{P}\big(\eta > T - \beta_0 T - (j+1)\Delta_T\big) \to \mathbf{P}(\eta = +\infty), \qquad T\to\infty,$$

выполнено равномерно по $j \in H_0$ и рассматриваемым $x/T \in K_2'$. Далее, покажем, что соотношение

$$E(x, \beta_0 T + j\Delta_T, \Delta_T) \sim \frac{\Delta_T^{d+1}\alpha_0(\gamma)\exp(-\langle h_\gamma, x\rangle)}{(\sqrt{2\pi\beta_0 T})^d\sqrt{\det(-t_0''(h_\gamma))}}\exp\biggl(-\frac{\sigma_1^2(j\Delta_T)^2}{2T}\biggr) \tag{6.3}$$

выполнено равномерно по рассматриваемым $x/T \in K_2'$ и $j \in H_0$ при $T \to \infty$. Действительно, в силу леммы 7

$$\begin{aligned} &E(x, \beta_0 T + j\Delta_T, \Delta_T) \\ &\quad\sim \frac{\alpha_0(x/(\beta_0 T + j\Delta_T))\exp(-L(x/(\beta_0 T + j\Delta_T))(\beta_0 T + j\Delta_T))}{(\sqrt{2\pi(\beta_0 T + j\Delta_T)})^d\sqrt{\det(-t_0''(h_{x/(\beta_0 T + j\Delta_T)}))}}. \end{aligned} \tag{6.4}$$

В силу непрерывности и положительности $\alpha_0(\theta)$ и $\det(-t_0''(h_\theta))$ как функций переменной θ на компакте K_2' имеем

$$\frac{\alpha_0(x/(\beta_0 T + j\Delta_T))(\sqrt{2\pi(\beta_0 T + j\Delta_T)})^{-d}}{\sqrt{\det(-t_0''(h_{x/(\beta_0 T + j\Delta_T)}))}} \sim \frac{\alpha_0(\gamma)}{(\sqrt{2\pi\beta_0 T})^d\sqrt{\det(-t_0''(h_\gamma))}} \tag{6.5}$$

при $T \to \infty$ равномерно по рассматриваемым x и j, где, как и прежде, $\gamma = \gamma(\theta) = \theta/\beta_0(\theta) = x/(\beta_0 T)$.

Для доказательства соотношения (6.3) остается показать, что

$$\exp\biggl(-L\biggl(\frac{x}{\beta_0 T + j\Delta_T}\biggr)(\beta_0 T + j\Delta_T)\biggr) \sim \exp(-\langle h_\gamma, x\rangle)\exp\biggl(-\frac{\sigma_1^2(j\Delta_T)^2}{2T}\biggr) \tag{6.6}$$

при $T \to \infty$ равномерно по рассматриваемым x и j. Заметим, что

$$L\biggl(\frac{x}{\beta_0 T + j\Delta_T}\biggr)(\beta_0 T + j\Delta_T) = g_1\biggl(\beta_0 + \frac{j\Delta_T}{T}, \frac{x}{T}\biggr)T,$$

где функция $g_1(\,\cdot\,, \theta)$ задана в (5.5). Используя лемму 4, в силу формулы Тейлора заключаем, что

$$g_1\biggl(\beta_0 + \frac{j\Delta_T}{T}, \frac{x}{T}\biggr)T = \langle h_\gamma, x\rangle + \frac{\sigma_1^2}{2}\,\frac{(j\Delta_T)^2}{T} + o(1) \tag{6.7}$$

при $T \to \infty$, где $o(1)$ равномерно мало по рассматриваемым x и j. Из соотношения (6.7) вытекает соотношение (6.6), откуда, принимая во внимание (6.5), получаем (6.3).

Отметим, что доказанное соотношение (6.3) можно переписать в виде

$$E(x, \beta_0 T + j\Delta_T, \Delta_T) \sim \Delta_T Q(x, \beta_0 T, \Delta_T)\exp\biggl(-\frac{\sigma_1^2(j\Delta_T)^2}{2T}\biggr),$$

где функция Q введена ранее в (5.9). Таким образом, в силу двойного неравенства (6.2) для произвольного $\varepsilon > 0$ при всех достаточно больших T справедливы неравенства

$$(1-\varepsilon)\widetilde{Q}\left(\frac{x}{T}, T, C\right) \leqslant \frac{\widetilde{P}_0(x,T,C)}{\sqrt{T}\,Q(x,\beta_0 T,\Delta_T)\mathbf{P}(\eta=+\infty)} \leqslant (1+\varepsilon)\widetilde{Q}\left(\frac{x}{T}, T, C\right), \tag{6.8}$$

где

$$\widetilde{Q}\left(\frac{x}{T}, T, C\right) := \sum_{j\in H_0} \frac{\Delta_T}{\sqrt{T}} \exp\left(-\frac{\sigma_1^2(x/T)(j\Delta_T)^2}{2T}\right).$$

Суммы $\widetilde{Q}(\theta,T,C)$ при любом $\theta \in K_2'$ являются интегральными для интеграла

$$\int_{-C}^{C} \phi_0(u,\theta)\,du, \qquad \phi_0(u,\theta) := \exp\left(-\frac{\sigma_1^2(\theta)u^2}{2}\right), \tag{6.9}$$

с шагом разбиения $\Delta_T/\sqrt{T}$ и сходятся к нему равномерно по $\theta \in K_2'$ при $T\to\infty$. Функция $\sigma_1^2(\,\cdot\,)$ отделена от нуля и ограничена, следовательно, интеграл (6.9) отделен от нуля при $\theta \in K_2'$, и, значит, отношение сумм $\widetilde{Q}(x/T,T,C)$ к интегралу (6.9) стремится к единице при $T\to\infty$ равномерно по рассматриваемым x.

Таким образом, из двойного неравенства (6.8) в силу произвольности ε вытекает лемма 1.

Доказательство леммы 2. Положим для краткости $\theta = x/T$. Доказательство леммы проведем в два этапа.

1) Покажем, что для произвольного $\varepsilon > 0$ найдется такое $C > 0$, зависящее только от компакта K_2' и ε, что при всех достаточно больших T и всех x таких, что $x/T \in K_2'$, выполнено неравенство

$$\widetilde{S}_{0,1}(x,T,C,\Delta_T) \leqslant \varepsilon \widehat{G}_0(x,T), \tag{6.10}$$

где

$$\widetilde{S}_{0,1}(x,T,C,\Delta_T) := \sum_{k=1}^{+\infty} \mathbf{P}\big(S_k^\xi \in I_{\Delta_T}(x),\, C\sqrt{T} < |S_k^\eta - \beta_0(\theta)T| \leqslant T^{3/5}\big).$$

Введем множество индексов

$$\widetilde{H}_0 = \widetilde{H}_0(x,T,C) := \{j \in \mathbf{Z}\colon C\sqrt{T} < |j\Delta_T| \leqslant T^{3/5}\}$$

и оценим сверху функцию $\widetilde{S}_{0,1}$ следующим образом:

$$\widetilde{S}_{0,1}(x,T,C,\Delta_T) \leqslant \sum_{j\in\widetilde{H}_0} E\big(x, \beta_0(\theta)T + j\Delta_T, \Delta_T\big).$$

Для функции $E(x, \beta_0(\theta)T + j\Delta_T, \Delta_T)$ справедливо соотношение (6.3) равномерно по $j \in \widetilde{H}_0$ и рассматриваемым x, поскольку $(j\Delta_T)^3/T^2 \to 0$ при $T \to \infty$ равномерно по $j \in \widetilde{H}_0$. Это соотношение можно переписать в виде

$$E(x, \beta_0(\theta)T + j\Delta_T, \Delta_T) \sim \Delta_T Q(x, \beta_0(\theta)T, \Delta_T) \exp\left(-\frac{\sigma_1^2(\theta)(j\Delta_T)^2}{2T}\right).$$

Таким образом, для всех положительных ε при всех достаточно больших T и всех рассматриваемых x таких, что $x/T \in K_2'$, выполнено неравенство

$$\begin{aligned}\widetilde{S}_{0,1}(x, T, C, \Delta_T) &\leqslant (1+\varepsilon)\sqrt{T}\, Q(x, \beta_0(\theta)T, \Delta_T) \sum_{j \in \widetilde{H}_0} \frac{\Delta_T}{\sqrt{T}} \\ &\qquad\qquad \times \exp\left(-\frac{\sigma_1^2(\theta)(j\Delta_T)^2}{2T}\right) \\ &\leqslant (1+\varepsilon)\sqrt{T}\, Q(x, \beta_0(\theta)T, \Delta_T)\left(\int_{-\infty}^{-C+\Delta_T/\sqrt{T}} + \int_{C-\Delta_T/\sqrt{T}}^{+\infty}\right)\phi_0\left(u, \frac{x}{T}\right) du, \end{aligned} \tag{6.11}$$

где, как и прежде, $\phi_0(u, \theta) = \exp(-\sigma_1^2(\theta)u^2/2)$.

Функция $\phi_0(u, \theta)$ равномерно интегрируема на $\mathbf{R}$ по переменной u при $\theta \in K_2'$, так как функция $\sigma_1^2(\theta)$ непрерывна и положительна на компакте K_2'. Таким образом, из неравенства (6.11) при достаточно больших C следует неравенство (6.10), поскольку

$$\widehat{G}_0(x, T) = \sqrt{T}\, Q(x, \beta_0(\theta)T, \Delta_T)\mathbf{P}(\eta = +\infty) \int_{-\infty}^{+\infty} \phi_0\left(\frac{x}{T}, u\right) du.$$

2) Покажем, что выполнено соотношение

$$\begin{aligned}\widetilde{S}_{0,2}(x, T, \Delta_T) &:= \sum_{k=1}^{+\infty} \mathbf{P}\big(S_k^\xi \in I_{\Delta_T}(x),\ \beta_0(\theta)T + T^{3/5} < S_k^\eta < T\big) \\ &= o(1)\widehat{G}_0(x, T)\end{aligned} \tag{6.12}$$

при $T \to \infty$, причем $o(1)$ равномерно мало по $\theta \in K_2'$. Соотношение

$$\begin{aligned}\widetilde{S}_{0,3}(x, T, \Delta_T) &:= \sum_{k=1}^{+\infty} \mathbf{P}\big(S_k^\xi \in I_{\Delta_T}(x),\ S_k^\eta - \beta_0(\theta)T < -T^{3/5}\big) \\ &= o(1)\widehat{G}_0(x, T)\end{aligned}$$

при $T \to \infty$ доказывается аналогично.

Положим
$$\psi = \psi(\theta, T) = \frac{x}{\beta_0(\theta)T + T^{3/5}} \in \mathbf{R}^d$$
и заметим, что множество $\{\psi(\theta, T)\colon \theta \in K_2'\}$ содержится в B' при всех достаточно больших T. Положим также
$$\widetilde{h}_2 = h_\psi, \quad \widetilde{t}_2 = t_0(h_\psi) - T^{-2}.$$
Заметим, что в силу леммы 4 и формулы Тейлора
$$t_0(h_\psi) = \sigma_1^2(\theta)T^{-2/5} + o(1)T^{-2/5}, \qquad T \to \infty,$$
где $o(1)$ равномерно мало по $\theta \in K_2'$. Таким образом, при всех достаточно больших T величины $\widetilde{t}_2$ положительны при всех $\theta \in K_2'$. Таким образом, в силу неравенства Маркова при каждом $k \in \mathbf{N}$ приходим к неравенству
$$\begin{aligned}\mathbf{P}\bigl(S_k^\xi \in I_{\Delta_T}(x),\, \beta_0(\theta)T + T^{3/5} < S_k^\eta < T\bigr)\\ \leqslant R^k(\widetilde{h}_2, \widetilde{t}_2)\exp\bigl(-g_1(\beta_0(\theta) + T^{-2/5}, \theta)T\bigr) l_1(T, \Delta_T, \theta),\end{aligned} \tag{6.13}$$
где $l_1(T, \Delta_T, \theta) := \exp(d\Delta_T\|\widetilde{h}_2\| + T^{-1})$. Заметим, что $R(\widetilde{h}_2, \widetilde{t}_2) < 1$, так как $\widetilde{t}_2 < t_0(h_\psi)$ и $R(h_\psi, t_0(h_\psi)) = 1$. Суммируя неравенства (6.13) по $k \in \mathbf{N}$, получаем
$$\begin{aligned}\widetilde{S}_{0,2}(x, T, \Delta_T) &\leqslant \frac{l_1(T, \Delta_T, \theta)}{1 - R(\widetilde{h}_2, \widetilde{t}_2)}\exp\bigl(-g_1(\beta_0(\theta) + T^{-2/5}, \theta)T\bigr)\\ &= (1 + o(1))\alpha_0(\psi)T^2\exp\biggl(-\frac{\sigma_1^2(\theta)}{2}\,T^{1/5} - g_1(\beta_0(\theta), \theta)T\biggr), \qquad T \to \infty,\end{aligned} \tag{6.14}$$
причем $o(1)$ равномерно мало по $\theta \in K_2'$. Остается отметить, что
$$\exp\bigl(-g_1(\beta_0(\theta), \theta)T\bigr) = O(T^{(d-1)/2})\widehat{G}_0(x, T)$$
и поэтому правая часть (6.14) есть $o(1)\widehat{G}_0(x, T)$ в силу положительности и непрерывности функции $\sigma_1^2(\,\cdot\,)$ на компакте K_2'. Отсюда и следует соотношение (6.12).

Лемма 2 доказана.

Доказательство леммы 3. 1) Множество A', введенное в (2.6), является выпуклым и открытым, откуда следует, что для произвольного $\theta \in \mathbf{R}^d$ луч $\{(\theta/\alpha, 1/\alpha)\colon \alpha > 0\}$ пересекает A' по открытому интервалу (возможно, пустому). При $\theta \in B'$ этот интервал непуст в силу леммы 5 работы [8].

2) Соотношения (5.2), (5.3) получаются прямым дифференцированием. Положительность $\partial^2 g/\partial\alpha^2$ следует из положительной определенности матрицы Σ^{-2}. Таким образом, функция $g(\alpha, \theta)$ выпукла вниз на

рассматриваемом интервале. Тот факт, что $\alpha_0(\theta)$ — критическая точка для функции $g(\alpha,\theta)$, доказан в лемме 5 работы [8].

3) Множество

$$J(\theta)=\left\{\left(\frac{\theta}{\alpha_0(\theta)},\frac{1}{\alpha_0(\theta)}\right)\colon \theta\in K'\right\}\subset A'$$

компактно, следовательно, найдется такое $\delta=\delta(K')>0$, что множество

$$\left\{\left(\frac{\theta}{\alpha},\frac{1}{\alpha}\right)\colon \theta\in K',\ \alpha\in(\alpha_0(\theta)-\delta,\alpha_0(\theta)+\delta)\right\}$$

содержит $J(\theta)$ и содержится в A'.

Лемма 3 доказана.

Доказательство леммы 4. 1) Для каждого $\theta\in B_1'$ найдется такое $\delta_1>0$, что интервал $(\theta/(1+\delta_1),\theta/(1-\delta_1))$ лежит в множестве B'. Таким образом, на интервале $(1-\delta_1,1+\delta_1)$ определены и бесконечно дифференцируемы по α функции $h_{\theta/\alpha}$ и $t_0(h_{\theta/\alpha})$. Соотношения (5.6) проверяются прямым вычислением, аналогично соотношениям (5.2), (5.3). Доказательство заключительного утверждения первой части леммы 4 аналогично доказательству третьей части леммы 3.

2) Для каждого $\theta\in B_2'$ найдется такое $\delta_2>0$, что интервал $(\theta/(\beta_0(\theta)+\delta_2),\theta/(\beta_0(\theta)-\delta_2))$ лежит в множестве B'. Таким образом, на интервале $(\beta_0(\theta)-\delta_2,\beta_0(\theta)+\delta_2)$ определены и бесконечно дифференцируемы по α функции $h_{\theta/\alpha}$ и $t_0(h_{\theta/\alpha})$. Соотношения (5.7) следуют из соотношений (5.6) и определения функций $\beta_0(\theta)$ и $\gamma(\theta)$. Доказательство заключительного утверждения второй части леммы 4 аналогично доказательству третьей части леммы 3.

Лемма 4 доказана.

Леммы 5–7 сформулированы и доказываются только в нерешетчатом случае, однако они остаются верными и в сильно арифметическом случае с точностью до повсеместной замены интегро-локальных вероятностей на локальные, замены Δ_T^{d+1} на $q_\xi q_\eta$ и дополнительного предположения, что (x,s) принадлежат решетке распределения вектора X. Доказательства в этих случаях аналогичны. Отметим также, что, применяя теорему A, вместо условия $\Delta_k\to 0$ при $k\to\infty$ мы будем использовать условие $\Delta_T\to 0$ при $T\to\infty$. Обоснованность такой замены продемонстрирована в начале раздела 8 работы [8].

Доказательство леммы 5. Введем множество индексов

$$H_1=H_1(x,s,C):=\left\{k\in\mathbf{N}\colon \left|k-\alpha_0\left(\frac{x}{s}\right)s\right|\leqslant C\sqrt{s}\right\}.$$

Обозначим для краткости

$$U(x,s,k,\Delta_T) := \mathbf{P}\big(S_k^\xi \in I_{\Delta_T}(x),\ S_k^\eta \in [s,s+\Delta_T)\big), \tag{6.15}$$

$$V(x,s,k,\Delta_T) := \frac{\Delta_T^{d+1}\exp(-\Lambda(x/k,s/k)k)}{(\sqrt{2\pi k})^{d+1}\sqrt{\det(\Sigma^2(h(x/k,s/k),t(x/k,s/k)))}}. \tag{6.16}$$

Положим

$$\widetilde{V}(x,s,\Delta_T) := V\left(x,s,\alpha_0\left(\frac{x}{s}\right)s,\Delta_T\right). \tag{6.17}$$

В силу определения функции $\alpha_0(\,\cdot\,)$ и леммы 3 функция $\widetilde{V}$ имеет вид

$$\widetilde{V}(x,s,\Delta_T) = \frac{\Delta_T^{d+1}\exp(-L(x/s)s)}{(\sqrt{2\pi\alpha_0 s})^{d+1}\sqrt{\det(\Sigma^2(h(x/\alpha_0 s,1/\alpha_0),t(x/\alpha_0 s,1/\alpha_0)))}}. \tag{6.18}$$

Для краткости здесь и далее мы будем использовать обозначения $\alpha_0 = \alpha_0(x/s)$, $\sigma^2 = \sigma^2(x/s)$, где функция σ^2 введена ранее в (5.4). Покажем, что

$$U(x,s,k,\Delta_T) = (1+o(1))V(x,s,k,\Delta_T), \tag{6.19}$$

где $o(1)$ равномерно мало по рассматриваемым x и $k \in H_1$. Действительно, в силу условий доказываемой леммы $s(T) \to +\infty$, а функция $\alpha_0(x/s)$ ограничена, откуда следует, что $\min\{j\colon j \in H_1\} \to +\infty$. Кроме того, в силу леммы 3 при всех достаточно больших T множество $\{(x/k,s/k)\colon x/s \in K',\ k \in H_1\}$ содержится в A'. Таким образом, соотношение (6.19) следует из теоремы A.

Далее, покажем, что равномерно по рассматриваемым $k \in H_1$ выполнено соотношение

$$V(x,s,k,\Delta_T) \sim \widetilde{V}(x,s,\Delta_T)\exp\left(-\frac{s\sigma^2}{2}\left(\frac{k}{s}-\alpha_0\right)^2\right) \tag{6.20}$$

при $T \to \infty$. Действительно, если $k \in H_1$, то

$$\sqrt{\det\left(\Sigma^2\left(h\left(\frac{x}{k},\frac{s}{k}\right),t\left(\frac{x}{k},\frac{s}{k}\right)\right)\right)} \sim \sqrt{\det\left(\Sigma^2\left(h\left(\frac{x}{\alpha_0 s},\frac{1}{\alpha_0}\right),t\left(\frac{x}{\alpha_0 s},\frac{1}{\alpha_0}\right)\right)\right)} \tag{6.21}$$

при $s \to \infty$, так как $k \sim \alpha_0 s$ и функция $\det(\Sigma^2(h(\,\cdot\,),t(\,\cdot\,)))$ непрерывна на любом компакте, содержащемся в A'.

Далее, заметим, что $\Lambda(x/k,s/k)k = g(k/s,x/s)s$, где функция $g(\alpha,\theta)$ задана соотношением (5.1); следовательно, в силу формулы Тейлора и леммы 3

$$\Lambda\left(\frac{x}{k},\frac{s}{k}\right)k = L\left(\frac{x}{s}\right)s + \frac{s\sigma^2}{2}\left(\frac{k}{s}-\alpha_0\right)^2 + o(1) \tag{6.22}$$

при $s \to \infty$, где $o(1)$ равномерно мало по рассматриваемым x, s, k.

Соотношение (6.20) вытекает из соотношений (6.22) и (6.21). Следовательно, при $T \to \infty$

$$\sum_{k\in H_1} U(x,s,k,\Delta_T) \sim \sqrt{s}\,\widetilde{V}(x,s,\Delta_T)\widetilde{Q}_1\Big(\frac{x}{s},s,C\Big), \tag{6.23}$$

где

$$\widetilde{Q}_1(\theta,s,C) := \sum_{k\in H_1} \frac{1}{\sqrt{s}} \exp\bigg(-\frac{1}{2}s\sigma^2(\theta)\Big(\frac{k}{s}-\alpha_0(\theta)\Big)^2\bigg). \tag{6.24}$$

Суммы (6.24) при любом $\theta \in K'$ являются интегральными для интеграла

$$\int_{-C}^{C} \widetilde{\phi}(\theta,u)\,du, \qquad \widetilde{\phi}(\theta,u) := \exp\Big(-\frac{1}{2}\sigma^2(\theta)u^2\Big), \tag{6.25}$$

и сходятся к нему равномерно по $\theta \in K'$ при $T \to \infty$. Интеграл (6.25) отделен от нуля при $\theta \in K'$, поскольку функция $\sigma^2(\theta)$ ограничена на любом компакте, содержащемся в B'. Таким образом,

$$\sum_{k\in H_1} U(x,s,k,\Delta_T) \sim \sqrt{s}\,\widetilde{V}(x,s,\Delta_T)\int_{-C}^{C} \widetilde{\phi}\Big(\frac{x}{s},u\Big)\,du$$

при $s \to \infty$. Лемма 5 доказана.

Доказательство леммы 6. Пусть $\varepsilon > 0$ и $C > 0$. Для краткости положим $\alpha_0 = \alpha_0(x/s)$ и $\sigma^2 = \sigma^2(x/s)$. Введем множество индексов

$$H_2 = H_2(x,s,C) := \big\{k \in \mathbf{N}\colon C\sqrt{s} < |k-\alpha_0 s| \leqslant s^{3/5}\big\}.$$

Покажем, что найдется такое $C > 0$, что при всех $x/s \in K'$ и всех достаточно больших T выполнено неравенство

$$\sum_{k\in H_2} U(x,s,k,\Delta_T) \leqslant \varepsilon\sqrt{s}\,\widetilde{V}(x,s,\Delta_T), \tag{6.26}$$

где функции U и $\widetilde{V}$ введены ранее в (6.15) и (6.18) соответственно. Заметим, что при $k \in H_2$ и $x/s \in K'$ выполнено соотношение $(k/s-\alpha_0)^3 s \to 0$ при $s \to \infty$, и, значит, при данных k справедливы также соотношения (6.19) и (6.20). Следовательно, при всех достаточно больших T выполнено неравенство

$$\begin{aligned}
&\sum_{k\in H_2} U(x,s,k,\Delta_T)\\
&\quad\leqslant (1+\varepsilon)\sqrt{s}\,\widetilde{V}(x,s,\Delta_T)\sum_{k\in H_2}\frac{1}{\sqrt{s}}\exp\bigg(-\frac{1}{2}s\sigma^2\Big(\frac{k}{s}-\alpha_0\Big)^2\bigg)\\
&\quad\leqslant (1+\varepsilon)\sqrt{s}\,\widetilde{V}(x,s,\Delta_T)\bigg(\int_{-\infty}^{-C+1/\sqrt{s}} + \int_{C-1/\sqrt{s}}^{+\infty}\bigg)\widetilde{\phi}\Big(\frac{x}{s},u\Big)\,du.
\end{aligned} \tag{6.27}$$

Функция $\widetilde{\phi}(x/s, u)$ интегрируема по переменной u на всей числовой прямой равномерно по $x/s \in K'$, откуда, выбирая параметр C достаточно большим, приходим к неравенству (6.26).

Введем множества индексов

$$H_3 = H_3(x,s) := \left\{k \in \mathbf{N}\colon k > \alpha_0\left(\frac{x}{s}\right)s + s^{3/5}\right\},$$
$$H_4 = H_4(x,s) := \left\{k \in \mathbf{N}\colon k < \alpha_0\left(\frac{x}{s}\right)s - s^{3/5}\right\}$$

и покажем, что выполнено соотношение

$$\sum_{k\in H_3} U(x,s,k,\Delta_T) = o(1)\sqrt{s}\,\widetilde{V}(x,s,\Delta_T), \qquad T \to \infty, \tag{6.28}$$

где $o(1)$ равномерно мало по рассматриваемым x, s.

Положим

$$\kappa = \kappa(x,s) = \left(\frac{x}{\alpha_0 s + s^{3/5}}, \frac{1}{\alpha_0 + s^{-2/5}}\right), \quad \widetilde{h}_1 = h(\kappa), \quad \widetilde{t}_1 = t(\kappa),$$

где, напомним, $\operatorname{grad}\ln R(h(\kappa), t(\kappa)) = \kappa$.

В силу неравенства (2.3) для любого $k \in H_3$ справедливо неравенство

$$\begin{aligned} U(x,s,k,\Delta_T) &\leqslant \exp\bigl(\Delta_T(d\|\widetilde{h}_1\| + |\widetilde{t}_1|)\bigr)R^k(\widetilde{h}_1,\widetilde{t}_1)\exp(-\langle x,\widetilde{h}_1\rangle - \widetilde{t}_1 s) \\ &= \exp\bigl(\Delta_T(d\|\widetilde{h}_1\| + |\widetilde{t}_1|)\bigr)R^{k-(\alpha_0 s + s^{3/5})}(\widetilde{h}_1,\widetilde{t}_1)\exp\left(-g\left(\alpha_0 + s^{-2/5}, \frac{x}{s}\right)s\right), \end{aligned} \tag{6.29}$$

где функция $g(\alpha,\theta)$ введена в (5.1). Заметим, что

$$\ln R(\widetilde{h}_1,\widetilde{t}_1) = -\frac{\partial}{\partial\alpha}g\left(\alpha_0 + s^{-2/5}, \frac{x}{s}\right) < 0,$$

поскольку $g'_\alpha(\alpha_0, x/s) = 0$ и при любом $\theta \in B'$ функция $g(\alpha,\theta)$ как функция переменной α выпукла вниз в некоторой окрестности $\alpha_0(\theta)$.

Следовательно, суммируя неравенства (6.29) по $k \in H_3$, получаем

$$\begin{aligned} \sum_{k\in H_3} U(x,s,k,\Delta_T) &\leqslant \frac{\exp(\Delta_T(d\|\widetilde{h}_1\| + |\widetilde{t}_1|))}{1 - R(\widetilde{h}_1,\widetilde{t}_1)}\exp\left(-g\left(\alpha_0 + s^{-2/5}, \frac{x}{s}\right)s\right) \\ &= (1+o(1))\,\frac{s^{2/5}}{\sigma^2}\exp\left(-\sigma^2 s^{1/5} - g\left(\alpha_0, \frac{x}{s}\right)s\right), \end{aligned} \tag{6.30}$$

где $o(1)$ равномерно мало по $x/s \in K'$ при $s \to \infty$. В силу (6.18)

$$\exp\left(-g\left(\alpha_0, \frac{x}{s}\right)s\right) = O(s^{(d+1)/2})\widetilde{V}(x,s,\Delta_T), \qquad s \to \infty,$$

откуда следует, что правая часть (6.30) есть $o(1)\sqrt{s}\,\widetilde{V}(x,s,\Delta_T)$ при $s\to\infty$, что и доказывает (6.28). Аналогичным образом оценивается сумма $U(x,s,k,\Delta_T)$ по $k\in H_4$.

Поскольку $\{k\in\mathbf{N}\colon |k-\alpha_0 s|>C\sqrt{s}\}=H_2\cup H_3\cup H_4$, лемма 6 доказана.

Доказательство леммы 7. Как и прежде, положим

$$H_1=H_1(x,s,C)=\left\{k\in\mathbf{N}\colon \left|k-\alpha_0\left(\frac{x}{s}\right)s\right|\leqslant C\sqrt{s}\right\}.$$

Рассматриваемую сумму вероятностей $E(x,s,\Delta_T)$ представим в следующем виде:

$$E(x,s,\Delta_T)=\widetilde{P}_1(x,s,\Delta_T,C)+\widetilde{S}_1(x,s,\Delta_T,C),$$

где

$$\widetilde{P}_1(x,s,\Delta_T,C):=\sum_{k\in H_1}\mathbf{P}\big(S_k^\xi\in I_{\Delta_T}(x),\ S_k^\eta\in[s,s+\Delta_T)\big),$$
$$\widetilde{S}_1(x,s,\Delta_T,C):=\sum_{k\in\mathbf{N}\setminus H_1}\mathbf{P}\big(S_k^\xi\in I_{\Delta_T}(x),\ S_k^\eta\in[s,s+\Delta_T)\big).$$

Последующее доказательство аналогично доказательству теоремы 2 и опирается на леммы 5 и 6. Остается только отметить, что

$$\frac{\sqrt{2\pi s}\,\widetilde{V}(x,s,\Delta_T)}{\sigma(x/s)}=\Delta_T^{d+1}\frac{\alpha_0(x/s)\exp(-L(x/s)s)}{(\sqrt{2\pi s})^d\sqrt{\det(-t_0''(h_{x/s}))}},$$

поскольку в силу леммы 8 работы [8]

$$\sqrt{\alpha_0^{d+1}\left(\frac{x}{s}\right)\sigma^2\left(\frac{x}{s}\right)\det\left(\Sigma^2\left(h\left(\frac{x}{\alpha_0 s},\frac{1}{\alpha_0 s}\right),t\left(\frac{x}{\alpha_0 s},\frac{1}{\alpha_0 s}\right)\right)\right)}$$
$$=\frac{\sqrt{\det(-t_0''(h_{x/s}))}}{\alpha_0(x/s)}.$$

Лемма 7 доказана.

Автор признателен анонимному рецензенту, благодаря замечаниям которого работа была значительно доработана и был исправлен ряд существенных недостатков.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. А. А. Боровков, А. А. Могульский, “Интегро-локальные предельные теоремы для обобщенных процессов восстановления при выполнении условия Крамера. I”, *Сиб. матем. журн.*, **59**:3 (2018), 491–513; англ. пер.: A. A. Borovkov, A. A. Mogulskii, “Integro-local limit theorems for compound renewal processes under Cramér's condition. I”, *Siberian Math. J.*, **59**:3 (2018), 383–402.

2. А. А. Боровков, А. А. Могульский, “Интегро-локальные предельные теоремы для обобщенных процессов восстановления при выполнении условия Крамера. II”, *Сиб. матем. журн.*, **59**:4 (2018), 736–758; англ. пер.: A. A. Borovkov, A. A. Mogulskii, “Integro-local limit theorems for compound renewal processes under Cramér’s condition. II”, *Siberian Math. J.*, **59**:4 (2018), 578–597.
3. А. А. Могульский, Е. И. Прокопенко, “Интегро-локальные теоремы для многомерных обобщенных процессов восстановления при моментном условии Крамера. I”, *Сиб. электрон. матем. изв.*, **15** (2018), 475–502.
4. А. А. Могульский, Е. И. Прокопенко, “Интегро-локальные теоремы для многомерных обобщенных процессов восстановления при моментном условии Крамера. II”, *Сиб. электрон. матем. изв.*, **15** (2018), 503–527.
5. А. А. Могульский, Е. И. Прокопенко, “Интегро-локальные теоремы для многомерных обобщенных процессов восстановления при моментном условии Крамера. III”, *Сиб. электрон. матем. изв.*, **15** (2018), 528–553.
6. А. А. Могульский, “Локальные теоремы для арифметических обобщенных процессов восстановления при выполнении условия Крамера”, *Сиб. электрон. матем. изв.*, **16** (2019), 21–41.
7. А. А. Могульский, Е. И. Прокопенко, “Локальные теоремы для арифметических многомерных обобщенных процессов восстановления при выполнении условия Крамера”, *Матем. тр.*, **22**:2 (2019), 106–133.
8. Г. А. Бакай, А. В. Шкляев, “Большие уклонения обобщенного процесса восстановления”, *Дискрет. матем.*, **31**:1 (2019), 21–55; англ. пер.: G. A. Bakay, A. V. Shklyaev, “Large deviations of generalized renewal process”, *Discrete Math. Appl.*, **30**:4 (2020), 215–241.
9. А. А. Боровков, *Асимптотический анализ случайных блужданий. Быстро убывающие распределения приращений*, Физматлит, М., 2013, 447 с.; англ. пер.: A. A. Borovkov, *Asymptotic analysis of random walks. Light-tailed distributions*, Encyclopedia Math. Appl., **176**, Cambridge Univ. Press, Cambridge, 2020, xvi+420 pp.
10. А. А. Боровков, А. А. Могульский, “О больших и сверхбольших уклонениях сумм независимых случайных векторов при выполнении условия Крамера. I”, *Теория вероятн. и ее примен.*, **51**:2 (2006), 260–294; англ. пер.: A. A. Borovkov, A. A. Mogul’skii, “On large and superlarge deviations of sums of independent random vectors under the Cramér’s condition. I”, *Theory Probab. Appl.*, **51**:2 (2007), 227–255.
11. А. А. Боровков, А. А. Могульский, “Вторая функция уклонений и асимптотические задачи восстановления и достижения границы для многомерных блужданий”, *Сиб. матем. журн.*, **37**:4 (1996), 745–782; англ. пер.: A. A. Borovkov, A. A. Mogul’skii, “The second rate function and the asymptotic problems of renewal and hitting the boundary for multidimensional random walks”, *Siberian Math. J.*, **37**:4 (1996), 647–682.

Поступила в редакцию
19.VIII.2019
Исправленный вариант
12.VI.2020