Чебышёв и теория приближений

В.ПРОТАСОВ

Замена сложного простым – вот девиз теории приближений.

Чтобы не иметь дело со сложным объектом, нужно приблизить его простым. Основные вопросы: чем приближать, как, с какой точностью? Примеры приближений функций восходят еще к Архимеду, и в математике они встречались постоянно. Но датой рождения теории приближений считается 1854 год, когда П.Л.Чебышёв опубликовал работу «Теория механизмов, известных под названием параллелограммов», где сформулировал первые принципы поиска наилучших приближений функций.

Предположим, мы исследуем механизм, который задает движение точки по некоторой кривой – как на рисунке 1. Как

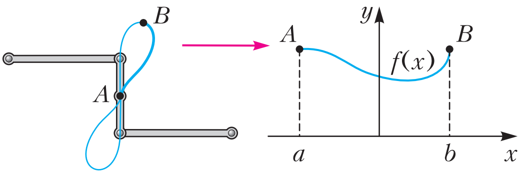

Рис. 1

описать траекторию движения? Если не получается точно, сделаем приближенно. Например, прямой линией. Возьмем дугу AB этой кривой и приблизим ее прямой. Для этого представим дугу кривой как график функции $f(x)$, а прямую – линейной функцией $p(x) = kx + b$ (рис.2). Качество приближения П.Л.Чебышёв предложил измерять *наибольшим уклонением*: $\max\limits_{x\in[a,b]}\left|f(x)-p(x)\right|$, вместо более привычных тогда среднего или среднего квадратичного уклонений. Будем обозначать наибольшее уклонение символом $\|f-p\|$ и называть его *расстоянием* между f и p. Ключевая догадка Чебышёва состоит в том, что ближайшая к f прямая должна иметь на отрезке «три точки опоры», в которых абсолютная величина разности $f(x)-p(x)$ принимает (одно и то же) наибольшее значение, т.е. равна $\|f-p\|$, а знаки этой разности чередуются. Если трех точек опоры нет, то такая прямая не может быть ближайшей. Ее всегда можно немного пошевелить, чтобы величина $\|f-p\|$ уменьшилась. Постарайтесь это объяснить самостоятельно (в помощь будет рисунок 3).

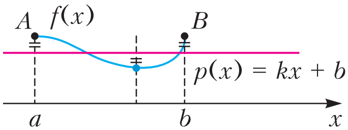

Рис. 2

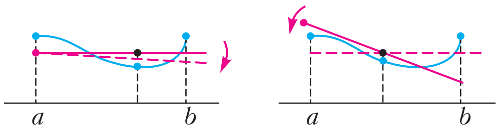

Рис. 3

Предположим, мы нашли самую близкую к f прямую, но качество приближения нас по-прежнему не устраивает. Нужно приблизить точнее, а линейные функции себя исчерпали. Единственный выход – расширить арсенал приближающих функций. Поскольку линейные функции – это многочлены степени 1, попробуем использовать многочлены более высокой степени. А именно, новый класс приближающих функций будет состоять из многочленов степени не выше n. Поскольку этот класс содержит и линейные функции, результат будет по крайней мере не хуже.

DOI: https://doi.org/10.4213/kvant20210601

Итак, задача приближения формулируется следующим образом.

Задача 1. *На отрезке задана непрерывная функция f. Среди всех многочленов степени не выше n нужно найти тот, который имеет наименьшее уклонение от f.*

Оказывается, что при любом n такой наилучший многочлен всегда существует, и притом только один! Он будет иметь точки опоры, их число равно $n+2$. П.Л.Чебышёв сформулировал следующую теорему.

Теорема. *Для каждой функции f на отрезке $[a;b]$ и числа n существует единственный многочлен, решающий задачу 1. Он характеризуется таким свойством: найдутся $n+2$ точки $x_1 < \ldots < x_{n+2}$ на данном отрезке, в которых модуль разности $f(x) - p(x)$ принимает (одно и то же) максимальное значение, а знаки этой разности чередуются, т.е. $f(x_k) - p(x_k) = (-1)^k \alpha \|f - p\|$, $k = 1, \ldots, n+2$, где α равно 1 или -1.*

Уже в XX веке выдающийся советский математик С.Н.Бернштейн, развивавший идеи Чебышёва, назвал такую систему из $n+2$ точек *альтернансом*, от французского «alternance» – чередование.

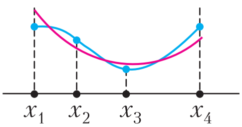

Рис. 4

На рисунке 4 изображено наилучшее приближение функции параболой. В этом случае многочлен p квадратичный, значит, $n = 2$, и альтернанс состоит из четырех точек.

Если многочлен имеет альтернанс, то он – ближайший к функции f среди всех многочленов степени не выше n. Докажем это от противного. Пусть нашелся многочлен q с меньшим расстоянием от f, степень которого также не превосходит n. Тогда его уклонение во всех точках альтернанса x_k будет меньше, чем $\|f - p\|$. Следовательно, на каждом из интервалов (x_k, x_{k+1}) многочлен $q(x) - p(x)$ меняет знак, а значит, где-то обращается в ноль. Всего интервалов $n+1$, поэтому многочлен $q(x) - p(x)$ должен иметь не менее $n+1$ корней, что невозможно, потому что его степень строго меньше $n+1$ (рис.5).

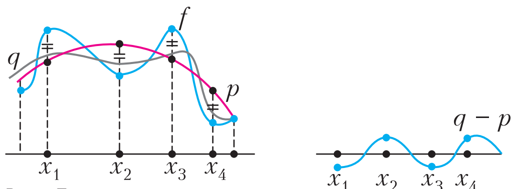

Рис. 5

Теорема Чебышёва неконструктивна: она не позволяет явно найти многочлен p, поскольку неизвестны точки альтернанса. Но на это есть быстрые численные алгоритмы. Самый известный из них – алгоритм, разработанный Е.Я.Ремезом еще в 1934 году! Он реализует теорему Чебышёва, находя альтернанс, а с ним и многочлен p, методом последовательных приближений. На современных компьютерах это занимает считанные секунды.

Какова точность приближения наилучшим многочленом? Это зависит от гладкости функции f. Например, если f имеет вторую производную, которая не превосходит по модулю 1, то расстояние от f до ближайшего многочлена степени n не превосходит $\frac{C}{n^2}$, где C – определенное число, не зависящее от n (константа Фавара). Скажем, для произвольной f наилучший многочлен десятой степени будет уклоняться от f на расстояние порядка 0,01. А вот если f имеет третью производную, то уклонение уже будет порядка 0,001. Это следует из *прямых теорем теории приближений*, полученных уже после Чебышёва, в XX веке.

Приближать, конечно, можно не только многочленами. Очень популярный способ – приближать суммами синусов и косинусов, т.е. тригонометрическими многочленами. Также можно приближать суммами экспонент или рациональными дробями (отношениями двух многочленов). Есть даже особое понятие *чебышёвской системы функций*, с помощью которых можно приближать, используя альтернанс.

Но вернемся к многочленам. Для некоторых функций ближайший многочлен степени не выше n можно найти в явном виде, не прибегая к численным алгоритмам. Например, для функции $f(x) = x^{n+1}$, если p – многочлен наилучшего приближения степени не выше n, то разность $x^{n+1} - p(x)$ является многочленом степени $n+1$, наименее уклоняющимся от нуля. Мы приходим к такой задаче.

Задача 2. *Среди всех многочленов данной степени со старшим коэффициентом 1 нужно найти тот, который менее всего уклоняется от нуля на заданном отрезке.*

Обозначим степень многочлена через k, а отрезок возьмем $[-1; 1]$ (любой другой отрезок можно свести к нему подходящей линейной заменой переменной). Теорема Чебышёва гарантирует, что существует единственный многочлен, решающий задачу 2, и у него есть альтернанс из $k+1$ точки. Остается только предъявить такой многочлен. Делаем замену $x = \cos t$ и обозначаем $T_k(x) = \cos kt$. Иначе говоря, для каждого k выражаем $\cos kt$ через $\cos t$. В результате получаем знаменитые многочлены Чебышёва. Вот первые четыре из них:

$$T_0(x) = 1,\ T_1(x) = x,$$
$$T_2(x) = 2x^2 - 1,\ T_3(x) = 4x^3 - 3x.$$

Читатель, разумеется, узнал в многочлене T_2 формулу для косинуса двойного угла, а в T_3 – для тройного угла. Математики определяют многочлен Чебышёва так: $T_k(x) = \cos(k \arccos x)$. Несмотря на «тригонометрический» вид данной функции, она является многочленом. Это следует из рекуррентного соотношения $T_{k+1}(x) = 2xT_k(x) - T_{k-1}$, которое просто выводится из формулы для суммы косинусов:

$$T_{k+1}(x) + T_{k-1}(x) = \cos(k+1)t + \cos(k-1)t = 2\cos kt \cos t = 2xT_k(x).$$

Начиная с первых двух многочленов $T_0(x) = 1$, $T_1(x) = x$, находим последовательно $T_2(x)$, затем $T_3(x)$ и т.д. На рисунке 6 изображен многочлен Чебышёва. По индукции доказываем, что T_k – многочлен степени k со старшим коэффициентом 2^k. Главное: у многочлена T_k есть альтернанс! В самом деле, функция $\cos kt$ колеблется между 1 и –1, принимая крайние значения поочередно в точках $0, \frac{\pi}{k}, \ldots, \frac{(k-1)\pi}{k}, \pi$. После замены $x = \cos t$ получаем, что многочлен $T_k(x)$ делает то же, чередуя значения ± 1 в точках $1, \cos\frac{\pi}{k}, \ldots, \cos\frac{(k-1)\pi}{k}, -1$, которые и составляют альтернанс. Многочлен $2^{-k}T_k(x)$ будет иметь альтернанс в этих же точках и старший коэффициент 1, а значит, он является решением задачи 2.

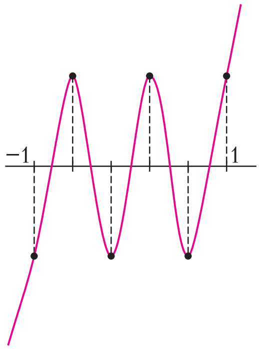

Рис. 6

Многочлены Чебышёва дают решения огромного числа экстремальных задач. Например, среди всех многочленов степени k, у которых уклонение от нуля на отрезке $[-1; 1]$ не превосходит 1, многочлен T_k имеет на этом отрезке максимально возможную производную (равную k^2 в точке $x = 1$) и максимально возможные производные высших порядков. Это следует из неравенства, доказанного А.А.Марковым, учеником П.Л.Чебышёва.

А вот пример из вычислительной математики. Чтобы приблизить функцию f, пусть на том же отрезке $[-1; 1]$, но при этом не искать альтернанс, часто проводят интерполяцию по нескольким точкам. Это значит, что берут «сетку» из k точек $z_1, \ldots, z_k$ и строят многочлен p, для которого $f(z_i) = p(z_i)$ при всех i. Какую сетку для этого лучше всего брать? Оказывается, не равномерную! Надо взять в качестве $z_1, \ldots, z_k$ корни многочлена Чебышёва $T_k(x)$. Именно такая сетка дает наилучшее приближение. Корни T_k найти просто – достаточно решить уравнение $\cos kt = 0$.

Многочлены Чебышёва применяются в вычислительной математике, моделировании, статистике. Крупнейший международный интернет-ресурс https://www.chebfun.org, посвященный приближенным вычислениям, называется Chebfun («Chebyshev fun»). Заходите и убедитесь сами – идеи Чебышёва в теории приближений живы и активно развиваются.