Е. Г. Пыткеев, Свойство Бэра пространств непрерывных функций,
Матем. заметки, 1985, том 38, выпуск 5, 726–740

МАТЕМАТИЧЕСКИЕ ЗАМЕТКИ
т. 38, № 5 (1985)

СВОЙСТВО БЭРА ПРОСТРАНСТВ НЕПРЕРЫВНЫХ ФУНКЦИЙ

Е. Г. Пыткеев

Рассматривается свойство Бэра, псевдополнота и «выпуклые аналоги» свойства Бэра $C_p(X)$ — пространства непрерывных вещественных функций на тихоновском пространстве X в топологии поточечной сходимости. Напомним, что пространство Y называется пространством 2-й категории (бэровским), если для всякой последовательности $\{G_n\}_{n=1}^{\infty}$ открытых всюду плотных в Y множеств $\bigcap_{n=1}^{\infty} G_n$ непусто (плотно в Y). Как замечено [1], однородное пространство (в частности, $C_p(X)$) бэровское, если оно 2-й категории. Свойство Бэра и псевдополнота $C_p(X)$ рассматривались [1].

Обозначения: $\mathbf{R}$ — вещественные числа, $\mathbf{N}$ — натуральный ряд, если $f: X \to \mathbf{R}$ — вещественная функция, то $X = \operatorname{dom} f$, $\|f\| = \sup\{|f(x)|: x \in \operatorname{dom} f\}$, $S(\varphi, \varepsilon) = \{f: \operatorname{dom} f = \operatorname{dom}\varphi, \|\varphi - f\| < \varepsilon\}$, где φ — вещественная функция и $\varepsilon > 0$. Если $V = \{f \in \mathbf{R}^X: f(x_i) \in V_i, i = 1, \ldots, n\}$, то $\operatorname{supp} V = \{x_1, \ldots, x_n\}$ ($x_i \in X$, $V_i \subseteq \mathbf{R}$ — ограниченные интервалы $i = 1, \ldots, n$). Если $Y \subseteq X$, то $\pi_Y: C(X) \to C(Y)$ — проекция $\pi_Y(f) = f \mid Y$.

В [1] для произвольного топологического пространства X введена игра $\Gamma(X)$, в которой два игрока I и II поочередно выбирают конечные подмножества S_i, $i = 0, 1, \ldots$ (S_{2i} — игрок II, S_{2i+1} — игрок I), возможно, пустые, таким образом, что $S_i \cap S_j = \varnothing$, если $i \neq j$. Выигрывает игрок I, если $\bigcup_{i=0}^{\infty} S_{2i+1}$ не являются замкнутым дискретным подмножеством X. В [1] доказано, что если $C_p(X)$ бэровское, то игрок I не имеет выигрышной стратегии в игре $\Gamma(X)$. Обратное, в общем случае, не имеет места. Рассмотрим модификацию игры $\Gamma(X)$ — игру $\Gamma_1(X)$, в которой игрок I выигрывает, если $\bigcup_{i=0}^{\infty} S_{2i+1}$ не является сильно дискретным ($A \subseteq X$ сильно дискретно, если найдется дискретная система окрестностей $\{O(x)\colon x \in A\}$).

ТЕОРЕМА 1. *Пусть X — тихоновское пространство. Тогда следующие условия эквивалентны:*

I) $C_p(X)$ — *пространство 1-й категории,*

II) *игрок I имеет выигрышную стратегию в игре* $\Gamma_1(X)$,

III) *существует дизъюнктная последовательность непустых конечных множеств* $\Delta_n \subseteq X$, $n \in \mathbf{N}$, *такая, что для всякой функции* $f \in C(X)$ $\sup_n \min\{|f(x)|\colon x \in \Delta_n\} < \infty$.

Доказательство. II) $\to$ III). Будем называть последовательность, удовлетворяющую условию III), ограниченной. Для тихоновских пространств ограниченность последовательности эквивалентна тому, что она не содержит подпоследовательности $\{\Delta_{n_k}\}_{k=1}^{\infty}$, отделимой дискретной системой окрестностей. Пусть σ — выигрывающая стратегия для игрока I. Назовем последовательность $(B_0, \ldots, B_n)$ дизъюнктных конечных подмножеств X правильной, если $B_{2k+1} = \sigma(B_0, \ldots, B_{2k})$, где $2k+1 \leqslant n$. Построим по индукции дизъюнктную последовательность конечных множеств $\{\Delta_n\}_{n=0}^{\infty}$, $\Delta_n \subseteq X$ следующим образом. Пусть Δ_0 — произвольное конечное непустое множество. Предположим, что построены множества $\Delta_0, \ldots, \Delta_n$. Тогда полагаем $\Delta_{n+1} = \bigcup\{\sigma(B_0, \ldots, B_{2m})\colon (B_0, \ldots, B_{2m})$ — правильная последовательность и $\bigcup_{i=0}^{2m} B_i = \bigcup_{i=0}^{n} \Delta_i$, $m \leqslant n\}$. Покажем, что для любой подпоследовательности $\{\Delta_{n_k}\}_{k=1}^{\infty}$, $1 \leqslant n_1 < n_2 < \ldots$, найдется последовательность $\{D_k\}_{k=0}^{\infty}$, удовлетворяющая условиям:

α) $(D_0, \ldots, D_k)$ — правильная последовательность для всякого k,

β) $D_{2p+1} \subseteq \Delta_{n_{p+1}}$ для всякого $p \geqslant 0$ и $\bigcup_{i=0}^{2m} D_i = \bigcup_{i=0}^{n_m - 1} \Delta_i$ для всякого $m \geqslant 1$.

Построим последовательность $\{D_k\}_{k=0}^{\infty}$ по индукции. Положим $D_0 = \bigcup\{\Delta_i\colon 0 \leqslant i \leqslant n_1 - 1\}$. Пусть построены множества $D_0, \ldots, D_{2m}$. Построим множества D_{2m+1},

$\bar{D}_{2m+2}$. В силу условия α $(\bar{D}_0, \ldots, \bar{D}_{2m})$ — правильная последовательность и в силу условия β $\bigcup_{i=0}^{2m} D_i = \bigcup_{i=0}^{n_m-1} \Delta_i$. Тогда по построению последовательности $\{\Delta_n\}_{n=0}^{\infty}$ $\sigma(D_0, \ldots$ $\ldots, D_{2m}) \subseteq \Delta_{n_{m+1}}$. Положим $D_{2m+1} = \sigma(D_0, \ldots, D_{2m})$, $D_{2m+2} = \bigcup\{\Delta_i: n_{m+1} \leqslant i < n_{m+2}\} \setminus D_{2m+1}$. Нетрудно проверить, что последовательность $(D_0, \ldots D_{2m+2})$ также удовлетворяет условиям α, β. В силу условия α последовательность $\{D_{2p+1}\}_{p=0}^{\infty}$ не сильно дискретна, следовательно, в силу условия β $\{\Delta_{n_k}\}_{k=1}^{\infty}$ также не сильно дискретна. Так как подпоследовательность $\{\Delta_{n_k}\}_{k=1}^{\infty}$ была взята произвольной, то отсюда следует ограниченность последовательности $\{\Delta_n\}_{n=0}^{\infty}$.

III) $\to$ II). Пусть $\{\Delta_n\}_{n=1}^{\infty}$ — ограниченная последовательность. Для всякого конечного множества $P \subseteq X$ положим $n(P) = \min\{m: \Delta_m \cap P = \varnothing\}$. Тогда стратегия игрока I: $S_{2n+1} = \sigma(S_0, \ldots, S_{2n}) = \Delta_{n(D)}$, где $D = \bigcup_{i=0}^{2n} S_i$ выигрышная.

III) $\to$ I). Пусть $\{\Delta_n\}_{n=1}^{\infty}$ — ограниченная последовательность. Положим $F_m = \{f \in C(X): \sup\limits_n \min\{|f(x)|: x \in \Delta_n\} \leqslant m\}$, $m \in \mathbf{N}$. Тогда $C_p(X) = \bigcup_{m=1}^{\infty} F_m$, и непосредственно проверяется, что F_m замкнуто и нигде не плотно.

I) $\to$ III). Предположим противное. Тогда всякая дизъюнктная последовательность конечных множеств в X содержит сильно дискретную подпоследовательность. Пусть $C_p(X) = \bigcup_{n=1}^{\infty} F_n$, где F_n нигде не плотно и $F_n \subseteq F_{n+1}$. Построим по индукции последовательности конечных множеств $\{\Delta_i\}_{i=1}^{\infty}$, $\Delta_i \subseteq X$, конечных семейств открытых в R^X множеств $\{\gamma_i\}_{i=1}^{\infty}$ и чисел $\{m_i\}_{i=1}^{\infty}$, таких, что:

1) $\Delta_i \cap \Delta_j = \varnothing$, если $i \neq j$, $1 \leqslant m_1$, $m_{n+1} > m_n + 1$,

2) γ_i состоит из базисных в $\mathbf{R}^X$ множеств и $\bar{U}^{\mathbf{R}^X} \cap F_i = \varnothing$ для всякого $U \in \gamma_i$,

3) $\operatorname{supp} U \subseteq \bigcup_{j=1}^{i} \Delta_j$ для всякого $U \in \gamma_i$,

4) если $f \in U \in \gamma_i$, то $|f(x)| \leqslant m_i$, для всякого $x \in$ $\in \operatorname{supp} U$,

5) если $\varphi: \bigcup_{j=1}^{i} \Delta_j \to \mathbf{R}$ и $\|\varphi\| \leqslant m_i$, то найдется $f \in$ $\in \bigcup \gamma_{i+1}$, такая, что $|\varphi(x) - f(x)| < 1/i$ для всякого $x \in$ $\in \bigcup_{j=1}^{i} \Delta_j$.

Пусть U — произвольная базисная окрестность, такая, что $\bar{U}^{\mathbf{R}^X} \cap F_1 = \varnothing$. Положим $\Delta_1 = \operatorname{supp} U$, $\gamma_1 = \{U\}$, $m_1 = \sup\{\| f \mid \Delta_1 \|: f \in U\} + 1$. Предположим, что построены Δ_i, γ_i, m_i, $i \leqslant n$, удовлетворяющие условиям 1—5. Пусть $\Delta = \bigcup_{i=1}^{n} \Delta_i$. Выберем в множестве $\{\varphi\colon \operatorname{dom} \varphi = \Delta, \|\varphi\| \leqslant m_n\}$ конечную $1/2(n+1)$-сеть $\{\varphi_1, \ldots, \varphi_k\}$. Так как F_{n+1} нигде не плотно, то для всякого φ_i, $1 \leqslant i \leqslant k$ найдется базисная окрестность U_i, такая, что $\pi_\Delta(U_i) \subseteq S(\varphi_i, 1/2(n+1))$ и $\bar{U}^{\mathbf{R}^X} \cap F_{n+1} = \varnothing$. Положим, $\gamma_{n+1} = \{U_1, \ldots, U_k\}$, $\Delta_{n+1} = \bigcup_{i=1}^{k} \operatorname{supp} U_i \setminus \bigcup_{i=1}^{n} \Delta_i$ и $m_{n+1} = m_n + \sup\{\| f \mid \operatorname{supp} U \|: f \in U \in \gamma_i, i \leqslant n+1\} + 1$. Нетрудно проверить, что все условия 1—5 выполнены.

Выберем из последовательности $\{\Delta_n\}_{n=1}^{\infty}$ сильно дискретную подпоследовательность $\{\Delta_{n_k}\}_{k=1}^{\infty}$, $1 < n_1 < \ldots$ $\ldots, n_{k+1} > n_k + 1$. Положим

$$Z_{2k} = \Delta_{n_k}, Z_1 = \bigcup \{\Delta_i, 1 \leqslant i < n_1\},$$

$$Z_{2k+1} = \bigcup \{\Delta_i\colon n_k < i < n_{k+1}\},$$

$$l_{2k+1} = m_{n_{k+1}-1}, \mu_{2k} = \gamma_{n_k},$$

$$\mu_{2k+1} = \bigcup_{i=n_k+1}^{n_{k+1}-1} \gamma_i, l_{2k} = m_{n_k}.$$

Тогда, заменяя Δ_i на Z_i, m_i на l_i, γ_i на μ_i, нетрудно убедиться, что эти совокупности также удовлетворяют условиям 1—5, и $\{Z_{2k}\}_{k=1}^{\infty}$ сильно дискретна. Пусть $\{W_i\}_{i=1}^{\infty}$, $W_i \supseteq Z_{2i}$, $i \in \mathbf{N}$ дискретная система открытых в X множеств. Выберем, кроме того, ее такой, что:

6) $\overline{W}_i \cap Z_j = \varnothing$ для всяких $j < i$.

Положим $F = X \setminus \bigcup_{i=1}^{\infty} W_i$. Построим по индукции непрерывные вещественные функции $\{f_i\}_{i=1}^{\infty}$, последовательности $\{n_i\}_{i=1}^{\infty}$, $n_1 = 1$, $n_k < n_{k+1}$, $n_k \in \mathbf{N}$, числа $\{\varepsilon_i\}_{i=1}^{\infty}$, $1 > \varepsilon_1$, $\varepsilon_k > \varepsilon_{k+1}$, $\varepsilon_i \in \mathbf{R}$, $\varepsilon_i \to 0$, и открытые множества $U_i \in \mu_{n_i}$, такие, что:

7) $\operatorname{dom} f_i = F \cup \bigcup \{\overline{W}_j\colon 1 \leqslant i \leqslant n_i\}$, $f_i \mid \bigcup_{j=n_i}^{\infty} \operatorname{Fr} W_j \equiv 0$;

8) $\| f_i \| \leqslant l_i$;

9) $\| f_j \mid \operatorname{dom} f_i - f_i \| < \varepsilon_i$ для всякого $j > i$;

10) $f_j \in U_i$ для всякого $j > i$, $f_j^* \in \mathbf{R}^X$, $f_j^* \mid \operatorname{dom} f_j = f_j$.

Пусть $U_1 \in \mu_2$ произвольна. Так как $Z_1 \cup Z_2 \subseteq F \cup \overline{W}_1$ и X тихоновское, то найдется непрерывная функция f_1: $F \cup \overline{W}_1 \to \mathbf{R}\ f_1 | \bigcup_{j=1}^{\infty} \operatorname{Fr} W_j \equiv 0$, такая, что $\| f_1 \| \leqslant \leqslant l_1$ и $f_1 \in U_1$. Выберем ε_1, $0 < \varepsilon_1 < 1$, такое, что если $\| f \mid \operatorname{dom} f_1 - f_1 \| < \varepsilon_1$, то $f \in U_1$. В силу условия 5 найдется такой номер n_2, а также $\tilde{f}_2 \in U_2 \in \mu_{n_2}$, что $|\tilde{f}_2(x) - f_1(x)| < \varepsilon_1$ для всякого $x \in (\bigcup \{Z_j : 1 \leqslant j < n_2\} \cap \cap \operatorname{dom} f_1)$ и $1/2^{n_2} < \varepsilon_1$. Тогда найдется $f_2 \in C(F \cup \bigcup_{i=1}^{n_2} \overline{W}_i)$, такая, что $\| f_2 \mid \operatorname{dom} f_1 - f_1 \| < \varepsilon_1$, $f_2 | \bigcup_{j=n_2}^{\infty} \operatorname{Fr} W_j \equiv 0$, $f_2 | \bigcup_{j=1}^{n_2} Z_j = \tilde{f}_2$. Выберем $\varepsilon_2 < 1/2^2$, $\varepsilon_2 < \varepsilon_1$, такое, что если $\| f \mid \operatorname{dom} f_2 - f_2 \| < \varepsilon_2$, то $f \in U_2$ и $f \in U_1$.

Предположим, что функции $f_1, \ldots, f_k$ построены, выбраны числа $\varepsilon_1, \ldots, \varepsilon_k$ и $n_1, \ldots n_k$, зафиксированы открытые множества $U_1, \ldots, U_k$. Построим f_{k+1}, ε_{k+1}, n_{k+1}, U_{k+1}. Выберем n_{k+1}, а также $\tilde{f}_{k+1} \in U_{k+1} \in \mu_{n_{k+1}}$, такие, что $|\tilde{f}_{k+1}(x) - f_k(x)| < \varepsilon_k$ для всякого $x \in (\bigcup \{Z_j$: $1 \leqslant j < n_{k+1}\} \cap \operatorname{dom} f_k$ и $1/2^{n_{k+1}} < \varepsilon_k$. Тогда найдется $f_{k+1} \in C(F \cup \bigcup_{i=1}^{n_{k+1}} \overline{W}_i)$, $f_{k+1} | \bigcup_{i=1}^{n_{k+1}} \operatorname{Fr} W_i \equiv 0$, такая, что $\| f_{k+1} \mid \operatorname{dom} f_k - f_k \| < \varepsilon_k$, $f_{k+1} \mid \bigcup \{Z_j$: $1 \leqslant j \leqslant n_{k+1}\} = = \tilde{f}_{k+1}$. Выберем $\varepsilon_{k+1} < \varepsilon_k$, $\varepsilon_{k+1} < 1/2^{k+1}$, такое, что если $\| \varphi \mid \operatorname{dom} f_{k+1} - f_{k+1} \| < \varepsilon_{k+1}$, то $\varphi \in U_{k+1}$ и $\varphi \in U_i$ для всякого i, $1 \leqslant i \leqslant k$. Итак, последовательности и функции, удовлетворяющие условиям 7—10, построены. Положим $f(x) = \lim\limits_{n\to\infty} f_n(x)$, где $x \in \operatorname{dom} f_n$ (предел существует в силу условия 9). В силу условия 9 сходимость f_n к f равномерна на $\overline{W}_i$, $i \in \mathbf{N}$ и на F. Тогда дискретность семейства $\{\overline{W}_i\}_{i=1}^{\infty}$ влечет непрерывность функции f на X. Из условия 10 следует, что $f \in \overline{U}_i$ для всякого $i \in \mathbf{N}$. Но тогда в силу условия 2 $f \notin \bigcup_{i=1}^{\infty} F_i = C(X)$. Противоречие. Теорема доказана.

Следствие 1. *Пусть X.— тихоновское пространство. Пространство $C_p(X)$ бэровское тогда и только тогда, когда всякая дизъюнктная последовательность конечных множеств в X содержит сильно дискретную подпоследовательность.*

Следствие 2. *Пусть X нормально. Пространство $C_p(X)$ имеет 1-ю категорию тогда и только тогда, когда игрок I имеет выигрышную стратегию в игре $\Gamma(X)$.*

Известно [2], что произведение даже двух бэровских пространств может быть небэровским. Тем не менее справедливо

С л е д с т в и е 3. *Пусть* $C_p(X_\alpha)$, $\alpha \in A$, — *бэровские пространства*, X_α, $\alpha \in A$,— *тихоновские пространства. Тогда* $\prod_{\alpha\in A} C_p(X_\alpha)$ *бэровское.*

Д о к а з а т е л ь с т в о. Заметим [3], что $\prod_{\alpha\in A} C_p(X_\alpha) = C_p(\bigoplus_{\alpha\in A} X_\alpha)$. Теперь остается доказать, что если X_α, $\alpha \in A$ удовлетворяет условию следствия 1, то и $\bigoplus_{\alpha\in A} X_\alpha$ также ему удовлетворяет. Это легко доказать для конечного A, переходя нужное число раз к подпоследовательностям. Пусть теперь A бесконечно, $\gamma = \{\Delta_n\}_{n=1}^\infty \subseteq \bigoplus_{\alpha\in A} X_\alpha$ — дизъюнктная последовательность конечных множеств. Выберем конечное $A_1 \subseteq A$, такое, что $\Delta_1 \subseteq \bigoplus \{X_\alpha\colon \alpha \in A_1\} = Y_1$. Рассмотрим $\gamma \cap Y_1 = \{\Delta_n \cap Y_1\}_{n=1}^\infty$. Найдется $\gamma_1 \subseteq \gamma$, такое, что $|\gamma_1| = \aleph_0$ и $\gamma_1 \cap Y_1$ сильно дискретна в Y_1, следовательно, и в $\bigoplus_{\alpha\in A} X_\alpha$. Считаем, что $\Delta_1 \in \gamma_1$. Пусть $\Delta_{n_2} \in \gamma_1 \setminus \Delta_1$. Выбираем $A_2 \subseteq A$, $|A_2| < \aleph_0$, такое, что $\Delta_{n_2} \subseteq Y_1 \cup Y_2$, где $Y_2 = \bigoplus \{X_\alpha\colon \alpha \in A_2\}$. Рассмотрим $\gamma_1 \cap Y_2$. Найдется $\gamma_2 \subseteq \gamma_1$, $|\gamma_2| = \aleph_0$ и $\gamma_2 \cap Y_2$ сильно дискретно в Y_2. Выбираем $\Delta_{n_3} \in \gamma_{n_2} \setminus \{\Delta_1, \Delta_{n_2}\}$ и так далее. В итоге получим сильно дискретную подпоследовательность $\Delta_{n_1}, \Delta_{n_2}, \ldots$

С л е д с т в и е 4 [1]. *Пусть* $p \in \beta N \setminus N$, $X = N \cup p$. *Тогда* $C_p(X)$ *бэровское.*

Д о к а з а т е л ь с т в о. Пусть $\{\Delta_n\}_{n=1}^\infty$, $\Delta_n \subseteq N$ — дизъюнктная последовательность конечных непустых множеств, $N_1 = \bigcup_{p=0}^\infty \Delta_{2p+1}$, $N_2 = \bigcup_{p=1}^\infty \Delta_{2p}$. Тогда $N_1 \cap N_2 = \varnothing$. Следовательно, $\overline{N}_1^{\beta N} \cap \overline{N}_2^{\beta N} = \varnothing$ и поэтому $p_\infty \notin \overline{N}_1^X$ либо $p \notin \overline{N}_2^X$. Таким образом, либо $\{\Delta_{2p+1}\}_{p=0}^\infty$ сильно дискретна, либо $\{\Delta_{2p}\}_{p=1}^\infty$ сильно дискретна.

З а м е ч а н и е. Следствие 2 дает утвердительный ответ на вопрос из [1]. В [1] аналогичный результат был получен для довольно узкого класса нормальных пространств, а именно для $\bigoplus_{\alpha\in A} X_\alpha$, где X_α с одной неизолированной точкой.

П р е д л о ж е н и е 1. *Пусть* $X = \prod_{\alpha\in A} X_\alpha$ — *тихоновское пространство. Пространство* $C_p(X)$ *бэровское тогда и только тогда, когда* $C_p(X)$ *бэровское для всякого* $\alpha \in A$ *и все* X_α *одноточечны, кроме конечного их числа.*

Д о к а з а т е л ь с т в о. Если найдется бесконечное число X_α, $|X_\alpha| > 1$, то X содержит $D^{\aleph_0}$, где $D = \{0, 1\}$, и $C_p(X)$ не бэровское [1]. Так как X содержит копию X_α, то бэровость $C_p(X)$ влечет бэровость $C_p(X_\alpha)$ [1]. Таким образом, остается рассмотреть случай, когда A конечно. По индукции он сводится к случаю, когда $X = X_1 \times X_2$, где $C_p(X_i)$ $(i = 1, 2)$ — бэровские. Так как тогда $C_p(X_1 \oplus \oplus X_2)$ бэровское в силу следствия 3 и $X \subseteq (X_1 \oplus X_2)^2$, то достаточно доказать, что если $C_p(Y)$ бэровское, то и $C_p(Y^2)$ бэровское. Пусть $\{\Delta_n\}_{n=1}^\infty$ — дизъюнктная последовательность конечных множеств в Y^2. Построим по индукции подпоследовательность $\{\Delta_{n_k}\}_{k=1}^\infty$ и последовательность конечных множеств $\{Z_k\}_{k=1}^\infty$, $Z_k \subseteq Y$, такие, что $\Delta_{n_1} \subseteq \subseteq Z_1^2, \ldots \Delta_{n_k} \subseteq Z_k^2 \setminus Z_{k-1}^2$, $k > 1$, $Z_k \subseteq Z_{k+1}$. Положим $\Delta_1 = \Delta_{n_1}$, $Z_1 = \pi_1\Delta_1 \cup \pi_2\Delta_1$. Пусть построены $\Delta_{n_1}, \ldots \ldots, \Delta_{n_m}, Z_1, \ldots, Z_m$. Множество $Z_m^2 \subseteq Y^2$ конечно. Следовательно, найдется Δ_j, такое, что $Z_m^2 \cap \Delta_j = \varnothing$. Положим $\Delta_{n_{m+1}} = \Delta_j$, $Z_{m+1} = Z_m \cup \pi_1\Delta_j \cup \pi_2\Delta_j$. Так как $C_p(Y)$ бэровское, то найдется подпоследовательность $\{Z_{k_l}\}_{l=1}^\infty$ и дискретная последовательность открытых в Y множеств $\{W_l\}_{l=1}^\infty$ $W_l \supseteq Z_{k_l} \setminus Z_{k_l-1}$. Кроме того, будем считать, что $\overline{W}_l \cap Z_{k_l-1} = \varnothing$. Покажем, что подпоследовательность $\{\Delta_p\colon p = n_{k_l}\}_{l=1}^\infty$ сильно дискретна. Рассмотрим открытые в Y^2 множества

$$V_l = (W_l \times (X \setminus \bigcup_{j>l} \overline{W}_j)) \cup ((X \setminus \bigcup_{j>l} \overline{W}_j) \times W_l),\ l \in \mathbf{N}.$$

Легко видеть, что последовательность $\{V_l\}_{l=1}^\infty$ дизъюнктна. Проверим, что она локально-конечна. Пусть $(y_1, y_2) \in Y^2$. Так как $\{W_l\}_{l=1}^\infty$ дискретна в Y, то найдутся окрестности $O(y_1)$ и $O(y_2)$, такие, что $O(y_i) \cap W_p = \varnothing$ при $p \geqslant p_0$, $i = 1, 2$. Тогда $(O(y_1) \times O(y_2)) \cap V_p = \varnothing$ при $p \geqslant p_0$. Покажем, что $V_l \supseteq Z_{k_l}^2 \setminus Z_{k_l-1}^2$. Пусть $(y_1, y_2) \in Z_{k_l}^2 \setminus \setminus Z_{k_l-1}^2$. Это означает, что $y_1, y_2 \in Z_{k_l}$ и $y_1 \notin Z_{k_l-1}$ или $y_2 \notin Z_{k_l-1}$. Пусть $y_1 \notin Z_{k_l-1}$. Тогда $y_1 \in Z_{k_l} \setminus Z_{k_l-1} \subseteq W_l$. Если $y_2 \notin Z_{k_l-1}$, то $y_2 \in Z_{k_l} \setminus Z_{k_l-1} \subseteq W_l$ и тогда $(y_1, y_2) \in \in W_l \times W_l \subseteq W_l \times (X \setminus \bigcup_{j>l} \overline{W}_j) \subseteq V_l$. Пусть теперь $y_2 \in Z_{k_l-1}$. Тогда $y_2 \notin \overline{W}_j$ при $j > l$, следовательно, $y_2 \in X \setminus \bigcup_{j>l} \overline{W}_j$ и $(y_1, y_2) \in W_l \times (X \setminus \bigcup_{j>l} \overline{W}_j) \subseteq V_l$. Аналогично рассматривается случай, когда $y_1 \in Z_{k_l-1}$. Выберем теперь открытые множества $\tilde{V}_l$, такие, что

$\Delta_p \subseteq \tilde{V}_l \subseteq \overline{\tilde{V}}_l \subseteq V$, $p = n_{k_l}$. Система $\{\tilde{V}_l\}_{l=1}^{\infty}$ дискретна. Предложение доказано.

Напомним, что пространство X называется псевдополным [2], если в X найдется $\{\gamma_n\}_{n=1}^{\infty}$ — полная последовательность π-баз ($\varnothing \notin \gamma_n$ для всякого $n \in N$), т. е. если $U_n \in \gamma_n$ и $U_n \supseteq \bar{U}_{n+1}$, то $\bigcap_{n=1}^{\infty} U_n \neq \varnothing$. Множество $Y \subseteq X$ называется C-вложенным в X, если $\pi_Y C(X) = C(Y)$.

ТЕОРЕМА 2. *Пусть X — тихоновское пространство. Тогда следующие условия эквивалентны:*

I) $C_p(X)$ *псевдополно,*

II) *всякое счетное подмножество $A \subseteq X$ C-вложено и замкнуто в X.*

Импликация II) $\to$ I), по существу, доказана в [1]. Доказательство I) $\to$ II) разобъем на две леммы.

ЛЕММА 1. *Пусть $A \subseteq X$ и $\pi_A C(X) \supseteq L$ — плотное, полное по Чеху подпространство, тогда $\pi_A C(X) = \mathbf{R}^A$.*

Предположим противное. Тогда найдется $f \in \mathbf{R}^A \setminus \pi_A C(X)$. Так как $\pi_A C(X)$ линейное подпространство, то $f + L = \{f + g\colon g \in L\} \subseteq \mathbf{R}^A \setminus \pi_A C(X)$. Пространства L, $f + L$ плотны в $\mathbf{R}^A$ — пространстве 2-й категории [2] и, будучи полными по Чеху, являются G_δ-множествами в $\mathbf{R}^A$, и тогда $L \cap (f + L) \neq \varnothing$. Это противоречит тому, что $(f + L) \cap \pi_A C(X) = \varnothing$ и $L \subseteq \pi_A C(X)$.

ЛЕММА 2. *Пусть $Y \subseteq Z$ и Y — плотное псевдополное подпространство регулярного пространства Z. Если $\pi\colon Z \to M$ — открытое непрерывное отображение Z на полное метрическое пространство M, то $\pi(Y) \supseteq M_1$ — плотное G_δ-множество в M.*

Доказательство. Для всякого открытого множества $U \subseteq Y$ зафиксируем $\hat{U}$ — открытое множество в Z, такое, что $\hat{U} \cap Y = U$. Пусть $\{\gamma_n\}_{n=1}^{\infty}$ — полная последовательность π-баз в Y. Так как Z регулярно, то $\{\hat{\gamma}_n\}_{n=1}^{\infty} = \{\hat{U}\colon U \in \gamma_n\}_{n=1}^{\infty}$ — π-база в Z. Тогда, учитывая, что π — открыто, непрерывно и «на» $\{\pi\hat{\gamma}_n\}_{n=1}^{\infty} = \{\pi\hat{U}\colon U \in \gamma_n\}_{n=1}^{\infty}$ — π-база в M. Пусть ρ — полная метрика в M. Построим по индукции семейства μ_n, $n = 0, 1, \ldots$, такие, что:

1) $\mu_n \subseteq \gamma_n$ $(n = 1, \ldots)$;

2) $\overline{\mu}_{n+1} \succ \mu_n$ $(n = 0, 1, \ldots)$;

3) $\underline{\pi\hat{\mu}_n}$ — дизъюнктное семейство $(n = 0, 1, \ldots)$;

4) $\overline{\pi\hat{\mu}_{n+1}} \succ \pi\mu_n$ $(n = 0, 1, \ldots)$;

5) $\bigcup \pi\mu_n$ — плотно в M $(n = 0, 1, \ldots)$;

6) $\operatorname{diam} \pi\hat{\mu}_n < 1/n$ (т. е. для всякого $U \in \mu_n$, $\operatorname{diam} \pi\hat{U} < 1/n$ $(n = 1, \ldots)$).

Положим $\mu_0 = \{M\}$. Предположим, что построены μ_i, $i \leqslant n$, удовлетворяющие условиям 1—6. Построим μ_{i+1}. Пусть $U \in \mu_n$ произвольно. Построим по индукции множества $V_\alpha(U) \in \gamma_{n+1}$, $0 < \alpha < \alpha(U)$ такие, что:

7) $\varnothing \neq V_\alpha(U) \subseteq U$, $0 < \alpha < \alpha(U)$;

8) $\bigcup \{\pi\hat{V}_\alpha(U)\colon \alpha < \alpha(U)\}$ плотно в $\pi\hat{U}$;

9) $\operatorname{diam} \overline{\pi\hat{V}_\alpha}(U) < 1/n+1$, $0 < \alpha < \alpha(U)$;

10) $\pi\hat{V}_\alpha(U) \subseteq \pi\hat{U}$, $0 \leqslant \alpha < \alpha(U)$;

11) $V_\alpha(U) \cap V_\beta(U) = \varnothing$, $\alpha \neq \beta$.

Положим $V_0(U) = \varnothing$. Пусть построены $V_\alpha(U)$, $\alpha < \beta$, удовлетворяющие условиям 7—10. Построим $V_\beta(U)$. Рассмотрим

$$(\pi(\hat{U}) \setminus \overline{\bigcup \{\pi\hat{V}_\alpha(U)\colon \alpha < \beta\}}) = T.$$

Если $T = \varnothing$, то построение закончено и $\beta = \alpha(U)$. Пусть $T \neq \varnothing$. Рассмотрим $x \in U$, такое, что $\pi(x) \in T \cap \cap \pi(U)$ (такое x найдется, так как U плотности в $\hat{U}$ и T непустое открытое множество). В силу непрерывности π найдется $O(x)$ в Z, такое, что $\overline{O(x)} \subseteq \hat{U}$, $\overline{\pi O(x)} \subseteq \pi(\hat{U})$ и $\operatorname{diam} \pi O(x) < 1/n+1$. Положим $V_\beta(U) = V \subseteq \subseteq O(x) \cap Y$, $V \in \gamma_{n+1}$. Построение заканчивается на некотором ординале $\alpha(U)$. Полагаем $\mu_{n+1} = \{V_\beta(U)\colon U \in \in \mu_n,\ 0 < \beta < \alpha(U)\}$. Итак, построены μ_n, $n \in N$, удовлетворяющие условиям 1—6. В силу условия 5 и полноты M, множество $M_1 = \bigcap_{n=1}^{\infty} \bigcup \pi\hat{\mu}_n$ — плотное G_δ-множество в M. Покажем, что $\pi Y \supseteq M_1$. Пусть $x \in M_1$. Тогда найдутся множества $U_n \in \mu_n$, такие, что $x \in \pi\hat{U}_n$. В силу условия 6 $\bigcap \{\pi\hat{U}_n\colon n \in N\} = x$. В силу условий 2, 3 $U_1 \supseteq \bar{U}_2 \supseteq U_2 \supseteq \ldots$, следовательно, $\bigcap_{n=1}^{\infty} U_n = y \in Y$. Покажем, что $\pi(y) = x$. Иначе, в силу условия 6 найдется n_0, такое, что $\pi(\hat{U}_{n_0}) \not\ni \pi(y)$. Противоречие. Лемма доказана.

Доказательство теоремы 2. Полагаем в лемме 2 $Y = C_p(X)$ $Z = \mathbf{R}^X$, $\pi = \pi_A$, где $A \subseteq X$ — произвольное счетное множество. Тогда $\pi_A C_p(X) \supseteq M_1$ — полное по Чеху и плотное подпространство. В силу леммы 1 $\pi_A C_p(X) = \mathbf{R}^A$. Так как это справедливо для всякого счетного множества A, то всякое счетное $A \subseteq X$ замкнуто и C-вложено. Теорема доказана.

Следствие 5. *Если $C_p(X)$ — псевдополное Q-пространство, где X тихоновское, то X дискретно.*

Доказательство. Если $C_p(X)$ псевдополно, то в силу теоремы 2 всякая $f: X \to \mathbf{R}$ строго $\aleph_0$-непрерывна в смысле [4]. Но так как $C_p(X)$ Q — пространство, то каждая строго $\aleph_0$-непрерывная функция на X непрерывна [4]. Следовательно, всякая функция на X непрерывна и потому X дискретно.

Следствие 6 [5]. *Если $C_p(X)$ гомеоморфно $\mathbf{R}^\tau$, то X дискретно.*

Пусть E — локально выпуклое линейное топологическое пространство, $A \subseteq E$. Напомним, что A называется уравновешенным, если $\alpha A \subseteq A$ для всякого α, $|\alpha| \leqslant 1$, и поглощающим, если для всякого $x \in E$ найдется $\lambda > 0$, такое, что $x \in \alpha A$ для всякого α, $|\alpha| \geqslant \lambda$. Известны следующие «выпуклые аналоги» свойства Бэра. E называется *бочечным*, если всякое замкнутое выпуклое уравновешенное и поглощающее множество является окрестностью нуля [6]; *W-бочечным*, если всякое замкнутое поглощающее множество является окрестностью нуля [7]; *E — выпукло бэровское*, если оно не представимо в виде счетной суммы замкнутых выпуклых нигде не плотных подмножеств [8]. Наконец, *E — монотонно выпукло бэровское*, если оно не представимо в виде возрастающей последовательности замкнутых выпуклых нигде не плотных подмножеств [8]. Было известно [8], что все эти свойства различны и не совпадают с бэровостью, за исключением, быть может, совпадения бэровости с выпуклой бэровостью (вопрос из [8]). Ниже дается критерий выпуклой бэровости $C_p(X)$ (теорема 3) и на основании его и критерия бэровости $C_p(X)$ (следствие 1) строится контрпример.

В дальнейшем нам потребуются

ЛЕММА 3 [9]. *Всякий непрерывный линейный функционал $\Phi \in C_p^*(X)$ имеет следующий вид: $\Phi = \sum_{i=1}^n \alpha_i \delta_{x_i}$, $\alpha_i \in \mathbf{R}$, $\alpha_i \neq 0$, где δ_{x_i} — дельта-функция Дирака.*

Будем обозначать $\operatorname{supp} \Phi = \{x_1, \ldots, x_n\}$.

ЛЕММА 4 [6]. *В локально выпуклом линейном топологическом пространстве всякое замкнутое выпуклое множество является пересечением замкнутых полупространств. В частности, если $T \subseteq C_p(X)$ — замкнутое выпуклое множество, то $T = \bigcap \{H^{c_\alpha}(\Phi_\alpha)\colon \alpha \in A\}$, где $H^c(\Phi) = \{f\colon \Phi(f) \geqslant c\}$ и $\Phi_\alpha \in C_p^*(X)$, $\alpha \in A$.*

Положим $\operatorname{supp} T = \bigcup \{\operatorname{supp} \Phi_\alpha\colon \alpha \in A\}$.

ЛЕММА 5. *Для тихоновского пространства X следующие условия эквивалентны:*

1) *для всякой последовательности $\{E_n\}_{n=1}^\infty$ бесконечных подмножеств X найдется $f \in C(X)$, такая, что $\sup\{|f(x)|\colon x \in E_n\} = \infty$ для всякого $n \in \mathbf{N}$,*

2) *для всякой последовательности $\{E_n\}_{n=1}^\infty$ бесконечных подмножеств X найдется дискретное семейство открытых множеств $\{W_i\}_{i=1}^\infty$, такое, что для всякого $n \in \mathbf{N}$ множество $\{i\colon W_i \cap E_n \neq \varnothing\}$ бесконечно.*

Доказательство несложно и опускается.

ТЕОРЕМА 3. *Пространство $C_p(X)$, где X тихоновское, выпукло бэровское тогда и только тогда, когда X удовлетворяет одному из эквивалентных условий леммы* 5.

Доказательство. Пусть X не удовлетворяет условию 1 леммы 5. Тогда найдется последовательность $\{E_n\}_{n=1}^\infty$ бесконечных подмножеств X, такая, что для всякой $f \in C(X)$ существует $n \in N$, для которого $\sup\{|f(x)|\colon x \in E_n\} < \infty$. Тогда $C_p(X) = \bigcup_{n,m} F_{nm}$, где $F_{nm} = \{f \in C(X)\colon \sup\{|f(x)|\colon x \in E_n\} \leqslant m\}$. Непосредственно проверяется, что для всяких $n, m \in \mathbf{N}$ множество F_{nm} замкнуто, выпукло и нигде не плотно. Пусть теперь X удовлетворяет условию 2 леммы 5. Покажем, что $C_p(X)$ выпукло бэровское. Предположим противное. Тогда X бесконечно и не дискретно и $C_p(X) = \bigcup\{T_s\colon s \in S\}$, $|S| \leqslant \aleph_0$, где T_s — замкнутое выпуклое нигде не плотное множество для всякого $s \in S$. Пусть $S_1 = \{s \in S\colon |\operatorname{supp} T_s| < \aleph_0\}$, $S_2 = S \setminus S_1$. Можно считать, что $S_1 \neq \varnothing$ (иначе, дополняем $\{T_s\colon s \in S\}$ множеством $T_{x_0} = \{f \in C(X)\colon f(x_0) = 0\}$, где x_0 не изолированная точка X), и что $S_2 \neq \varnothing$ (иначе дополняем $\{T_s\colon s \in S\}$ множеством $\{f_0\}$, где $f_0 \in C(X)$). Занумеруем, если необходимо с повторениями, семейство $\{T_s\colon s \in S_1\}$ нечетными числами T_{2n-1}, $n \in \mathbf{N}$, а семейство $\{T_s\colon s \in S_2\}$ четными T_{2n}, $n \in \mathbf{N}$. В силу условия 2 леммы 5 найдется дискретная система γ открытых множеств, пересекающаяся в бесконечном числе с $\operatorname{supp} T_{2n}$, $n \in N$. По лемме 4 $T_{2n} = \bigcap\{H^{c_\alpha}(\Phi_\alpha)\colon \alpha \in A_n\}$. По индукции построим дискретную систему открытых множеств $\mu = \{W_j\}_{j=1}^\infty$, $\mu \succ \gamma$, а также $\alpha_n \in A_n$ и $x_n \in \operatorname{supp} \Phi_{\alpha_n}$ таким образом, что:

1) $\overline{W}_j \cap \operatorname{supp} \Phi_{\alpha_j} = x_j$;

2) $\overline{W}_j \cap (\bigcup_{i<j} \operatorname{supp} T_{2i+1} \cup \bigcup_{i<j} \operatorname{supp} \Phi_{\alpha_i}) = \varnothing$.

Построим по индукции непрерывные вещественные функции $\{f_i\}_{i=1}^{\infty}$, открытые базисные множества $\{U_i\}_{i=1}^{\infty}$, числа $\{\varepsilon_i\}_{i=1}^{\infty}$, $\varepsilon_i > \varepsilon_{i+1}$, $\varepsilon_i < 1/2^i$, такие, что:

3) $\operatorname{dom} f_i = F \cup \bigcup_{j=1}^{i} W_j$, где $F = X \setminus \bigcup_{j=1}^{\infty} W_j$;

4) $f_j \mid \bigcup_{i=j}^{\infty} FrW_i \equiv 0$, $\| f_j \mid \operatorname{dom} f_i - f_i \| < \varepsilon_i$ для всякого $j > i$;

5) $\bar{U}_i \cap T_{2i-1} = \varnothing$, $f_j^* \in U_i$ для всякого $j > i$ и $f_j^* \in \mathbf{R}^X$, $f_j^* \mid \operatorname{dom} f_j = f_j$, $\operatorname{supp} U_i \subseteq \bigcup \operatorname{supp} T_{2j-1}$, $U_{i+1} \subseteq U_i$;

6) $\Phi_{\alpha_j}(f_j^*) \leqslant c_{\alpha_j} - 2\, (f_j^* \in \mathbf{R}^X,\ f_j^* \mid \operatorname{dom} f_j = f_j)$.

Так как supp T_1 — конечное множество и T_1 нигде не плотно в $C_p(X)$, то найдется открытое базисное множество U_1, такое, что $\bar{U}_1 \cap T_1 = \varnothing$ и supp U_1 = supp T_1. Найдется $f_1 \in C(F \cup \overline{W}_1)$, такая, что $f_1^* \in U_1$ и $\Phi_{\alpha_1}(f_1^*) \leqslant c_{\alpha_1} - 2$ (это следует из условия 1). Выберем $\varepsilon_1 < 1$, такое, что если $\| f \mid \operatorname{dom} f_1 - f_1 \| < \varepsilon_1$, то $f \in U_1$. Предположим, что функции $f_1, \ldots f_k$ построены, выбраны числа $\varepsilon_1, \ldots \varepsilon_k$ и открытые базисные множества $U_1, \ldots, U_k$. Найдется открытое базисное множество U_{k+1}, такое, что $\operatorname{supp} U_{k+1} \subseteq \bigcup_{j \leqslant k+1} \operatorname{supp} T_{2j-1}$, $\bar{U}_{k+1} \cap T_{2j-1} = \varnothing$ при $j \leqslant k+1$, $U_{k+1} \subseteq U_k$ и если $\operatorname{dom} g = \operatorname{supp} U_{k+1}$, $g \in \pi_{\operatorname{supp} U_{k+1}}(U_{k+1})$, то $\| g \mid \operatorname{dom} f_i - f_i \| < \varepsilon_i$. Возьмем любую из таких g и определим ее в точке x_{k+1} так, чтобы выполнялось условие 6, а затем продолжим на $F \bigcup_{j=1}^{k+1} \overline{W}_j$ с выполнением условия 4. После этого находим ε_{k+1}, $\varepsilon_{k+1} < \varepsilon_k$, $\varepsilon_{k+1} < 1/2^{k+1}$ таким образом, что если $\| g \mid \operatorname{dom} f_{k+1} - f_{k+1} \| < \varepsilon_{k+1}$, то $g \in U_i$, $i \leqslant k+1$. Итак, построены $\{f_n\}_{n=1}^{\infty}$. Полагаем $f(x) = \lim_{n\to\infty} \{f_n(x)\colon x \in \operatorname{dom} f_n\}$. Тогда условие 4 гарантирует непрерывность f, а условия 5 и 6 то, что $f \notin T_{2n-1}$ и $f \notin T_{2n}$ при $n \in N$. Приходим к противоречию.

Пример 1. Существует тихоновское пространство X, такое, что $C_p(X)$ выпукло бэровское, но не бэровское.

Пусть $X = \theta \cup \bigcup_{n=1}^{\infty} \Delta_n$, где $\theta \in \Delta_n$ для всякого $n \in N$, $\Delta_n \cap \Delta_{n'} = \varnothing$, если $n \neq n'$ и $|\Delta_n| = n$. Все точки X, отличные от θ, полагаем изолированными. Окрестности точки θ имеют следующий вид: $O(\theta) = X \setminus T$, где $\theta \notin T$ и $\lim_{n\to\infty} |T \cap \Delta_n| / n = 0$.

I) $C_p(X)$ не бэровское. Для этого достаточно убедиться в том, что дизъюнктная последовательность конечных множеств $\{\Delta_n\}_{n=1}^{\infty}$ не имеет сильно дискретной подпоследовательности. Действительно, иначе нашлось бы замкнутое множество T вида $T = \bigcup_{k=1}^{\infty}\Delta_{n_k}$, но $|T \cap \Delta_{n_k}|/ /n_k = n_k/n_k = 1$. Противоречие.

II) $C_p(X)$ выпукло бэровское. Пусть $\{E_m\}_{m=1}^{\infty}$ — последовательность бесконечных подмножеств X. Занумеруем ее так, что всякий элемент последовательности встречается бесконечно много раз. Затем по индукции построим множество T, пересекающее Δ_n не более чем в одной точке для всякого n и пересекающего все множества E_n. Тогда $\{T \cap \Delta_n\colon\ T \cap \Delta_n \neq \varnothing\}$ — искомое дискретное семейство открытых множеств, пересекающее все E_m, $m \in N$ бесконечным числом элементов.

ТЕОРЕМА 4. *Пусть X — тихоновское пространство. Пространство $C_p(X)$ бочечно тогда и только тогда, когда оно монотонно выпукло бэровское.*

Доказательство. Достаточно доказать, что из бочечности $C_p(X)$ следует монотонно выпуклая бэровость. Для этого воспользуемся известным результатом [9]: бочечность $C_p(X)$ эквивалентна тому, что всякое ограниченное подмножество X конечно. Нетрудно проверить, что последнее эквивалентно следующему; для всякого бесконечного подмножества $E \subseteq X$ найдется дискретная система открытых множеств $\{W_i\}_{i=1}^{\infty}$ и $E \cap W_i \neq \varnothing$ для всякого $i \in \mathbf{N}$. Предположим противное. Пусть $C_p(X)$ бочечно, но не монотонно выпукло бэровское. Тогда $C_p(X) = \bigcup_{n=1}^{\infty} F_n$, $F_n \subseteq F_{n+1}$, F_n замкнуто, выпукло и нигде не плотно. Положим $T = \bigcup_{n=1}^{\infty} \operatorname{supp} F_n$. Возможны два случая: $|T| < \aleph_0$ и $|T| \geqslant \aleph_0$. В первом случае для всякого $n \in \mathbf{N}$ найдется нигде не плотное $P_n \subseteq \mathbf{R}^T$, такое, что $\pi_T F_n \subseteq P_n$. Так как $\mathbf{R}^T$ бэровское, то найдется $z_0 \in R^T$, $z_0 \notin \bigcup_{n=1}^{\infty} P_n$ и тогда $z_0 \notin \pi_T C_p(X)$. Приходим к противоречию. Пусть $|T| \geqslant \aleph_0$. Тогда по индукции построим последовательности $n_1 < n_2 < \ldots$, $n_i \in \mathbf{N}$, $x_1, x_2, \ldots, x_i \in X$, $x_i \neq x_j$, линейные непрерывные функционалы $\Phi_i \in C_p^*(X)$, такие, что $x_i \in \operatorname{supp} \Phi_i \subseteq \operatorname{supp} F_{n_i}$, $x_i \notin \operatorname{supp} \Phi_j$, $j < i$, $c_i \in \mathbf{R}$, такие, что $H^{c_i}(\Phi_i) \supseteq \supseteq F_{n_i}$, $i \in N$. Последовательность $\{x_i\}_{i=1}^{\infty}$ содержит сильно дискретную подпоследовательность $\{x_{m_l}\}_{l=1}^{\infty}$, $m_1 < < m_2 < \ldots$ Пусть $\{W_l\}_{l=1}^{\infty}$ — дискретная система открытых множеств, $\overline{W}_l \cap \operatorname{supp} \Phi_{m_l} = x_{m_l}$, $\overline{W}_l \cap \operatorname{supp} \Phi_{m_p} = \varnothing$, если $p < l$. Пусть $F = X \setminus \bigcup_{l=1}^{\infty} W_l$. Далее по индукции построим непрерывные вещественные функции $\{f_l\}_{l=1}^{\infty}$, такие, что:

1) $\operatorname{dom} f_l = F \cup \bigcup_{j=1}^{l} \overline{W}_j$, $f_l \mid \bigcup_{i=l}^{\infty} FrW_i \equiv 0$;

2) $f_{j+1} \mid \operatorname{dom} f_j = f_j$;

3) $\Phi_{m_l}(f_l^*) \leqslant c_m - 2$ $(f_l^* \in \mathbf{R}^X,\ f_l^* \mid \operatorname{dom} f_l = f_l)$.

Полагаем $f(x) = \lim\limits_{n\to\infty} \{f_n(x):\ x \in \operatorname{dom} f_n\}$. Тогда $f \in C(X)$ и условие 3 влечет, что $f \notin F_p$, $p = n_{k_l}$ для всякого $l \in \mathbf{N}$. Следовательно, $f \notin \bigcup \{F_p : p = n_{k_l}, l \in \mathbf{N}\} = C(X)$. Противоречие. Теорема доказана.

ТЕОРЕМА 5. *Пусть X — тихоновское пространство. Пространство $C_p(X)$ W-бочечно и только тогда, когда оно бэровское.*

Доказательство. Достаточно проверить, что если $C_p(X)$ W-бочечно, то оно бэровское. Пусть $C_p(X)$ пространство 1-й категории. В силу теоремы 1 в X найдется ограниченная последовательность $\{\Delta_n\}_{n=1}^{\infty}$. Положим

$$F = \{f \in C(X):\ \sup_n \ \min \{|f(x)|:\ x \in \Delta_n\} \leqslant 1\}.$$

Непосредственно проверяется, что F — замкнутое уравновешенное и поглощающее множество. Теорема доказана.

В заключение несколько слов о $C_c(X)$ — пространстве непрерывных функций с компактно открытой топологией.

ТЕОРЕМА 6. *Пространство $C_c(X)$, где X тихоновское, выпукло бэровское тогда и только тогда, когда X удовлетворяет следующему условию: для всякой последовательности $\{E_n\}_{n=1}^{\infty}$, где ни одно E_n не является относительно компактным, найдется $f \in C(X)$, такая, что* $\sup\{|f(x)|:\ x \in E_n\} = \infty$ *для всякого* $n \in \mathbf{N}$.

ТЕОРЕМА 7. *Пусть X — тихоновское пространство. Пространство $C_c(X)$ бочечно тогда и только тогда, когда $C_c(X)$ монотонно выпукло бэровское.*

ТЕОРЕМА 8. *Пусть X — метрическое пространство. Тогда следующие условия эквивалентны:* а) *$C_c(X)$ бэровское,* б) *$C_c(X)$ выпукло бэровское,* в) *$C_c(X)$ — W-бочечное,* г) *X локально компактно.*

Доказательства этих теорем аналогичны доказательствам соответствующих теорем о $C_p(X)$.

П р и м е ч а н и е п р и к о р р е к т у р е. После того как статья была послана в печать, вышло из печати сообщение [10], где анонсированы результаты, сформулированные в следствии 3 и теореме 2 нашей работы.

Институт математики
и механики УНЦ АН СССР

Поступило
04.02.85

СПИСОК ЦИТИРОВАННОЙ ЛИТЕРАТУРЫ

[1] L u t z e r D. J., M c C o y R. A. Category in function spaces.— Pasific J. Math., 1980, v. 90, № 1, p. 145—168.

[2] O x t o b y J. Cartesian products of Baire spaces.— Fund. Math., 1961, v. 49, p. 157—166.

[3] E n g e l k i n g R. General Topology.— Warszawa, PAN, 1977.

[4] А р х а н г е л ь с к и й А. В. Топологические свойства пространств функций: теоремы двойственности.— Докл. АН СССР, 1983, т. 269, № 6, с. 1289—1292.

[5] Т к а ч у к В. В. О кардинальных инвариантах типа числа Суслина.— Докл. АН СССР, 1983, т. 270, № 4, с. 795—798.

[6] Ш е ф е р Х. Топологические векторные пространства.— М.: Мир, 1971.

[7] W i l a n s k y A. Functional analysis.— N. Y.: Blaisdell, 1964.

[8] K h a l e e l u l l a S. M. Counterexamples in topological vector spaces.— Lect. Notes in Math., v. 936, Springer, 1982.

[9] S c h m e t s J. Espaces de fonctions continus.— Lect. Notes in Math., 1976, v. 519, Springer, 1976, p. 1—150.

[10] Т к а ч у к В. В. Пространства $C_p(X)$ — представление в виде объединения счетного числа «хороших» подпространств, свойства типа полноты и их характеризация в терминах свойств $vC_p(X)$.— Вестник МГУ, сер. мат., мех., 1985, № 2, с. 92.