

Math-Net.Ru

All Russian mathematical portal

S. A. Kochengin, Justification of the construction of the solution of a problem on a point source of SH waves in a layered media with a vertical boundary, *Zap. Nauchn. Sem. POMI*, 1994, Volume 218, 56–66

Use of the all-Russian mathematical portal Math-Net.Ru implies that you have read and agreed to these terms of use
<http://www.mathnet.ru/eng/agreement>

Download details:

IP: 18.97.9.174

February 8, 2025, 22:31:31



С. А. Коченгин

ОПРАВДАНИЕ ПОСТРОЕНИЯ РЕШЕНИЯ
ЗАДАЧИ О ТОЧЕЧНОМ ИСТОЧНИКЕ
СИ ВОЛН В СЛОИСТОЙ СРЕДЕ
С ВЕРТИКАЛЬНОЙ ГРАНИЦЕЙ

ВВЕДЕНИЕ

Рассмотрим уравнение:

$$\frac{1}{\alpha} \frac{\partial}{\partial x} \left(\alpha \frac{\partial u_\epsilon}{\partial x} \right) + \frac{1}{\beta} \frac{\partial}{\partial y} \left(\beta \frac{\partial u_\epsilon}{\partial y} \right) + (\omega^2(g+d) + i\epsilon)u_\epsilon =$$
$$= -\frac{\delta(x-x_0)\delta(y-y_0)}{\alpha\beta}. \quad (1)$$

Здесь

$$-\infty < x < +\infty, x \neq 0, -\infty < y < 0, y \neq -h, h = \text{const} > 0,$$

$$\omega = \text{const} > 0, i^2 = -1, \epsilon \in (0, \epsilon_0], \epsilon_0 > 0,$$

$$\alpha(x) = \begin{cases} \alpha_1, & \text{при } x < 0, \\ \alpha_2, & \text{при } x > 0, \end{cases} \quad g(x) = \begin{cases} g_1, & \text{при } x < 0, \\ g_2, & \text{при } x > 0, \end{cases}$$
$$\beta(y) = \begin{cases} \beta_1, & \text{при } y > -h, \\ \beta_2, & \text{при } y < -h, \end{cases} \quad d(y) = \begin{cases} d_1, & \text{при } y < -h, \\ d_2, & \text{при } y > -h, \end{cases}$$

$$\alpha_j, \beta_j, g_j, d_j > 0, \quad j = 1, 2.$$

На решение этого уравнения $u_\epsilon(x, y)$ накладываются следующие условия:

$$\frac{\partial u_\epsilon}{\partial y}(x, 0) = 0, \quad (1a)$$

$$u_\epsilon(x, -h-0) = u_\epsilon(x, -h+0), \quad u_\epsilon(-0, y) = u_\epsilon(+0, y), \quad (1b)$$

$$\alpha \frac{\partial u_\epsilon}{\partial x} \Big|_{x=-0} = \alpha \frac{\partial u_\epsilon}{\partial x} \Big|_{x=+0}, \quad \beta \frac{\partial u_\epsilon}{\partial y} \Big|_{y=-h-0} = \beta \frac{\partial u_\epsilon}{\partial y} \Big|_{y=-h+0}, \quad (1c)$$

причем существует $\sigma > 0$ такое, что

$$|u_\epsilon(x, y)| = O(e^{-\sigma\sqrt{x^2+y^2}}), \quad \text{если } \sqrt{x^2+y^2} \rightarrow +\infty. \quad (1d)$$

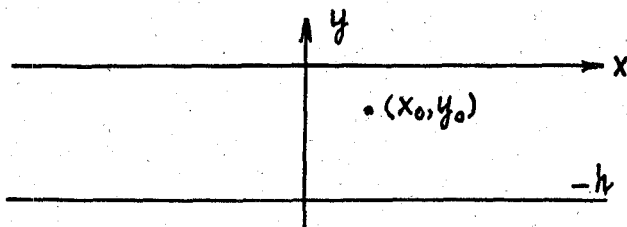


Рис. 1.

Предел $u(x, y) = \lim_{\epsilon \rightarrow 0} u_\epsilon(x, y)$ описывает волновое поле точечного источника (в точке (x_0, y_0)) в среде, изображенной на рисунке 1.

Решение $u_\epsilon(x, y)$ было построено в работе [1]. Однако там, строго говоря, отсутствует точная постановка задачи и не оправдан процесс нахождения решения в виде:

$$\begin{aligned} u_\epsilon(x, y) &= \sum_{j=1}^n Y_{\lambda_j}(y_0) Y_{\lambda_j}(y) \mathcal{H}_{\lambda_j}(x, x_0) + \\ &= \int_{-\omega^2 d_2}^{+\infty} Y_\lambda(y_0) Y_\lambda(y) \mathcal{H}_\lambda(x, x_0) d\lambda. \end{aligned} \quad (2)$$

Здесь Y_{λ_j} – собственные функции, Y_λ – “собственные функции непрерывного спектра” для оператора

$$N(\cdot) = \frac{1}{\beta} \frac{\partial}{\partial y} \left(\beta \frac{\partial}{\partial y} (\cdot) \right) + \omega^2 d(y)(\cdot),$$

а $\mathcal{H}_\lambda(x, x_0)$ – функция Грина для оператора:

$$H(\cdot) = \frac{1}{\alpha} \frac{\partial}{\partial x} \left(\alpha \frac{\partial}{\partial x} (\cdot) \right) + (\omega^2 g(x) + i\epsilon)(\cdot).$$

В данной работе строится пространство обобщенных функций, “естественное” для разложения по собственным функциям оператора $N(\cdot)$. Удастся “спрятать” краевые условия (1a)–(1c) в это пространство, т.е. построить его таким, что для решения, найденного в нем, эти краевые условия выполняются автоматически. Такой прием активно пропагандировался, например, О. А. Ладженской [2, 3] и В. М. Бабичем. Специально для оправдания разложений по собственным функциям И. М. Гельфанд и А. Г. Костюченко [4] создали теорию оснащенных гильбертовых пространств. В наших построениях мы имеем дело тоже с некоторым аналогом

оснащения, который представляется нам довольно простым и адекватным рассматриваемой задаче. Данная работа выполнена под руководством В. М. Бабича, которому автор выражает глубокую благодарность.

1. Точная постановка задачи

Решение $u_\epsilon(x, y)$ будем искать в пространстве линейных непрерывных функционалов Φ' над некоторым пространством основных функций Φ . Опишем это пространство. Пусть $D^1(L)$ – область определения оператора $L = N + H$. Функция $\varphi(x, y)$, по определению, принадлежит $D^1(L)$ тогда и только тогда, когда она является C^2 гладкой в замыкании каждой компоненты связности области $\Omega = \{(x, y), y < 0, y \neq -h, x \neq 0\}$, удовлетворяет условиям (1a)–(1c) и для любого натурального n $\sup_{\Omega} (1 + |x| + |y|)^n |\varphi| < +\infty$. Будем говорить, что последовательность $\{\varphi_m\}$ стремится к нулю в пространстве $D^1(L)$, если для любого натурального n $\sup_{\Omega} (1 + |x| + |y|)^n \cdot |\varphi_m|$ стремится к нулю, когда m стремится к бесконечности. Определим $D^{k+1}(L)$, для $k = 1, 2, 3, \dots$ $\varphi(x, y)$ принадлежит $D^{k+1}(L)$, если $\varphi \in D^k(L)$, $N\varphi \in D^k(L)$, $H\varphi \in D^k(L)$. По определению, последовательность $\{\varphi_m\}$ сходится к нулю в $D^{k+1}(L)$, если последовательности $\{\varphi_m\}$, $\{N\varphi_m\}$, $\{H\varphi_m\}$ сходятся к нулю в пространстве $D^k(L)$. Определим

$$\Phi = \bigcap_{k=1}^{\infty} D^k(L).$$

Последовательность $\{\varphi_m\}$ сходится к нулю в пространстве Φ , если для любого k , она стремится к нулю в пространстве $D^k(L)$. Очевидно, что Φ – линейное пространство и что оно полно относительно введенной выше сходимости.

Φ' – пространство линейных непрерывных функционалов над Φ . Сходимость в Φ' определена следующим образом: последовательность $\{f_n\}_{n=1}^{\infty}$ сходится к f в Φ' , если для любой φ из Φ $\langle f_n, \varphi \rangle \rightarrow \langle f, \varphi \rangle$. Каждой классической функции \tilde{f} , для которой $\tilde{f}\varphi$ суммируема при всех φ из Φ , поставим в соответствие функционал f , действующий по формуле:

$$\langle f, \varphi \rangle = \int_{\Omega} \alpha(x)\beta(y)\tilde{f}(x, y)\varphi(x, y)dx dy. \quad (3)$$

Исходя из этого, функционал, который каждой φ из Φ ставит в соответствие $\varphi(x_0, y_0)$ обозначим через $\frac{\delta(x-x_0)\delta(y-y_0)}{\alpha\beta}$. Для φ из Φ

$L\varphi$ принадлежит Φ . Это позволяет определить оператор L на элементах пространства Φ' по формуле:

$$\langle Lf, \varphi \rangle = \langle f, L\varphi \rangle. \quad (4)$$

Теперь поставим задачу. Требуется найти u_ϵ в пространстве Φ' такую, что

$$Lu_\epsilon = -\frac{\delta(x-x_0)\delta(y-y_0)}{\alpha\beta} \quad (5)$$

Такая постановка задачи корректна, т.е., легко показать, что если ее решение $u_\epsilon(x, y)$ — классическая функция, C^2 — гладкая в замыкании каждой компоненты связности области Ω , исключая точку (x_0, y_0) , то она удовлетворяет уравнению (1) в следующем смысле.

А. Для любой φ из Φ выполняется

$$\int_{\Omega} \alpha\beta L(\varphi)u_\epsilon dx dy = -\varphi(x_0, y_0). \quad (6)$$

В. Для любого положительного σ вне шара

$$B_\sigma = \{(x-x_0)^2 + (y-y_0)^2 \leq \sigma\}, \quad \text{справедливо} \quad L(u_\epsilon) = 0. \quad (7)$$

Помимо этого, $u_\epsilon(x, y)$ удовлетворяет краевым условиям (1a)–(1c).

2. ОПРАВДАНИЕ МЕТОДА ФУРЬЕ.

В работе [1] было показано, что для каждой функции φ и Φ , при любом фиксированном $x \neq 0$ верна формула обращения:

$$\varphi(x, y) = \int_{-\omega^2 d_1}^{+\infty} \hat{\varphi}(x, \lambda) Y_\lambda(y) d\mu(\lambda) = \sum_{j=1}^n \hat{\varphi}(x, \lambda_j) Y_{\lambda_j}(y) + \int_{-\omega^2 d_2}^{+\infty} \hat{\varphi}(x, \lambda) Y_\lambda(y) d\lambda, \quad (8)$$

где

$$\hat{\varphi}(x, \lambda) = \int_{-\infty}^0 \beta(y) \varphi(x, y) Y_\lambda(y) dy. \quad (9)$$

(Мы предполагаем, для определенности, что $d_1 > d_2$.) Назовем $F(\varphi) = \hat{\varphi}(x, \lambda)$ — “преобразованием Фурье” функции φ . Образ пространства основных функций Φ , при отображении F есть линейное

пространство. Обозначим его $\widehat{\Phi}$. Введем в нем понятие сходимости. В пространстве $\widehat{\Phi}$, по определению, сходятся те и только те последовательности $\{\widehat{\varphi}_n\}$, которые являются образами (при отображении F) последовательностей $\{\varphi_n\}$, сходящихся в пространстве Φ . Легко видеть, что пространство $\widehat{\Phi}$ полно относительно такой сходимости. На этом пространстве определен оператор F^{-1} , обратный к оператору F , который, в силу (8), действует по формуле:

$$F^{-1}(\widehat{\varphi}) = \widetilde{\varphi} = \int_{-\omega^2 d_1}^{+\infty} \widehat{\varphi}(x, \lambda) Y_\lambda(y) d\mu(\lambda) = \varphi. \quad (10)$$

Пусть $\widehat{\Phi}'$ – пространство всех линейных непрерывных функционалов над $\widehat{\Phi}$. Очевидно, что функционал $\frac{\delta(x-x_0)}{\alpha(x)} Y_\lambda(y_0)$, действующий по формуле:

$$\begin{aligned} \left\langle \frac{\delta(x-x_0)}{\alpha(x)} Y_\lambda(y_0), \widehat{\varphi}(x, \lambda) \right\rangle &= \\ &= \int_{-\omega^2 d_1}^{+\infty} \widehat{\varphi}(x_0, \lambda) Y_\lambda(y_0) d\mu(\lambda) = \varphi(x_0, y_0), \end{aligned} \quad (11)$$

принадлежит пространству $\widehat{\Phi}'$. Каждое распределение f из Φ' задает линейный непрерывный функционал \widehat{f} из $\widehat{\Phi}'$ по формуле

$$\langle \widehat{f}, \widehat{\varphi} \rangle = \langle f, \varphi \rangle. \quad (12)$$

Назовем \widehat{f} – “преобразованием Фурье” f . Из определения функционала $\frac{\delta(x-x_0)\delta(y-y_0)}{\alpha(x)\beta(y)}$ и формулы (11) следует, что

$$\frac{\delta(x-x_0)\delta(y-y_0)}{\alpha\beta} = \frac{\delta(x-x_0)}{\alpha} \cdot Y_\lambda(y_0). \quad (13)$$

Каждый элемент \widehat{f} из $\widehat{\Phi}'$ задает линейный непрерывный функционал \widetilde{f} над Φ по формуле:

$$\langle \widetilde{f}, \widetilde{\varphi} \rangle = \langle \widehat{f}, \widehat{\varphi} \rangle. \quad (14)$$

Из формулы (10) следует, что $\widetilde{f} = F^{-1}(\widehat{f}) = f$. Назовем $F^{-1}(\widehat{f})$ – “обратным преобразованием Фурье” функционала \widehat{f} .

Докажем теперь разрешимость задачи (5). Очевидно, что

$$\langle Lf, \varphi \rangle = \langle f, N\varphi + H\varphi \rangle. \quad (15)$$

Найдем преобразование Фурье распределения Lf . По определению, имеем

$$\langle \widehat{Lf}, \widehat{\varphi} \rangle = \langle \widehat{f}, \widehat{N\varphi} + \widehat{H\varphi} \rangle. \quad (16)$$

Из формулы (9) и того, что $NY_\lambda = -\lambda Y_\lambda$, интегрируя по частям, получаем,

$$\widehat{N\varphi} = -\lambda \widehat{\varphi}. \quad (17)$$

Из сходимости интегралов

$$\begin{aligned} & \int_{-\infty}^0 \beta(y) \sup_x |\varphi(x, y)| |Y_\lambda(y)| dy, \\ & \int_{-\infty}^0 \beta(y) \sup_x \left| \frac{\partial \varphi(x, y)}{\partial x} \right| |Y_\lambda(y)| dy, \\ & \int_{-\infty}^0 \beta(y) \sup_x \left| \frac{\partial^2 \varphi(x, y)}{\partial x^2} \right| |Y_\lambda(y)| dy \end{aligned}$$

следует, что

$$\widehat{H\varphi} = H \widehat{\varphi}. \quad (18)$$

Объединяя формулы (16), (17) и (18) получаем:

$$\widehat{Lf} = (H - \lambda) \widehat{f}. \quad (19)$$

Из (13) и (19) следует, что (5) равносильно уравнению:

$$(H - \lambda) \widehat{u}_\epsilon = -\frac{\delta(x - x_0)}{\alpha(x)} \cdot Y_\lambda(y_0). \quad (20)$$

Убедимся, что (20) разрешимо в $\widehat{\Phi}'$. Рассмотрим семейство обыкновенных дифференциальных уравнений, зависящее от параметра λ .

$$(H - \lambda)(\cdot) = -\frac{\delta(x - x_0)}{\alpha(x)}, \quad -\infty < x < +\infty, x \neq 0. \quad (21)$$

Известно, что существует функция Грина $\mathcal{H}_\lambda(x, x_0)$, которая при любом фиксированном λ , является решением уравнения (21) в следующем смысле:

$$\int_{-\infty}^{+\infty} \alpha \mathcal{H}_\lambda(x, x_0) (H - \lambda) \widehat{\varphi}(x, \lambda) dx = -\widehat{\varphi}(x_0, \lambda). \quad (22)$$

Здесь $\hat{\varphi}$ – произвольный элемент $\hat{\Phi}$. Убедимся, что функция $\mathcal{H}_\lambda(x, x_0) \cdot Y_\lambda(y_0)$ задает элемент пространства $\hat{\Phi}'$. Для функции $Y_\lambda(y)$ верна оценка:

$$\sup_y |Y_\lambda(y)| \leq C |\omega^2 d_2 + \lambda|^{-\frac{1}{4}}. \quad (23)$$

Используя ее, легко получить, что

$$\sup_{x, \lambda} \left(|\mathcal{H}_\lambda(x, x_0)| \cdot |Y_\lambda(y_0)| \cdot |\omega^2 d_2 + \lambda|^{\frac{1}{4}} \right) \leq C_1 < +\infty. \quad (24)$$

Простые выкладки показывают, что для произвольной $\hat{\varphi}$ из $\hat{\Phi}$ и любых неотрицательных m и n существует константа C_2 такая, что

$$(1 + |x|^n) |\lambda^m \hat{\varphi}(x, \lambda)| \leq C_2 \cdot \sup_y |Y_\lambda(y)|. \quad (25)$$

Из (23) и (25) следует оценка

$$\sup_{x, \lambda} \left((1 + |x|^n) (1 + |\lambda|^m) |\hat{\varphi}(x, \lambda)| |\omega^2 d_2 + \lambda|^{\frac{1}{4}} \right) \leq C_3. \quad (26)$$

Функции $\mathcal{H}_\lambda(x, x_0) Y_\lambda(y_0)$ поставим в соответствие элемент из $\hat{\Phi}'$ по формуле:

$$\langle \mathcal{H}_\lambda \cdot Y_\lambda, \hat{\varphi} \rangle = \int_{-\infty}^{+\infty} \int_{-\omega^2 d_1}^{+\infty} \alpha(x) \mathcal{H}_\lambda(x, x_0) Y_\lambda(y_0) \hat{\varphi}(x, \lambda) dx d\mu(\lambda). \quad (27)$$

Корректность этого определения вытекает из оценок (24), (26). Для распределения $(H - \lambda) \mathcal{H}_\lambda Y_\lambda(y_0)$ имеем:

$$\begin{aligned} \langle (H - \lambda) \mathcal{H}_\lambda Y_\lambda(y_0), \hat{\varphi}(x, \lambda) \rangle &= \\ &= \int_{-\omega^2 d_1}^{+\infty} \int_{-\infty}^{+\infty} \alpha \mathcal{H}_\lambda(x, x_0) (H - \lambda) \hat{\varphi}(x, \lambda) dx Y_\lambda(y_0) d\mu(\lambda). \end{aligned} \quad (28)$$

Из (22) и (28) следует

$$\langle (H - \lambda) \mathcal{H}_\lambda \cdot Y_\lambda(y_0), \varphi(x, \lambda) \rangle = - \int_{-\omega^2 d_1}^{+\infty} \varphi(x_0, \lambda) Y_\lambda(y_0) d\mu(\lambda). \quad (29)$$

Из формул (10), (11) и (29) вытекает, что $\hat{u}_\epsilon = \mathcal{H}_\lambda(x, x_0) Y_\lambda(y_0)$ – решение уравнения (20). Следовательно,

$$u_\epsilon = F^{-1}(\mathcal{H}_\lambda(x, x_0) Y_\lambda(y_0)) \quad (30)$$

решение уравнения (5).

Разрешимость уравнения (5) доказана, однако формула (30) дает его решение в виде обратного преобразования Фурье в смысле распределений. В то же время легко видеть, что имеет смысл выражение:

$$\bar{u}_\varepsilon = \int_{-\omega^2 d_1}^{+\infty} \mathcal{H}_\lambda(x, x_0) Y_\lambda(y_0) Y_\lambda(y) d\mu(\lambda). \quad (31)$$

Убедимся, что $\bar{u}_\varepsilon = u_\varepsilon$. Для этого, в силу равенств

$$\langle u_\varepsilon, \varphi \rangle = \langle \hat{u}_\varepsilon, \hat{\varphi} \rangle = \langle \mathcal{H}_\lambda Y_\lambda, \hat{\varphi} \rangle,$$

достаточно показать, что для любой φ из Φ верно равенство

$$\langle \bar{u}_\varepsilon \varphi \rangle = \langle \mathcal{H}_\lambda Y_\lambda, \hat{\varphi} \rangle. \quad (32)$$

Правая часть (32) имеет вид:

$$\int_{-\infty}^{+\infty} \int_{-\omega^2 d_1}^{+\infty} \alpha(x) \mathcal{H}_\lambda(x, x_0) Y_\lambda(y_0) \hat{\varphi}(x, \lambda) dx d\mu(\lambda).$$

Покажем, что левая часть (32) имеет такой же вид. Для этого нам понадобится лемма.

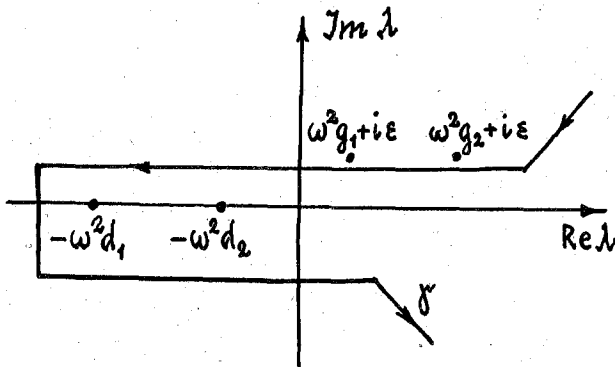


Рис. 2.

Лемма. Пусть

$$w(x, y) = \oint_{\gamma} |\mathcal{H}_\lambda(x, x_0) G_\lambda(y, y_0)| |d\lambda|.$$

Здесь G_λ — функция Грина оператора $\beta N(\cdot)$, точка (x_0, y_0) — фиксирована, а контур γ изображен на рисунке 2. Тогда существует константа C такая, что для всех σ , $0 < \sigma < 1$, верна оценка:

$$\sup_{\Omega \setminus B_\sigma} w(x, y) \leq \frac{C}{\sigma}. \quad (33)$$

Доказательство. Пусть $R > 0$ так велико, что для всех λ , принадлежащих контуру γ таких, что $|\lambda| \geq R$, выполняются неравенства:

$$\min_{j=1,2} \operatorname{Im} \sqrt{\omega^2 d_j + \lambda} \geq \sqrt{|\lambda|} \sin\left(\frac{\pi}{12}\right),$$

$$\min_{j=1,2} \operatorname{Im} \sqrt{\omega^2 g_j - \lambda + i\varepsilon} \geq \sqrt{|\lambda|} \cdot \frac{\sin\left(\frac{\pi}{6}\right)}{\sqrt{2}}.$$

Выберем

$$k = \min\left(\sin\left(\frac{\pi}{12}\right), \frac{\sin\left(\frac{\pi}{6}\right)}{\sqrt{2}}\right).$$

Из явных формул для \mathcal{H}_λ и G_λ , в силу выбора R , получаем

$$\sup_{\substack{\Omega \setminus B_\sigma \\ |\lambda| \geq R}} \oint |G_\lambda \mathcal{H}_\lambda| |d\lambda| \leq C_1 \int_R^{+\infty} \frac{1}{\sqrt{|\lambda|}} e^{-k\sigma\sqrt{|\lambda|}} |d\lambda| \leq \frac{C_2}{\sigma}.$$

Так как G_λ и \mathcal{H}_λ ограничены на контуре γ , мы имеем:

$$\sup_{\substack{\Omega \setminus B_\sigma \\ |\lambda| \leq R}} \oint |G_\lambda \mathcal{H}_\lambda| |d\lambda| \leq C_3.$$

Следовательно, $w \leq \frac{C_2}{\sigma} + C_3 \leq \frac{C}{\sigma}$. Лемма доказана.

Сделав преобразование Ватсона (см., например [5]), получаем

$$\tilde{u}_\varepsilon = \oint_{\gamma} \mathcal{H}_\lambda(x, x_0) G_\lambda(y, y_0) d\lambda.$$

Следовательно, левую часть (32) можно переписать в виде:

$$\langle \tilde{u}_\varepsilon, \varphi \rangle = \int_{\Omega} \oint_{\gamma} \mathcal{H}_\lambda G_\lambda d\lambda \beta \varphi dx dy. \quad (34)$$

Используя теорему Фубини и доказанную выше лемму, можно поменять порядок интегрирования в формуле (34).

$$\langle \tilde{u}_\varepsilon, \varphi \rangle = \int_{-\infty}^{+\infty} \oint_{\gamma=-\infty}^0 G_\lambda(y, y_0) \beta(y) \varphi(x, y) dy \alpha(x) \mathcal{H}_\lambda d\lambda dx. \quad (35)$$

Заменяя контур интегрирования γ лучем $(-\omega^2 d_1, +\infty)$ (см. рис. 2), получаем:

$$\langle \tilde{u}_\varepsilon, \varphi \rangle = \int_{-\infty}^{+\infty} \int_{-\omega^2 d_1}^{+\infty} \alpha(x) \mathcal{H}_\lambda(x, x_0) Y_\lambda(y_0) \hat{\varphi}(x, \lambda) d\mu(\lambda) dx. \quad (36)$$

Равенство (32) доказано.

3. Единственность

Единственность решения уравнения (5) в Φ' доказывается стандартным методом. Убедимся в том, что если для v из Φ'

$$L(v) = 0, \quad (37)$$

то $v = 0$. Легко видеть, что для любой φ из Φ определено

$$U(\varphi) = \int_{\Omega} \alpha(\xi) \beta(\zeta) u_\varepsilon(x, y, \xi, \zeta) \varphi(\xi, \zeta) d\xi d\zeta.$$

Простые, но громоздкие оценки показывают, что $U(\varphi)$ является элементом Φ и $L(U(\varphi)) = \varphi$. Равенство (37) означает, в частности, что $\langle v, L\psi \rangle = 0$, где $\psi = U(\varphi)$, а φ — произвольный элемент пространства основных функций. Следовательно, $\langle v, \varphi \rangle = 0$ для любого φ . Это и означает, что $v = 0$.

Работа выполнена при финансовой поддержке Российского фонда фундаментальных исследований (93-011-16148).

ЛИТЕРАТУРА

1. С. А. Коченгин, *Задача о точечном источнике волн SH в случае деления переменных*. — Зап. научн. семин. ПОМИ 210 (1994), 125-145.
2. О. А. Ладыженская, *Краевые задачи математической физики*. М, 1973.
3. О. А. Ладыженская, *О методе Фурье для волнового уравнения*. — ДАН СССР 75 No.6 (1950), 765-768.
4. И. М. Гельфанд, А. Г. Костюченко, *О разложении по собственным функциям дифференциальных и других операторов*. — ДАН СССР 103 No.3 (1955), 349-352.

5. Э. Ч. Титчмарш, *Разложения по собственным функциям, связанные с дифференциальными уравнениями второго порядка*. т. 2, М, 1961.

Kochengin S. A. Justification of the construction of the solution of a problem on a point source of SH waves in a layered media with a vertical boundary.

The solution was found by the separation of variables method. Justification is made by using suitable space of generalized functions. Boundary conditions "are hid" in the space.

С.-Петербургское отделение
Математического института
им. В. А. Стеклова РАН

Поступило 15 апреля 1994 г.