



Math-Net.Ru

All Russian mathematical portal

N. A. Koreshkov, Modules and ideals of algebras of associative type,
Izv. Vyssh. Uchebn. Zaved. Mat., 2008, Number 8, 25–34

<https://www.mathnet.ru/eng/ivm1677>

Use of the all-Russian mathematical portal Math-Net.Ru implies that you have read and agreed to these terms of use

<https://www.mathnet.ru/eng/agreement>

Download details:

IP: 18.97.9.170

May 25, 2025, 01:53:58



Н.А. КОРЕШКОВ

МОДУЛИ И ИДЕАЛЫ АЛГЕБР АССОЦИАТИВНОГО ТИПА

Аннотация. В данной работе изучаются некоторые свойства алгебр ассоциативного типа, которые были определены в предыдущих работах автора. Показано, что конечномерная алгебра ассоциативного типа над полем нулевой характеристики является однородно полупростой тогда и только тогда, когда некоторая форма, определенная с помощью формы следа, невырождена. Доказана полная приводимость для модулей над полупростыми алгебрами в некотором подклассе алгебр ассоциативного типа. Доказано, что любой левый однородный идеал полупростой алгебры ассоциативного типа порождается однородным идемпотентом.

Ключевые слова: алгебра ассоциативного типа, однородно полупростая алгебра, модуль, идеал, однородный идемпотент.

УДК: 512.554

Abstract. In this paper we study some properties of associative-type algebras introduced in previous papers of the author. We show that a finite-dimensional algebra of associative type over a field of zero characteristic is homogeneously semisimple, if and only if a certain form defined by the trace form is nonsingular. We prove the total reducedness of modulus over semisimple algebras in a certain subclass of associative-type algebras. We also prove that any left homogeneous ideal of a semisimple algebra of associative type is generated by a homogeneous idempotent.

Keywords: algebra of associative type, homogeneous semisimple algebra, modulus, ideal, homogeneous idempotent.

В работах [1], [2] были введены алгебры лиевского типа, которые достаточно естественным образом обобщают понятие алгебр Ли, ассоциативных алгебр, супералгебр Ли с \mathbb{Z}_2 -градуировкой и некоторые другие классы алгебр. В [3] и [4] изучались алгебры, являющиеся частным случаем алгебр лиевского типа и названные алгебрами ассоциативного типа. В этих работах приведены примеры таких алгебр, связанные с понятиями групповых алгебр и алгебр картановского типа. Напомним определение алгебры ассоциативного типа.

Пусть G — полугруппа, T — некоторое конечное подмножество в G , $A = \bigoplus_{\alpha \in T} A_\alpha$ — G -градуированная алгебра над полем k , т. е. для любых $\alpha, \beta \in T$ $A_\alpha A_\beta \subset A_{\alpha \cdot \beta}$, если $\alpha \cdot \beta \in T$, и $A_\alpha A_\beta = 0$, если $\alpha \cdot \beta \notin T$. Назовем алгебру A алгеброй ассоциативного типа, если для любых элементов $\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3 \in T$ существует $\lambda = \lambda(\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3) \in k$, $\lambda \neq 0$ такое, что $(a_{\alpha_1} a_{\alpha_2}) a_{\alpha_3} = \lambda a_{\alpha_1} (a_{\alpha_2} a_{\alpha_3})$ для любых $a_{\alpha_i} \in A_{\alpha_i}$, $i = 1, 2, 3$.

В дальнейшем рассматриваются только конечномерные алгебры ассоциативного типа. Для таких алгебр в [3] доказано существование наибольшего однородного нильпотентного

идеала, который в дальнейшем называется однородным радикалом соответствующей алгебры. (Здесь и далее подпространство M в G -градуированной алгебре $A = \bigoplus_{\alpha \in T} A_\alpha$, $T \subset G$, называем однородным, если $M = \bigoplus_{\alpha \in T} M \cap A_\alpha$, $T \subset G$.) Этот факт приводит к появлению однородно полупростых алгебр ассоциативного типа, а именно: алгебра A ассоциативного типа называется однородно полупростой, если в ней отсутствуют нетривиальные однородные нильпотентные идеалы.

Нильпотентность алгебры зависит, вообще говоря, от расстановки скобок при определении степеней этой алгебры. Но, как показано в [3], если B — однородная подалгебра алгебры A ассоциативного типа такая, что если для любых k элементов b_1, \dots, b_k из B их произведение равно нулю при одной расстановке скобок, то оно равно нулю и при любой другой расстановке. Таким образом, расстановка скобок в произведении не влияет на нильпотентность однородных подалгебр в алгебре ассоциативного типа.

Кроме того, в [3] доказано, что любая однородно полупростая алгебра ассоциативного типа A является прямой суммой двусторонних идеалов B_i , $i = 1, \dots, r$, каждый из которых есть однородно простая алгебра (т.е. алгебра, не имеющая нетривиальных двусторонних идеалов). При этом каждый идеал B_i является суммой однородных минимальных левых идеалов L_{ij} , $j = 1, \dots, s_i$, и любые два идеала L_{ij} и L_{ik} для данного i изоморфны как A -модули. В дальнейшем идеалы B_1, \dots, B_r будем называть простыми компонентами алгебры A . Приведем определения двух последних понятий.

Пусть G — полугруппа, M — G -множество. Если $B = \bigoplus_{\alpha \in T} B_\alpha$, $T \subset G$, $|T| < \infty$, — G -градуированная алгебра над полем k , $V = \bigoplus_{\gamma \in S} V_\gamma$, $S \subset M$, $|S| < \infty$, — линейное пространство над полем k , то линейное отображение $f : B \rightarrow \text{End}_k(V)$ будем называть представлением ассоциативного типа, если

- 1) $f(B_\alpha)V_\gamma \subset V_{\alpha \cdot \gamma}$, когда $\alpha \cdot \gamma \in S$, либо $f(B_\alpha)V_\gamma = 0$, когда $\alpha \cdot \gamma \notin S$, где $\alpha \in T$, $\gamma \in S$;
- 2) $f(b_\alpha b_\beta)v_\gamma = \lambda_{\alpha, \beta, \gamma} f(b_\alpha) f(b_\beta)v_\gamma$, когда $b_\alpha \in B_\alpha$, $b_\beta \in B_\beta$, $v_\gamma \in V_\gamma$, а $\lambda_{\alpha, \beta, \gamma} \in k$, $\lambda_{\alpha, \beta, \gamma} \neq 0$, где $\alpha, \beta \in T$, $\gamma \in S$.

В этом случае пространство B будем называть B -модулем ассоциативного типа, а соотношения 1) и 2) записывать в виде

- 1)' $B_\alpha V_\gamma \subset V_{\alpha \cdot \gamma}$, если $\alpha \cdot \gamma \in S$, $B_\alpha V_\gamma = 0$, если $\alpha \cdot \gamma \notin S$;
- 2)' $(b_\alpha b_\beta)v_\gamma = \lambda_{\alpha, \beta, \gamma} b_\alpha (b_\beta v_\gamma)$ для любых $\alpha, \beta \in T$, $\gamma \in S$.

Если $M = G$, $V = B$ а $f(b) = L_b$ — оператор левого умножения для $b \in B$, то B будет алгеброй ассоциативного типа.

Пусть G — полугруппа, M и M' — два G -множества, $\pi : M \rightarrow M'$ — G -отображение. Если $V = \bigoplus_{\gamma \in S} V_\gamma$, $S \subset M$, $|S| < \infty$, и $V' = \bigoplus_{\gamma' \in S'} V_{\gamma'}$, $S' \subset M'$, $|S'| < \infty$, — два A -модуля ассоциативного типа над алгеброй, градуированной полугруппой G , $A = \bigoplus_{\alpha \in T} A_\alpha$, $T \subset G$, $|T| < \infty$, то линейное отображение $\varphi_\pi : V \rightarrow V'$ будем называть гомоморфизмом A -модуля V в A -модуль V' , если

- 1) $\pi(S) \subset S'$ и для любого $\gamma \in S$ $\varphi_\pi(V_\gamma) \subset V'_{\pi\gamma}$;
- 2) для любых $\alpha \in T$, $\beta \in S$ существует такой ненулевой элемент $\lambda_{\alpha, \beta} \in k$, что $\varphi_\pi(ax) = \lambda_{\alpha, \beta} a \varphi_\pi(x)$, когда $a \in A_\alpha$, $x \in V_\beta$.

Если φ_π — биекция, то φ_π — изоморфизм A -модулей ассоциативного типа.

Рассматривая алгебру ассоциативного типа B как модуль над самой собой, назовем его левым регулярным B -модулем и обозначим ${}_B B$.

Подпространство $U = \bigoplus_{\gamma \in S} U_\gamma$, $U_\gamma = U \cap V_\gamma$, будем называть B -подмодулем модуля V , если U является B -модулем в смысле приведенного определения.

Будем говорить, что B -модуль V ассоциативного типа вполне приводим, если для любого B -подмодуля ассоциативного типа W существует B -подмодуль ассоциативного типа U такой, что $V = W \oplus U$.

Используя стандартные рассуждения, легко показать, что это определение равносильно разложению B -модуля ассоциативного типа в сумму (не обязательно прямую) неприводимых подмодулей ассоциативного типа. Таким образом, минимальные левые однородные идеалы в алгебре ассоциативного типа A — это в точности неприводимые подмодули левого регулярного A -модуля ассоциативного типа ${}_A A$. Поэтому из теоремы о разложении однородной полупростой алгебры, доказанной в [3], получается

Теорема 1. *Если A — конечномерная однородно полупростая алгебра ассоциативного типа, то левый регулярный A -модуль ${}_A A$ вполне приводим.*

Используя этот результат, докажем следующее утверждение.

Теорема 2. *Каждый ненулевой однородный двусторонний идеал B однородно полупростой конечномерной алгебры ассоциативного типа A является прямой суммой некоторых компонент этой алгебры.*

Доказательство. Идеал B содержит однородный минимальный левый идеал L алгебры A . Тогда $Lx \subset B$ для любого однородного элемента $x \in A$. (Элемент называем однородным, если он принадлежит одной из компонент A_α .) В [3] доказано, что минимальные однородные левые идеалы L и L' изоморфны (как A -модули) тогда и только тогда, когда $L' = La'$ для некоторого однородного элемента $a' \in L'$. Поэтому идеал B содержит сумму B_L всех однородных минимальных левых идеалов, изоморфных L . Как показано в [3], B_L является одной из простых компонент алгебры A .

Обозначим через B' сумму всех простых компонент алгебры A , содержащихся в идеале B . В силу полной приводимости левого регулярного модуля ${}_A A$ имеем $B = B' \oplus B''$, где B'' — A -модуль или левый однородный идеал. Если $B'' \neq 0$, то он содержит ненулевой минимальный однородный левый идеал L'' . Тогда по предыдущему $B_{L''} \subset B'$. С другой стороны, $B' \cap B'' = 0$, что ведет к противоречию. Следовательно, $B'' = 0$ и идеал B представляется в виде прямой суммы некоторых компонент алгебры A . \square

В дальнейшем полагаем, что все алгебры ассоциативного типа и их модули являются конечномерными векторными пространствами над полем k и поле k имеет характеристику нуль.

Следуя ([5], с. 31), будем говорить, что однородный элемент a является собственно нильпотентным, если ab и ba — нильпотентные элементы для любого однородного элемента b .

Условие собственной нильпотентности элемента можно описать в терминах некоторой формы.

Пусть $k[x]$ — кольцо многочленов одной переменной. Обозначим $A[x] = k[x] \otimes_k A$, $V[x] = k[x] \otimes_k V$, где $V = \bigoplus_{\gamma \in S \subset M} V_\gamma$ — модуль ассоциативного типа, $A = \bigoplus_{\alpha \in T \subset G} A_\alpha$. Превратим $V[x] = \bigoplus_{\gamma \in S \subset M} V_\gamma[x]$, $V_\gamma[x] = k[x] \otimes_k V_\gamma$ в модуль ассоциативного типа над $A[x] = \bigoplus_{\alpha \in T \subset G} A_\alpha[x]$, $A_\alpha[x] = k[x] \otimes_k A_\alpha$, полагая $(f \otimes a)(g \otimes v) = fg \otimes av$, $a \in A_\alpha$, $v \in V_\gamma$, $f, g \in k[x]$. Тогда линейное отображение $\rho : A \rightarrow \text{End}_k(V)$, определяющее структуру A -модуля ассоциативного типа

на V , продолжается до линейного отображения $\rho_x : A[x] \rightarrow k[x] \otimes_k \text{End}_k(V)$, действующего по правилу $\rho_x(f \otimes a) = f \otimes \rho(a)$, $f \in k[x]$, $a \in A_\alpha$.

Обозначим через δf старший коэффициент многочлена $f(x) \in k[x]$. Определим отображение S_V на $A[x] \times A[x]$ со значениями в k по формуле

$$S_V(a, b) = \delta \text{tr} (X \rho_x(a) \rho_x(b)), \quad a, b \in A[x],$$

$X = \begin{bmatrix} X_1 & & 0 \\ & \ddots & \\ 0 & & X_s \end{bmatrix}$, $X_i = x^i E_i$, $E_i = \begin{bmatrix} 1 & & 0 \\ & \ddots & \\ 0 & & 1 \end{bmatrix}$, $n_i = \dim V_{\gamma_i}$ — размер E_i , s — количество элементов в S .

Если $a, b \in A$, то $S_V(a, b) = \delta \text{tr} (X \rho(a) \rho(b))$, где отождествляем $\rho_x(1 \otimes a)$ и $\rho(a)$. Любую матрицу $\rho(a)$, $a \in A_\alpha$, можно представить в виде $[\rho_{ij}(a)]$, $i, j = 1, \dots, s$, где $\rho_{ij}(a) \in \text{End}_k(V_{\gamma_j}, V_{\gamma_i})$.

Если выбрать в V базис, согласованный с градуировкой этого пространства, то второе соотношение из определения модуля ассоциативного типа можно переписать в виде

$$\rho(ab) = \rho(a) \rho(b) \Lambda, \quad \rho(a), \rho(b), \rho(ab), \Lambda \in \text{End}_k(V), \quad (1)$$

где a, b — однородные элементы из A , $a \in A_\alpha$, $b \in A_\beta$, причем $\Lambda = \begin{bmatrix} \Lambda_1 & & 0 \\ & \ddots & \\ 0 & & \Lambda_s \end{bmatrix}$, $\Lambda_i =$

$\lambda_i(\alpha, \beta) E_i$, $\lambda_i(\alpha, \beta) \in k$, $\lambda_i(\alpha, \beta) \neq 0$, $E_i = \begin{bmatrix} 1 & & 0 \\ & \ddots & \\ 0 & & 1 \end{bmatrix}$, $n_i = \dim V_{\gamma_i}$ — размер E_i .

По аналогии с ассоциативными алгебрами A -модуль V ассоциативного типа будем называть точным, если из условия $av = 0$ для любого $v \in V$ и некоторого $a \in A$ следует $a = 0$.

Предложение 1. Пусть $V = \bigoplus_{\gamma \in S \subset M} V_\gamma$ — точный A -модуль ассоциативного типа над градуированной алгеброй $A = \bigoplus_{\alpha \in T \subset G} A_\alpha$. Тогда однородный элемент a собственнo нильпотентен, если и только если $S_V(a, b) = S_V(b, a) = 0$ для любого однородного элемента $b \in A$.

Доказательство. Пусть z — однородный нильпотентный элемент из A , а $\rho(z) = [\rho_{ij}(z)]$, $i, j = 1, \dots, s$, — матрица элемента z относительно представления ρ в пространстве V . Тогда $\text{tr} \rho_{ii}(z) = 0$, $i = 1, \dots, s$. Действительно, так как $\rho(ab) = \rho(a) \rho(b) \Lambda$ (см. (1)) для однородных элементов a и b , то $(\rho(z))^n = \underbrace{\rho(z \dots (zz) \dots)}_n \Lambda = 0$, если n — степень нильпотентности

элемента z , т.е. оператор $\rho(z)$ нильпотентен.

Если z — однородный элемент из A , то для любого $j = 1, \dots, s$ в матрице $\rho(z) = [\rho_{ij}(z)]$ имеется не более одного ненулевого блока $\rho_{ij}(z)$. В случае, когда $\rho_{ii}(z) = 0$, и $\text{tr} \rho_{ii}(z) = 0$. Если же $\rho_{ii}(z) \neq 0$, то для любого n $(\rho(z)^n)_{ii} = (\rho_{ii}(z))^n$.

Таким образом, для однородного нильпотентного элемента z блок $\rho_{ii}(z)$ также нильпотентен. В частности, $\text{tr} \rho_{ii}(z) = 0$.

Пусть a — однородный собственнo нильпотентный элемент. Тогда для любого однородного элемента b произведение ab нильпотентно. Поэтому $\text{tr} \rho_{ii}(ab) = 0$, $i = 1, \dots, s$. Но $\rho(ab) = \rho(a) \rho(b) \Lambda$, т.е. $\text{tr} (\rho(a) \rho(b))_{ii} = 0$, $i = 1, \dots, s$, а значит,

$$S_V(a, b) = \delta \text{tr} (X \rho(a) \rho(b)) = \delta \sum_{i=1}^s x^i \text{tr} (\rho(a) \rho(b))_{ii} = 0.$$

Пусть $S_V(a, b) = 0$ для любого однородного элемента b и некоторого элемента a . Так как $S_V(a, b) = \delta \operatorname{tr}(X\rho(a)\rho(b)) = \delta \operatorname{tr}(X\rho(ab)\Lambda)$, то $\operatorname{tr}(\rho(ab)) = 0$. Заменим элемент b на $b_1 = b(ab)$. По условию $S_V(a, b_1) = 0$. Но

$$\begin{aligned} S_V(a, b_1) &= \delta \operatorname{tr}(X\rho(a)\rho(b(ab))) = \delta \operatorname{tr}(X\rho(a(b(ab)))P) = \\ &= \lambda_{a,b,ab}^{-1} \delta \operatorname{tr}(X(\rho(ab)^2)P) = \lambda_{a,b,ab}^{-1} \delta \operatorname{tr}(X(\rho(ab))^2 P'), \end{aligned}$$

где P, P' — блочно-диагональные матрицы с ненулевыми коэффициентами на диагонали, причем коэффициент в каждом блоке постоянен. Следовательно, $\operatorname{tr}(\rho(ab))^2 = 0$. Повторяя эту процедуру, получим $\operatorname{tr}(\rho(ab))^n = 0$ для любого натурального n . Поскольку основное поле имеет характеристику нуль, то $\rho(ab)$ — нильпотентный оператор, т.е. $(\rho(ab))^m = 0$ для некоторого натурального m . Опять используя соотношение $(\rho(ab))^m = \rho((ab)^{[m]})\Lambda$, где $(ab)^{[m]} = \underbrace{((ab)(\dots((ab)(ab))\dots))}_m$, имеем $\rho((ab)^{[m]}) = 0$. Так как ρ — точное представление,

то $(ab)^{[m]} = 0$.

Все приведенные рассуждения можно повторить и для элемента ba , что доказывает собственную нильпотентность a . \square

Пусть $M = G, V = A$ и ρ — регулярное представление, определяемое операторами левого умножения $L_x, x \in A$. Все рассуждения предложения 1 справедливы и в этом случае, за исключением перехода от $\rho((ab)^{[m]}) = 0$ к $(ab)^{[m]} = 0$, который использует точность ρ . В данном случае применим соотношение $L_{(ab)^{[m]}} = 0$ к элементу ab . Тогда $(ab)^{[m+1]} = 0$ и получаем

Предложение 2. *Если A — алгебра ассоциативного типа, то однородный элемент $a \in A$ собственнo нильпотентен тогда и только тогда, когда $S_A(a, b) = S_A(b, a) = 0$ для любого однородного элемента $b \in A$.*

Пусть I — подпространство в алгебре A . Обозначим $I_{L,V}^\perp = \{a \in A, S_V(a, b) = 0, b \in I\}$, $I_{R,V}^\perp = \{a \in A, S_V(b, a) = 0, b \in I\}$, где V — некоторый A -модуль ассоциативного типа. Если $I = A$, то $A_{L,V}^\perp$ будем называть левым ядром отображения S_V и обозначать $\operatorname{Ker}_L S_V$, а $A_{R,V}^\perp$ — правым ядром и обозначать $\operatorname{Ker}_R S_V$.

Если G — группа, то будем говорить, что G -множество M не имеет неподвижных точек, если $gt = t \Leftrightarrow g = 1$.

Предложение 3. *Пусть $A = \bigoplus_{\alpha \in T \subset G} A_\alpha$, G — группа, $V = \bigoplus_{\gamma \in S \subset M} V_\gamma$ — A -модуль ассоциативного типа и M — G -множество без неподвижных точек. Если I — однородный двусторонний идеал в A , то $I_{L,V}^\perp, I_{R,V}^\perp$ — также однородные двусторонние идеалы, причем $I_{L,V}^\perp = I_{R,V}^\perp$.*

В частности, из предложения 3 вытекает, что $\operatorname{Ker}_L S_V = \operatorname{Ker}_R S_V$, и данное множество, обозначаемое $\operatorname{Ker} S_V$, будем называть ядром отображения S_V .

Доказательство. Во-первых, отметим, что $I_{L,V}^\perp$ (соответственно $I_{R,V}^\perp$) является подпространством в A . Действительно, если $S_V(a, b) = 0$ и $S_V(a', b) = 0$, то $\operatorname{tr}(X\rho(a)\rho(b)) = 0$ и $\operatorname{tr}(X\rho(a')\rho(b)) = 0$, где ρ — представление, отвечающее модулю V . Из линейности функции следа и линейности ρ получим $\operatorname{tr}(X\rho(\alpha a + \alpha' a')\rho(b)) = 0$, $\alpha, \alpha' \in k$. Следовательно, $S_V(\alpha a + \alpha' a', b) = 0$. Если последнее соотношение выполняется для любого $b \in I$, то $\alpha a + \alpha' a' \in I_{L,V}^\perp$.

Кроме того, $I_{L,V}^\perp, I_{R,V}^\perp$ — однородные пространства. В силу однородности идеала I условие ортогональности достаточно проверить, когда $b = b_\beta \in I \cap A_\beta$. Пусть $S_V(a, b_\beta) = 0$ и $a = \sum_{\alpha \in S} a_\alpha$. Если $\alpha \cdot \beta \neq 1$, то все диагональные блоки матрицы $\rho(a_\alpha)\rho(b_\beta)$ равны нулю, так как G -множество M не имеет неподвижных точек. Следовательно, в этих случаях $\text{tr}(X\rho(a_\alpha)\rho(b_\beta)) = 0$, а значит, и $\text{tr}\left(X\rho\left(a - \sum_{\alpha \neq \beta^{-1}} a_\alpha\right)\rho(b_\beta)\right) = 0$. Поэтому $S_V(a_{\beta^{-1}}, b_\beta) = 0$, т. е. все компоненты a ортогональны b_β и, значит, принадлежат $I_{L,V}^\perp$.

Пусть $a \in A_\alpha, b \in A_\beta$ и $S_V(a, b) = 0$. Тогда $\text{tr}(X\rho(a)\rho(b)) = 0$, т. е. $\sum_{i=1}^s \sum_{j=1}^s x^i \text{tr}(\rho_{ij}(a)\rho_{ji}(b)) = 0$, где s — количество компонент градуировки в модуле V . Если $\rho_{ji}(b) \neq 0$ для некоторого i , то номер j определяется однозначно, так как в каждом i -м блочном столбце может быть только один ненулевой блок. Поэтому коэффициент при x^i в рассмотренной сумме равен $\text{tr}(\rho_{ij}(a)\rho_{ji}(b))$. Значит, и в случае, когда $\rho_{ji}(b) \neq 0$, тем не менее $\text{tr}(\rho_{ij}(a)\rho_{ji}(b)) = 0$.

Рассмотрим $C = \sum_{k=1}^s \sum_{t=1}^s x^k \text{tr}(\rho_{kt}(b)\rho_{tk}(a))$. Если $\rho_{kt}(b) \neq 0$ для некоторого k , то $\text{tr}(\rho_{tk}(a)\rho_{kt}(b)) = 0$. Но $\text{tr}(\rho_{tk}(a)\rho_{kt}(b)) = \text{tr}(\rho_{kt}(b)\rho_{tk}(a))$, следовательно, $C = 0$. Тем более, $S_V(b, a) = \delta C = 0$.

Итак, $I_{L,V}^\perp = I_{R,V}^\perp$. Это множество будем обозначать I_V^\perp . В частности, $\text{Ker}_L S_V = \text{Ker}_R S_V = \text{Ker} S_V$.

Проверим, что I_V^\perp — однородный двусторонний идеал. Для этого убедимся, что если $a \in A_\alpha, b \in A_\beta, c \in A_\gamma$, то $S_V(ab, c) = 0 \Leftrightarrow S_V(a, bc) = 0$. Вычислим каждое из указанных значений функции S_V :

$$S_V(ab, c) = \delta \sum_{i=1}^s \sum_{j=1}^s x^i \text{tr}(\rho_{ij}(ab)\rho_{ji}(c)) = \delta \sum_{i=1}^s \sum_{j=1}^s \sum_{k=1}^s \lambda_i x^i \text{tr}(\rho_{ik}(a)\rho_{kj}(b)\rho_{ji}(c)),$$

так как $\delta \text{tr}(X\rho(ab)\rho(c)) = \delta \text{tr}(X\Lambda\rho(a)\rho(b)\rho(c))$. (При условии, что G -множество M не имеет неподвижных точек, любая матрица $\rho(a) = [\rho_{ij}(a)]$ имеет не более одного ненулевого блока $\rho_{ij}(a)$ для каждого i . Поэтому $\rho(ab) = \rho(a)\rho(b)\tilde{\Lambda} = \Lambda\rho(a)\rho(b)$, где блочно-диагональная матрица Λ получается из матрицы $\tilde{\Lambda}$ перестановкой диагональных блоков.) Соответственно

$$S_V(a, bc) = \delta \sum_{i=1}^s \sum_{k=1}^s x^i \text{tr}(\rho_{ik}(a)\rho_{ki}(bc)) = \delta \sum_{i=1}^s \sum_{k=1}^s \sum_{j=1}^s \lambda'_i x^i \text{tr}(\rho_{ik}(a)\rho_{kj}(b)\rho_{ji}(c)),$$

так как $\delta \text{tr}(X\rho(a)\rho(bc)) = \delta \text{tr}(X\rho(a)\rho(b)\rho(c)\Lambda')$.

Если $S_V(ab, c) = 0$, то $\sum_{k=1}^s \sum_{j=1}^s \text{tr}(\rho_{ik}(a)\rho_{kj}(b)\rho_{ji}(c)) = 0$ для любого $i = 1, \dots, s$, так как все λ_i ненулевые. Но тогда из выражения $S_V(a, bc)$ имеем $S_V(a, bc) = 0$. Это доказывает сформулированное выше условие “частичной” инвариантности. \square

Если G — группа, $M = G, V = A$ и ρ — регулярное представление, то условия предложения 3 выполнены, и получаем

Следствие. Пусть G — группа, $A = \bigoplus_{\alpha \in T \subset G} A_\alpha$ — алгебра ассоциативного типа. Если I — однородный двусторонний идеал в A , то $I_{L,A}^\perp, I_{R,A}^\perp$ — также однородные двусторонние идеалы, причем $I_{L,A}^\perp = I_{R,A}^\perp$.

В частности, $\text{Ker}_L S_A = \text{Ker}_R S_A$, и данное множество (обозначаемое $\text{Ker } S_A$) будем называть ядром отображения S_A .

В силу соотношения $(ab)c = \lambda a(bc)$, $\lambda \neq 0$, $\lambda \in k$, для однородных элементов a, b, c алгебры A по индукции легко проверить, что если I — однородный двусторонний идеал в A , то любая его степень I^k — также однородный двусторонний идеал. Отсюда вытекает, что сумма двух однородных нильпотентных идеалов также является однородным нильпотентным идеалом. Поэтому для конечномерной алгебры A существует наибольший однородный нильпотентный идеал, который будем обозначать $R_{qr(A)}$.

Предложение 4. Пусть G — группа, A — G -градуированная алгебра ассоциативного типа. Тогда $R_{qr(A)} = \text{Ker } S_A$.

Доказательство. Пусть I — однородный нильпотентный идеал в A . Тогда для любого однородного элемента x из I элемент $xa \in I$, следовательно, x собственно нильпотентен, когда a однороден. Поэтому из предложения 2 следует, что $I \subset \text{Ker } S_A$. В частности, $R_{qr(A)} \subset \text{Ker } S_A$.

Обратно, пусть $y \in \text{Ker } S_A$. В силу предложения 2 элемент y собственно нильпотентен. В частности, y^2 нильпотентен. Но тогда нильпотентен и элемент y . Используя теорему 1 из [3], получим, что $\text{Ker } S_A$ нильпотентно. Поэтому $\text{Ker } S_A \subset R_{qr(A)}$. Два полученных включения доказывают сформулированное выше равенство. \square

Как было определено выше, алгебра A ассоциативного типа однородно полупроста, если в ней отсутствуют однородные двусторонние нильпотентные идеалы, т. е. $R_{qr(A)} = 0$. Тогда из предложения 4 вытекает

Теорема 3. Пусть G — группа, A — G -градуированная алгебра ассоциативного типа. Тогда A однородно полупроста, если и только если форма S_A невырождена.

Если A полупроста, то она и однородно полупроста, поэтому имеет место

Теорема 4. Если A — полупростая G -градуированная алгебра ассоциативного типа, где G — группа, то форма S_A невырождена.

Теорема 5. Если $A = \bigoplus_{\alpha \in T} A_\alpha$, $T \subset G$, $|T| < \infty$, — полупростая алгебра ассоциативного типа и G — группа, то $1 \in T$ и A_1 — полупростая ассоциативная алгебра.

Доказательство. В [3] показано, что полупростая алгебра ассоциативного типа $A = \bigoplus_{\alpha \in T} A_\alpha$, $T \subset G$ содержит однородный идемпотент e . Если G — группа, то идемпотент e необходимо принадлежит A_1 , 1 — единица группы G , т. е. $A_1 \neq 0$. Подставляя идемпотент e в соотношение $(ab)c = \lambda a(bc)$, $a, b, c \in A$, имеем $\lambda = 1$, т. е. A_1 — ассоциативная алгебра.

Для любого однородного элемента $a \in A_\alpha$ матрица оператора левого умножения L_a в базисе, согласованном с градуировкой алгебры A , имеет вид $[L_{ij}(a)]$, $i, j = 1, \dots, r$, $r = |T|$ и $L_{ij}(a)$ — ограничение оператора L_a на подпространство A_{α_j} со значениями в A_{α_i} . Как было отмечено в предложении 1, для каждого j имеется не более одного ненулевого блока $L_{ij}(a)$, а так как G — группа, то и для любого i имеется не более одного ненулевого блока $L_{ij}(a)$. В частности, все диагональные блоки $L_{ii}(c)$ матрицы L_c нулевые, когда $c \in A_\alpha$, $\alpha \neq 1$.

Если $a \in A_\alpha$, $b \in A_\beta$ и $\alpha \cdot \beta \neq 1$, то $S_A(a, b) = 0$, так как $L_a L_b = L_{ab} \Lambda$, $\Lambda = \begin{bmatrix} \Lambda_1 & & 0 \\ & \ddots & \\ 0 & & \Lambda_r \end{bmatrix}$, $\Lambda_i = \lambda_i E_i$, $\lambda_i \in k$, $\lambda_i \neq 0$, E_i — единичный оператор пространства A_{α_i} , $i = 1, \dots, r$, и все диагональные блоки матрицы L_{ab} нулевые. Следовательно, $S_A(A_1, A_\beta) = 0$, когда $\beta \neq 1$.

Если $z \in A_1$ такой, что матрица L_z нильпотентна, то все диагональные блоки $L_{ii}(z)$ — также нильпотентные матрицы, и поэтому след каждого диагонального блока $\text{tr} L_{ii}(z)$ равен нулю.

Пусть I — нильпотентный идеал в A_1 . Тогда для $a \in I$, $b \in A_1$ оператор L_{ab} нильпотентен в силу формулы $L_{z[n]} = (L_z)^n \Lambda$ (см. предложение 1). Поэтому $\text{tr}(XL_aL_b) = \sum \lambda_i x^i \text{tr}(L_{ii}(ab)) = 0$. Отсюда следует, что $\delta \text{tr}(XL_aL_b) = 0$, $a \in I$, $b \in A_1$, т. е. $S_A(I, A_1) = 0$. Используя полученное выше условие $S_A(A_1, A_\beta) = 0$, когда $\beta \neq 1$, имеем $S_A(I, A) = 0$. В силу полупростоты алгебры A форма S_A невырождена (теорема 4), следовательно, $I = 0$, т. е. A_1 — полупростая ассоциативная алгебра. \square

Теорема 6. Пусть $A = \bigoplus_{\alpha \in T} A_\alpha$, $T \subset G$, — полупростая конечномерная алгебра ассоциативного типа над полем нулевой характеристики, а $V = \bigoplus_{\gamma \in S} V_\gamma$, $S \subset M$, — конечномерный A -модуль ассоциативного типа. Если G — группа, G -множество M не имеет неподвижных точек, то V вполне приводим.

Доказательство. Пусть φ — представление ассоциативного типа, соответствующее модулю $V = \bigoplus_{\alpha \in S} V_\alpha$. Обозначим через φ_1 сужение представления φ на подалгебру A_1 . Каждое подпространство V_α , $\alpha \in S$, является модулем ассоциативного типа над A_1 . Соответствующее ему представление ассоциативного типа обозначим через $\varphi_{1,\alpha}$. Тогда отображение $\psi_\alpha = \lambda_{1,1,\alpha} \varphi_{1,\alpha}$, где $\lambda_{1,1,\alpha}$ — константа из п. 2 определения модуля ассоциативного типа, задает обычное представление полупростой ассоциативной алгебры A_1 в пространстве V_α . Так как всякая конечномерная ассоциативная полупростая алгебра имеет единицу e_1 ([6], с. 34), то ее образ $\psi_\alpha(e_1)$ является проектором, и поэтому имеет место разложение $V_\alpha = V'_\alpha \oplus V''_\alpha$, где $V'_\alpha = \{v_\alpha \in V_\alpha, \psi_\alpha(e_1)v_\alpha = v_\alpha\}$, $V''_\alpha = \{v_\alpha \in V_\alpha, \psi_\alpha(e_1)v_\alpha = 0\}$.

Пусть $W'' = \bigoplus_{\alpha \in S} V''_\alpha$, $W' = \bigoplus_{\alpha \in S} V'_\alpha$. Тогда $V = W' \oplus W''$, причем W' , W'' — A -подмодули. Действительно, так как $\psi_\alpha(e_1)v_\alpha = 0$, когда $v_\alpha \in V''_\alpha$, а $\psi_\alpha(e_1) = \lambda_{1,1,\alpha} \varphi_{1,\alpha}(e_1)$, то $e_1 v_\alpha = 0$. Тогда, очевидно, $A_1 v_\alpha = 0$. Но, как уже отмечалось, алгебра A является суммой левых однородных идеалов Ae_k , порожденных идемпотентами e_k , которые принадлежат A_1 . Поэтому $AV_\alpha = 0$, $\alpha \in S$, т. е. $AW' = 0$.

Пусть $v_\alpha \in V'_\alpha$ и предположим, что существует $a_\beta \in A_\beta$ такой, что $a_\beta v_\alpha = v'_\gamma + v''_\gamma$ и $v''_\gamma \neq 0$. Тогда $e_1(a_\beta v_\alpha) = e_1 v'_\gamma \in V'_\gamma$, так как $e_1 v''_\gamma = 0$. С другой стороны,

$$e_1(a_\beta v_\alpha) = \varphi(e_1)\varphi(a_\beta)v_\alpha = \lambda_{1,\beta,\alpha}^{-1} \varphi(e_1 a_\beta)v_\alpha = \lambda_{1,\beta,\alpha}^{-1} \varphi(\bar{\lambda}_{1,1,\beta} a_\beta)v_\alpha = \lambda_{1,\beta,\alpha}^{-1} \bar{\lambda}_{1,1,\beta} a_\beta v_\alpha,$$

где $\bar{\lambda}_{1,1,\beta}$ — константа из определения регулярного представления. Здесь использован тот факт, что оператор левого умножения на e_1 действует как ненулевой скаляр на каждом пространстве A_β , $\beta \in T$. Действительно, если $B = \langle a_\beta \in A_\beta, \beta \in T, e_1 a_\beta = 0 \rangle \neq 0$, то $A_1 B = 0$, поэтому $AB = 0$ (см. соответствующее рассуждение для пространства V''_α). Тогда B — однородный двусторонний ненулевой идеал в A с условием $B^2 = 0$, что противоречит полупростоте алгебры A . Таким образом, для любого $a_\beta \in A$ имеет место включение $a_\beta v_\alpha \in V'_\gamma$, когда $v_\alpha \in V'_\alpha$, т. е. $AW' \subseteq W'$. Поэтому считаем, что образ $\psi_\alpha(e_1)$ единичного элемента e_1 из A_1 является единичным оператором на V_α . В частности, $V_\alpha = A_1 V_\alpha$, и, следовательно, $V = AV$.

Так как алгебра A является конечной суммой минимальных левых однородных идеалов Ae_k , порожденных однородными идемпотентами $e_k \in A_1$, то $V = \sum_{\alpha \in V} \sum_{k=1}^n (Ae_k)v_\alpha$. Очевидно, $(Ae_k)v_\alpha = \bigoplus_{\beta \in T} (A_\beta e_k)v_\alpha$ — A -подмодуль модуля V . Зададим гомоморфизм A -модулей

$Ae_k \rightarrow (Ae_k)v_\alpha$ формулой $ae_k \rightarrow (ae_k)v_\alpha$. Если V' — некоторый A -подмодуль в $(Ae_k)v_\alpha$, то он имеет вид $V' = \bigoplus_{\beta \in T} (B_\beta e_k)v_\alpha$, $B_\beta \subset A_\beta$ и $(B_\beta e_k)v_\alpha \subset V'$. В силу того, что G -множество M не имеет неподвижных точек, то полный прообраз A -модуля V' есть левый однородный идеал $B = \bigoplus_{\beta \in T} B_\beta e_k$. Так как Ae_k — минимальный левый однородный идеал в A , то идеал B либо равен нулю, либо совпадает с Ae_k . Следовательно, подмодуль $(Ae_k)v_\alpha$ или неприводим, или равен нулю. Таким образом, V есть сумма неприводимых A -модулей, т. е. V вполне приводим. \square

Приведем еще один результат, указывающий на определенное сходство структуры ассоциативной алгебры и алгебры ассоциативного типа.

Теорема 7. Пусть A — полупростая алгебра ассоциативного типа с градуировкой, определенной группой G , и I — левый однородный идеал в A . Тогда $I = Ae$ для некоторого однородного идемпотента e из A .

Доказательство. В силу полупростоты алгебры A идеал I не может быть нильпотентным и поэтому содержит ненулевой идемпотент [3]. Так как множество T индексов градуировки алгебры A является подмножеством группы G , то все идемпотенты содержатся в A_1 , 1 — единица группы G .

Каждому идемпотенту $e \in I \cap A_1$ поставим в соответствие пространство $A(e) = \langle x_\alpha \in I \cap A_\alpha, \alpha \in T, x_\alpha e = 0 \rangle$. Тогда $A(e)$ — левый однородный идеал в A . Множество левых однородных идеалов $A(e)$ непусто и потому имеет минимальный элемент $A(e_0)$.

Если $A(e_0) = 0$, то из равенства $xe_0 - xe_0^2 = 0$ для любого однородного элемента $x \in I$ следует $(x - \lambda xe_0)e_0 = 0$, $\lambda \neq 0$, $\lambda \in k$, т. е. $x = \lambda xe_0$. Но тогда $I = Ie_0 \subset Ae_0 \subset I$, откуда $I = Ae_0$.

Предположим, что $A(e_0) \neq 0$. Покажем, что это предположение приводит к противоречию. Так как $A(e_0)$ — ненулевой левый однородный идеал полупростой алгебры A , то $A(e_0)$ содержит идемпотент $e_1 \in A_1$. По определению $e_1 \in I$ и $e_1 e_0 = 0$. Рассмотрим элемент $e = e_0 + e_1 - e_0 e_1$. Используя тот факт, что A_1 — ассоциативная алгебра (теорема 5), легко проверить, что e — идемпотент. Из соотношения $e_1 e = e_1 \neq 0$ следует $e \neq 0$.

Пусть $x \in A(e)$ и x — однородный элемент. Тогда $xe = 0$ и $(xe)e_0 = 0$. Но $ee_0 = e_0$, следовательно, $xe_0 = 0$, т. е. $x \in A(e_0)$. Значит, $A(e) \subseteq A(e_0)$. Но $e_1 \in A(e_0)$, так как $e_1 e_0 = 0$ и $e_1 \notin A(e)$, поскольку $e_1 e = e_1 \neq 0$. Поэтому $A(e)$ строго содержится в $A(e_0)$, что противоречит минимальности $A(e_0)$. Таким образом, случай $A(e_0) \neq 0$ невозможен. \square

ЛИТЕРАТУРА

- [1] Bahturin Y., Zaicev M. *Identities of graded algebras* // J. Algebra. — 1998. — V. 205. — № 1. — P. 1–12.
- [2] Бахтурин Ю.А., Зайцев М.В., Сегал С.К. *G-тождества неассоциативных алгебр* // Матем. сб. — 1999. — Т. 190. — № 11. — С. 3–14.
- [3] Корешков Н.А. *О нильпотентности и разложении алгебр ассоциативного типа* // Изв. вузов. Математика. — 2006. — № 9. — С. 37–42.
- [4] Корешков Н.А. *Об одном классе алгебр ассоциативного типа* // Изв. вузов. Математика. — 2007. — № 3. — С. 38–46.
- [5] Чеботарев Н.Г. *Введение в теорию алгебр*. — М.–Л.: ОГИЗ, Гостехиздат, 1949. — 88 с.
- [6] Херстейн И. *Некоммутативные кольца*. — М.: Мир, 1972. — 192 с.

Н.А. Корешков

*доцент, кафедра алгебры и математической логики,
Казанский государственный университет,
420008, г. Казань, ул. Кремлевская, д. 18,*

e-mail: Nikolai.Koreshkov@ksu.ru

N.A. Koreshkov

*Associate Professor, Chair of Algebra and Mathematical Logic,
Kazan State University,
18 Kremlyovskaya str., Kazan, 420008 Russia,*

e-mail: Nikolai.Koreshkov@ksu.ru