

# Math-Net.Ru

All Russian mathematical portal

N. Ya. Kirpichnikova, V. B. Philippov, Behavior of surface waves at transition through a junction line on the boundary of an elastic homogenous isotropic body, *Zap. Nauchn. Sem. POMI*, 1995, Volume 230, 86–102

Use of the all-Russian mathematical portal Math-Net.Ru implies that you have read and agreed to these terms of use  
<http://www.mathnet.ru/eng/agreement>

Download details:

IP: 18.97.9.168

January 24, 2025, 15:43:37



Н. Я. Кирпичникова, В. Б. Филиппов

**ПОВЕДЕНИЕ ПОВЕРХНОСТНЫХ ВОЛН  
ПРИ ПЕРЕХОДЕ ЧЕРЕЗ ЛИНИЮ  
СОПРЯЖЕНИЯ НА ГРАНИЦЕ УПРУГОГО  
ОДНОРОДНОГО ИЗОТРОПНОГО ТЕЛА**

Рассмотрим однородное изотропное упругое выпуклое тело  $\Omega \in \mathbb{R}^3 = \{(x, y, z)\}$ , расположенное в полупространстве  $z \geq 0$  и ограниченное поверхностью  $\partial\Omega$ , на которой отсутствуют напряжения. Поверхность  $\partial\Omega$  состоит из двух непрерывно переходящих друг в друга частей: гладкой цилиндрической поверхности  $\partial\Omega^-$  (при  $z \geq 0, x \leq 0$ ) с образующей, параллельной оси  $y$ , и полуплоскости  $\partial\Omega^+$  ( $z = 0, x \geq 0$ ). При переходе через ось  $y$  — линию сопряжения поверхностей  $\partial\Omega^-, \partial\Omega^+$  (см. рис. 1), касательная плоскость к поверхности  $\partial\Omega$  изменяется непрерывно, а кривизна нормального сечения этой поверхности в каждой точке оси  $y$  имеет разрыв первого рода, величина которого не зависит от координаты  $y$ .

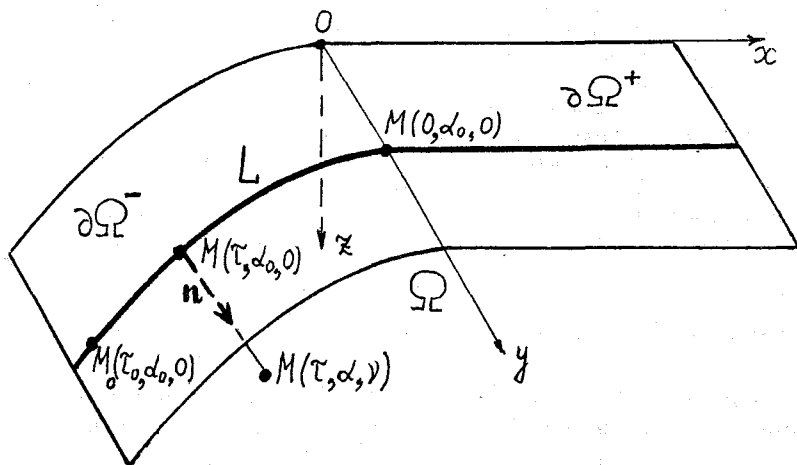


Рис. 1.

Пусть  $L$  — луч, расположенный в плоскости, компланарной плоскости  $x, z$ , и целиком лежащий на поверхности  $\partial\Omega$ . Под лу-

чами понимаются экстремали интеграла Ферма

$$\int \frac{ds}{b},$$

где  $ds$  – элемент длины дуги кривой, по которой происходит интегрирование,  $b$  – скорость распространения поперечных упругих волн в  $\Omega$ .

В работе исследуется поведение высокочастотной асимптотики сосредоточенных в окрестности границы  $\partial\Omega^-$  решений уравнений теории упругости, которые имеют характер волн, распространяющихся вдоль  $L$  со скоростью, близкой к скорости  $b$ , и набегающих на линию сопряжения поверхностей  $\partial\Omega^-, \partial\Omega^+$ .

Вектор смещений  $\mathbf{u}$  упругой среды в области, ограниченной  $\partial\Omega^-$ , выберем в виде суммы продольной  $\mathbf{u}_a$  и поперечной  $\mathbf{u}_b$  волн, удовлетворяющих условиям отсутствия напряжения на границе. Продольная волна сразу убывает при удалении от границы вглубь тела. Поперечная же волна сосредоточена в некотором приповерхностном объемном волноводе вблизи луча  $L$ . Поведение ее в приповерхностном слое соответствует собственным функциям типа шепчущей галереи.

Внутри тела  $\Omega$  асимптотически определяющими являются поперечные волны  $\mathbf{u}_b$ . Будут рассмотрены два вида поперечных смещений: волны [1], смещение частиц которых в главном происходит по направлению нормали к поверхности  $\partial\Omega^-$ , и волны [2], смещение частиц которых происходит перпендикулярно плоскости нормального сечения поверхности вдоль луча  $L$ , как у волн Лява.

На поверхности  $\partial\Omega^-$  порядок продольной и поперечной волн оказывается одинаковым. Смещение частиц и для волн  $\mathbf{u}_a$ , и для волн  $\mathbf{u}_b$  в первом случае смещений происходит параллельно плоскости нормального сечения поверхности, соответствующего лучу  $L$ . Последнее свойство позволяет сравнивать на поверхности  $\partial\Omega^-$  указанные волны с волнами Рэлея.

Итак, в данной работе изучается поведение сосредоточенных вблизи гладкой поверхности  $\partial\Omega^-, z \geq 0, x \leq 0$  волн типа шепчущей галереи после прохождения ими через рассматриваемую линию сопряжения в область  $z \geq 0, x \geq 0$  тела  $\Omega$  с границей  $\partial\Omega^+$  нулевой кривизны, т.е. изучается распространение волн, удерживаемых кривизной поверхности  $\partial\Omega^-$  при  $x \leq 0$  и набегающих на полуплоскость  $\partial\Omega^+, z = 0, x \geq 0$ .

Волны шепчущей галереи различной поляризации, сосредоточенные вблизи цилиндрической поверхности  $\partial\Omega^-$  ненулевой кривизны, будут взяты из работ [1, 2]. В этих работах рассмотрен об-

ший случай трехмерного неоднородного выпуклого упругого тела произвольной формы и получены как главные, так и все высшие приближения.

Задача о поведении акустических волн шепчущей галереи, набегающих на вертикальную границу скачка показателя преломления в акустической среде, рассматривалась в работе [3] одного из авторов. Синтез результатов данной работы и работы [3] помог решить задачу о поведении волн типа волн шепчущей галереи при переходе из неоднородной упругой среды с криволинейной границей в однородную упругую среду, ограниченную плоской границей. Авторы собираются опубликовать решение этой последней задачи в одном из следующих номеров сборника.

Приведем некоторые нужные нам результаты работ [1, 2] для неоднородного упругого трехмерного пространства, видоизменяя их применительно к рассматриваемому здесь однородному упругому пространству и фактически к двумерной задаче.

Пусть  $q^1, q^2, q^3$  – криволинейные координаты в  $\Omega$ . Уравнения теории упругости в произвольной криволинейной системе координат имеют вид [1]

$$\sigma_{ij} \sqrt{g} \frac{\partial G^{ij}}{\partial q^r} + 2 \frac{\partial}{\partial q^i} (\sigma_{rj} G^{ij} \sqrt{g}) - 2\rho G_{ir} \sqrt{g} \frac{\partial^2 u^{(i)}}{\partial t^2} = 0, \quad (1)$$

$$i, j, r = 1, 2, 3,$$

здесь как обычно по всем повторяющимся индексам производится суммирование,  $t$  – время, через  $\sigma_{ij}$  обозначены компоненты тензора напряжений. В общем случае изотропной неоднородной среды компоненты  $\sigma_{ij}$  тензора напряжений связаны с компонентами вектора смещений  $u = (u^{(1)}, u^{(2)}, u^{(3)})$  следующими соотношениями

$$\sigma_{ij} = \frac{\lambda}{\sqrt{g}} G_{ij} \frac{\partial}{\partial q^r} (\sqrt{g} u^{(r)}) + \mu \left[ \frac{\partial G_{ij}}{\partial q^r} u^{(r)} + G_{ri} \frac{\partial u^{(r)}}{\partial q^j} + G_{rj} \frac{\partial u^{(r)}}{\partial q^i} \right], \quad (2)$$

$$r, i, j, k = 1, 2, 3.$$

где  $\lambda(q^1, q^2, q^3)$ ,  $\mu(q^1, q^2, q^3)$  – параметры Ламе,  $\rho(q^1, q^2, q^3)$  – плотность среды. Элемент длины  $ds$  в системе координат  $q^1, q^2, q^3$  определяется равенством

$$ds^2 = G_{ij} dq^i dq^j,$$

Матрица  $\|G_{ij}\|$  из компонент метрического тензора в пространстве  $q^1, q^2, q^3$  обратна матрице  $\|G^{ij}\|$ ,  $g = \det \|G_{ij}\|$ . Здесь функции  $\lambda, \mu, \rho$  предполагаются дифференцируемыми достаточное число раз.

В рассматриваемом нами случае однородной среды  $\lambda, \mu, \rho$  являются постоянными величинами, а скорость поперечных волн  $b = \mu/\rho$ .

Введем в окрестности поверхности  $\partial\Omega^-$  следующую криволинейную систему координат. За координатную линию  $q^1$  возьмем луч  $L$ , так что параметр  $q^1 = \tau$  характеризует положение точки  $M_1$  на луче

$$\tau(M_0, M_1) = \int_{M_0}^{M_1} \frac{ds}{b},$$

где  $M_0$  – некоторая фиксированная точка луча с координатами  $(\tau_0, \alpha_0)$ , причем  $\tau \leq 0$ , параметр  $q^2 = \alpha$  – расстояние до луча  $L$ , проведенное ортогонально лучу  $L$  на  $\partial\Omega$ , т.е. в рассматриваемом случае  $\alpha \equiv y$ , а параметр  $q^3 = \nu$  есть расстояние от произвольной точки  $M$  тела  $\Omega$  до поверхности  $\partial\Omega$  по нормали к ней так, что внутренним точкам  $\Omega$  соответствуют значения  $\nu > 0$ . Иногда нам будет удобно вместо параметра  $\tau$  использовать параметр  $s = b\tau$  – длину дуги луча  $L$ .

Радиус-вектор  $\mathbf{R}(M)$  произвольной точки  $M$  вблизи поверхности  $\partial\Omega$  тела  $\Omega$  имеет вид

$$\mathbf{R}(M) = \mathbf{r}(\tau, \alpha) + \nu \mathbf{n}(\tau, \alpha),$$

где  $\mathbf{r} = \mathbf{r}(\tau, \alpha)$  – параметрическое уравнение поверхности  $\partial\Omega$ ;  $\mathbf{n}(\tau, \alpha)$  – орт нормали к поверхности  $\partial\Omega$ , направленный внутрь тела  $\Omega$ .

Для компонент метрического тензора имеем

$$\begin{aligned} G_{\tau\tau} &= g_{\tau\tau} - 2\nu b_{\tau\tau} + \nu^2(\mathbf{n}'_{\tau}, \mathbf{n}'_{\tau}), & G_{\tau\nu} &= 0, \\ G_{\tau\alpha} &= g_{\tau\alpha} - 2\nu b_{\tau\alpha} + \nu^2(\mathbf{n}'_{\tau}, \mathbf{n}'_{\alpha}), & G_{\alpha\nu} &= 0, \\ G_{\alpha\alpha} &= g_{\alpha\alpha} - 2\nu b_{\alpha\alpha} + \nu^2(\mathbf{n}'_{\alpha}, \mathbf{n}'_{\alpha}), & G_{\nu\nu} &= 1. \end{aligned}$$

где  $g_{\tau\tau}, g_{\tau\alpha}, g_{\alpha\alpha}$  и  $b_{\tau\tau}, b_{\tau\alpha}, b_{\alpha\alpha}$  – коэффициенты соответственно первой и второй квадратичных форм Гаусса для поверхности  $\partial\Omega^-$ . В силу ортогональности криволинейных координат  $\tau, \alpha, \nu$  на поверхности тела  $\Omega$  коэффициент  $g_{\tau\alpha} = 0$ .

Решения, осциллирующие вблизи луча  $L$ , расположенного на поверхности  $\partial\Omega^-$  тела, и экспоненциально затухающие при удалении от этой поверхности вглубь тела, при постоянной скорости  $b$  удовлетворяют неравенству

$$k(\tau, \alpha) = \frac{b_{\tau\tau}|_{\nu=0}}{b^2} > 0. \quad (3)$$

Величина  $k(\tau, \alpha)$  есть кривизна нормального сечения поверхности  $\partial\Omega^-$  вдоль луча  $L$ . Условие (4) означает, что центр кривизны нормального сечения поверхности  $\partial\Omega^-$  вдоль луча  $L$  лежит с той стороны, где  $\nu > 0$ . Следовательно, эффект сосредоточенности решения возникает внутри тела  $\Omega$ .

Вектор смещений  $\mathbf{u}$ , удовлетворяющий уравнениям (1), (2) и граничным условиям отсутствия напряжений

$$\sigma_{i\nu}|_{\nu=0} = 0, \quad i = \tau, \alpha, \nu, \quad (4)$$

берем в виде суммы продольной  $\mathbf{u}_a$  и поперечной  $\mathbf{u}_b$  частей поля, учтя две различные поляризации поперечной части волнового поля,

$$\mathbf{u} = \mathbf{u}_a + \mathbf{u}_b, \quad \mathbf{u} = (u^\tau, u^\alpha, u^\nu). \quad (5)$$

Следует заметить, что в области  $\Omega$  асимптотически существенную роль играют поперечные смещения среды, однако на свободной от напряжения границе  $\partial\Omega^-$ ,  $\tau \leq 0$ , необходимо учитывать и продольные смещения, для того чтобы удовлетворить во всех приближениях по обратным степеням большого параметра  $\omega^\gamma$ ,  $0 < \gamma \leq 1$ , не только уравнениям (1), (2), но и граничным условиям (3). На границе составляющие  $\mathbf{u}_a$  и  $\mathbf{u}_b$  в случае поперечного смещения направленного по нормали имеют асимптотически одинаковый порядок.

Составляющая  $\mathbf{u}_a$  распространяется вдоль луча  $L$  с фазовой скоростью, близкой к скорости  $b$  поперечных волн, и убывает экспоненциально при удалении от границы вглубь тела, т.е. имеет комплексный эйконал  $\tau_a = \tau + i\nu\sqrt{b^{-2} - a^{-2}}$  и характеризует лучевую часть разложения.

Продольная составляющая  $\mathbf{u}_b$  вектора смещений тоже распространяется с фазовой скоростью, близкой к поперечной скорости  $b$ . Составляющие этого вектора сосредоточены вблизи границы  $\partial\Omega^-$ ,  $\tau \leq 0$  в слое толщины порядка  $O(\omega^{-2/3})$  и ведут себя характерно волнам пограничного слоя, т.е. характеризуют дифракционную часть поля смещений, в отличие от лучевой части поля  $\mathbf{u}_a$ .

Мы приведем две формулы для вектора смещений  $\mathbf{u}$ , соответствующие двум различным поляризациям поперечной составляющей  $\mathbf{u}_b$ . В первом (I) случае, смещение в главном происходит в плоскости нормального сечения поверхности  $\partial\Omega^-$  вдоль луча  $L$  по нормали к поверхности. Смещение для второго (II) случая происходит перпендикулярно плоскости нормального сечения поверхности  $\partial\Omega^-$  вдоль луча  $L$ .

Ограничиваясь лишь первыми отличными от нуля коэффициентами разложения продольной составляющей вектора смещений, запишем лучевую ( $\nu = O(\omega^{-1})$ ) часть поля

$$\mathbf{u}_a = e^{\Phi(\tau, \alpha, \omega)} (V_a^\tau, \omega^{-1/2} V_a^\alpha, V_a^\nu) \omega^{-1/3} e^{-\omega \nu \sqrt{b^{-2} - a^{-2}}}. \quad (6)$$

Фазовая функция  $\Phi(\tau, \alpha, \omega)$  в формуле (6) имеет вид

$$\begin{aligned} & \Phi(\tau, \alpha, \omega) = \\ & = -i\omega(t - \tau) + i\omega^{1/3} \varphi(\tau, \alpha) (-\xi) + 2i \int_{\tau_0}^{\tau} \sqrt{b^{-2} - a^{-2}} b^4 \psi^3(\tau, \alpha) d\tau, \quad (7) \end{aligned}$$

составляющие:  $V_a^i$ ,  $i = \tau, \alpha, \nu$ , есть

$$V_a^\nu = i \sqrt{b^{-2} - a^{-2}} V_a^\tau, \quad V_a^\tau = 2v'(-\xi) \psi(\tau, \alpha), \quad (8)$$

составляющая  $V_a^\alpha$  является функцией от  $V_a^\tau$ ,  $V_a^\nu$ , которую мы не приводим, так как она не используется ниже. В равенствах (7), (8) введены функции

$$\varphi(\tau, \alpha) = \frac{1}{2} \int_{\tau_0}^{\tau} \psi^2(\tau, \alpha) b^2 d\tau, \quad (9)$$

$$\psi^3(\tau, \alpha) = -\frac{1}{b^2} \frac{\partial}{\partial \nu} \left( \frac{G_{\tau\tau}}{b^2} \right) \Big|_{\nu=0} = \frac{2b_{\tau\tau}}{b^4} = \frac{2k(\tau, \alpha)}{b^2} \Big|_{\nu=0} > 0,$$

параметр  $\xi = -x_p > 0$ , где  $\{x_p\}$ ,  $p = 1, 2, \dots$ , — корни функции Эйри  $v(x)$ :  $x_1 = -2.3381\dots$ ,  $x_2 = -4.0880\dots$ ,  $x_3 = -5.5206\dots$  и т.д., для смещений типа (I) и параметр  $\xi = -x'_p > 0$ , где  $\{x'_p\}$ ,  $p = 1, 2, \dots$ , — корни производной функции Эйри  $v'(x)$ :  $x'_1 = -1.0188\dots$ ,  $x'_2 = -3.2482\dots$ ,  $x'_3 = -4.8201\dots$  и т.д., для смещений типа (II). Иногда параметр  $\xi$  будем обозначать через  $\xi'$  для поляризации типа (II).

Подчеркнем, что в приведенных выше формулах  $\sqrt{b^{-2} - a^{-2}}$  — вещественная величина, так как продольная скорость  $a$  распространения волн всегда больше поперечной скорости  $b$ .

Представляющие дифракционную ( $\nu = O(\omega^{-2/3})$ ) часть поля векторы  $\mathbf{u}_b^{(I)}$ ,  $\mathbf{u}_b^{(II)}$  в соответствии с двумя поляризациями I, II имеют вид

$$\mathbf{u}_b^{(I)} = e^{\Phi(\tau, \alpha, \omega)} (\omega^{-1/3} V^\tau, \omega^{-1/3} V^\alpha, V^\nu), \quad (10)$$

$$\mathbf{u}_b^{(II)} = e^{\Phi(\tau, \alpha, \omega)} (\omega^{-1/3} W^\tau, W^\alpha, \omega^{-1/3} W^\nu). \quad (11)$$

Здесь фазовая функция  $\Phi(\tau, \alpha, \omega)$  определяется формулой (7).

Мы рассматриваем квазидвумерный случай – компонента вектора смещения вдоль координаты  $\alpha \equiv y$  учитывается, но при этом сам вектор смещения и все введенные выше функции от этой координаты  $\alpha \equiv y$  не зависят. Ввиду этого опустим ниже координату  $\alpha \equiv y$  из аргументов рассматриваемых функций в формулах (3), (7), (9).

Как следует из формул (10), (11), главными членами полученных асимптотик являются составляющие  $V^\nu$ ,  $W^\alpha$ . Приведем эти составляющие, а также определяющие их уравнения и граничные условия. Волна шепчущей галереи поляризованная в главном либо вдоль составляющей  $V^\nu$ , либо вдоль составляющей  $W^\alpha$  удовлетворяет одному и тому же параболическому уравнению

$$\left( 2i \frac{\omega}{b^2} \frac{\partial}{\partial \tau} + \frac{\partial^2}{\partial \nu^2} - \omega^2 \frac{2\nu}{b^2} k(\tau) \right) U = 0 \quad (12)$$

Для  $U = V^\nu e^{-i\omega(t-\tau)}$  из условий отсутствия напряжений на  $\partial\Omega$  имеем граничное условие Дирихле

$$V^\nu \Big|_{\nu=0} = 0, \quad (13)$$

а для  $U = W^\alpha e^{-i\omega(t-\tau)}$  – граничное условие Неймана

$$\frac{\partial W^\alpha}{\partial \nu} \Big|_{\nu=0} = 0. \quad (14)$$

Кроме этого, ввиду сосредоточенности решения вблизи границы  $\partial\Omega$ , следует учитывать предельное условие относительно функции  $U$

$$U \Big|_{\nu \rightarrow \infty} \rightarrow 0, \quad (15)$$

Таким образом, асимптотически главные составляющие  $u_b^\nu$ ,  $u_b^\alpha$  волн шепчущей галереи являются решениями краевых задач Штурма-Лиувилля для уравнения (12), граничных условий либо (13), либо (14) и предельного условия (15) по переменной  $\nu$ . В каждом случае граничных условий (13) или (14) асимптотически главными являются волны шепчущей галереи

$$U^{wg} = A_0(\tau) e^{\Phi(\tau, \alpha, \omega) + i\omega(t-\tau)} \nu(\psi \omega^{2/3} \nu - \xi), \quad (16)$$

причем величина  $(-\xi)$  в случае смещения, соответствующего граничному условию (13), равна одному из корней функции Эйри  $v(x)$ , а для граничного условия (14) – одному из корней производной функции Эйри.



Перейдем теперь к исследованию задачи дифракции волн шепчущей галереей, набегающих со стороны цилиндрической поверхности  $\partial\Omega^-$  на полуплоскость  $\partial\Omega^+$ ,  $z = 0$ ,  $x \geq 0$ . В зависимости от поляризации падающего поля, рассеянное поле будет удовлетворять условию Дирихле (13) или Неймана (14) на границе тела.

Рассмотрим сначала следующую предельную (по переменной  $\tau$ ) задачу Дирихле

$$\left( 2i \frac{\omega}{b^2} \frac{\partial}{\partial \tau} + \frac{\partial^2}{\partial \nu^2} - \omega^2 \frac{2\nu}{b^2} k(\tau) \right) U = 0, \quad (17)$$

$$U|_{\partial\Omega} = 0, \quad (18)$$

$$(U - U^{wg})|_{\tau \rightarrow -\infty} \rightarrow 0, \quad (19)$$

причем в последнем соотношении функция  $U^{wg}$ , определяемая формулой (16), есть именно та волна шепчущей галереи, которая набегаёт на линию скачка кривизны.

Напомним, что введенные нами координаты при  $x \leq 0$  — это координаты  $(\tau, \alpha = y, \nu)$ , где  $\nu \geq 0$  — длина нормали к  $\partial\Omega^-$ ,  $\tau \leq 0$ ,  $s = \tau b$ ,  $s \leq 0$  — длина дуги от основания нормали до точки  $x = 0$ ,  $y, z = 0$  (точка скачка кривизны), при  $x \geq 0$  они переходят в декартовы координаты  $(x, y, z \geq 0)$ .

Будем искать решение в окрестности границы  $\partial\Omega$  при малом  $z$ .

Как известно, волна шепчущей галереи имеет следующее асимптотическое разложение в главном приближении:

$$U^{wg} \sim A_0(\tau) \exp \left\{ i \left( \frac{\omega}{2b} \right)^{1/3} (-\xi) \int_{\tau_0}^{\tau} b k(\tau)^{2/3} d\tau \right\} v(\zeta - \xi), \quad (20)$$

где  $\zeta = \left( \frac{\omega}{b} \right)^{2/3} (2k(\tau))^{1/3} \nu$ ,  $v(t)$  — вещественная функция Эйри,  $(-\xi)$  — корень функции  $v(t)$ .

Рассматриваемая волна шепчущей галереи  $U^{wg}$  является решением параболического уравнения (12) и получена из уравнения теории упругости для компоненты вектора смещений  $u_b^y$ :

$$u_b^y = \exp - (i\omega(t - \tau)) U.$$

Вблизи точки  $(0, y, 0)$  это уравнение заменим на следующее:

$$\left( i \frac{\partial}{\partial \sigma} + \frac{\partial^2}{\partial \zeta^2} - \zeta \right) U = 0, \quad (21)$$

где  $\zeta = \left( \frac{\omega}{b} \right)^{2/3} (2k(0))^{1/3} \nu$ ,  $\sigma = \left( \frac{\omega}{2b} \right)^{1/3} \tau b k(0)^{2/3}$ .

Решение уравнения (21) имеет следующий вид:

$$U^{wg} = A_0(\tau) \exp\{i\sigma(-\xi)\} v(\zeta - \xi), \quad v(-\xi) = 0. \quad (22)$$

Волна шепчущей галереи, определяемая в главном приближении формулой (22), набегают на границу перехода цилиндрической области  $\partial\Omega^-$  в полуплоскость  $\partial\Omega^+$ . Ясно, что справа от этой линии  $x \geq 0$ ,  $z = 0$  формула (22) перестает быть решением задачи.

Из физических соображений, а также из рассмотрения аналогичных эталонных задач, следует ожидать, что волна отраженная от границы скачка кривизны и идущая обратно будет величиной второго порядка малости, следовательно в первом приближении ею можно пренебречь.

В этом предположении решение задачи (в главном приближении) можно найти следующим способом:

Предположим, что в окрестности границы волна  $U$  после выделения главного осциллирующего множителя  $\exp\{-i\omega(t - \tau)\}$  будет удовлетворять параболическому уравнению

$$\left(2i\frac{\omega}{b}\frac{\partial}{\partial x} + \frac{\partial^2}{\partial z^2}\right)U = 0$$

и, естественно, граничному условию

$$U|_{\partial\Omega^+} = 0.$$

Для удобства записи и для "сшивания" с решением слева от точки разрыва кривизны, введем растянутые координаты

$$\begin{aligned} \hat{\zeta} &= \left(\frac{\omega}{b}\right)^{2/3} (2k(0))^{1/3} z, \\ \hat{\sigma} &= \left(\frac{\omega}{2b}\right)^{1/3} k(0)^{2/3} x. \end{aligned} \quad (23)$$

(В дальнейшем тильду у переменных  $\zeta$ ,  $\sigma$  в области  $x \geq 0$  писать не будем).

Тогда, для решения  $U$  справа от точки разрыва получим следующую задачу:

$$\begin{aligned} \left(i\frac{\partial}{\partial \sigma} + \frac{\partial^2}{\partial \zeta^2}\right)U &= 0, \quad \zeta > 0, \quad \sigma > 0, \\ U &= 0, \quad \zeta = 0, \quad \sigma > 0, \\ U &= U^{wg}, \quad \zeta > 0, \quad \sigma = 0, \end{aligned} \quad (24)$$

где  $U^{wg}$  решение слева от точки  $(0, y, 0)$ , определенное формулой (22):

Для исследования этой задачи используем функцию Грина смешанной задачи, удовлетворяющей условиям:

$$\begin{aligned} \left(i\frac{\partial}{\partial\sigma} + \frac{\partial^2}{\partial\zeta^2}\right) G(\sigma, \zeta, \zeta') &= 0, \quad \sigma > 0, \quad \zeta > 0, \\ G(\sigma, \zeta, \zeta') &= 0, \quad \sigma > 0, \quad \zeta = 0, \\ G(\sigma, \zeta, \zeta') &= \delta(\zeta - \zeta'), \quad \sigma = 0, \quad \zeta > 0. \end{aligned} \tag{25}$$

Тогда решение задачи (24) будет даваться квадратурой:

$$U(\sigma, \zeta) = \int_0^{\infty} U^{wg}(\sigma, \zeta') G(\sigma, \zeta, \zeta') \mu(\zeta', \zeta_1, \zeta_2) d\zeta',$$

где  $\mu(\zeta', \zeta_1, \zeta_2)$  – нейтрализатор,

$$\begin{aligned} \mu &\equiv 1 \quad \text{при } \zeta' < \zeta_1, \quad \mu \equiv 0 \quad \text{при } \zeta' > \zeta_2, \\ \mu &\in C^\infty(0, \infty). \end{aligned}$$

Перейдем к нахождению функции Грина  $G(\sigma, \zeta, \zeta')$  рассматриваемой задачи (25). Ее будем искать методом Фурье:

$$G(\sigma, \zeta) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} \exp(i\sigma p) g(p, \zeta) dp$$

Из уравнения задачи (25) находим, что

$$g(p, \zeta) = f_1(p)e^{\sqrt{p}\zeta} + f_2(p)e^{-\sqrt{p}\zeta}$$

Для того, чтобы удовлетворить граничному условию  $G = 0$  при  $\zeta = 0$ , следует положить  $f_1(p) = -f_2(p) = f(p)$ , т.е.

$$g(p, \zeta) = f(p)(e^{\sqrt{p}\zeta} - e^{-\sqrt{p}\zeta}).$$

Контур интегрирования охватывает разрез, исходящий из точки ветвления  $p = 0$

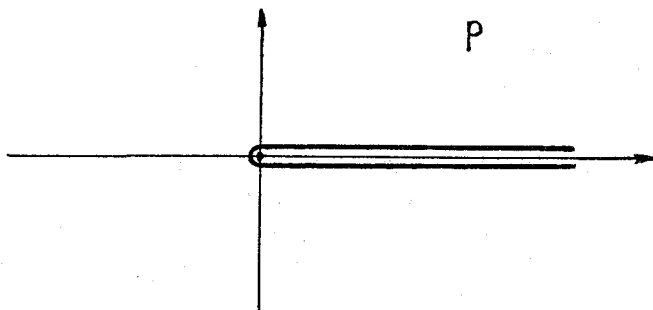


Рис. 2.

Сделаем замену переменных  $p = i\beta^2$ , тогда получим интеграл:

$$G(\sigma, \zeta') = \frac{i}{\pi} \int_{-\infty}^{+\infty} e^{-\sigma\beta^2} \left( e^{\sqrt{i}\beta\zeta} - e^{-\sqrt{i}\beta\zeta} \right) \beta f(i\beta^2, \zeta') d\beta.$$

Для того, чтобы удовлетворить условию  $G(\sigma, \zeta, \zeta') = \delta(\zeta - \zeta')$  при  $\sigma = 0$ , функцию  $f(i\beta^2, \zeta')$  следует взять равной

$$f(i\beta^2, \zeta') = \frac{e^{-\sqrt{i}\beta\zeta'}}{2\sqrt{i}\beta}.$$

Тогда функция Грина принимает вид

$$G(\sigma, \zeta, \zeta') = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{+\infty} e^{-\sigma\beta^2} \left( e^{\sqrt{i}\beta(\zeta - \zeta')} - e^{-\sqrt{i}\beta(\zeta + \zeta')} \right) d\beta.$$

Интегралы можно вычислить, учитывая, что

$$\int_{-\infty}^{+\infty} e^{-\sigma r^2} dr = \sqrt{\frac{\pi}{\sigma}}.$$

В результате вычислений окончательно для функции Грина задачи Дирихле получаем

$$G^D(\sigma, \zeta, \zeta') = \frac{1}{2\sqrt{\pi\sigma}} \left[ e^{\frac{i(\zeta - \zeta')^2}{4\sigma}} - e^{\frac{i(\zeta + \zeta')^2}{4\sigma}} \right]. \quad (26)$$

Возвращаясь к формулам задачи (24), находим, что решение в окрестности точки  $(0, y, 0)$  справа от линии скачка кривизны будет в главном приближении определяться следующим равенством

$$U(\sigma, \zeta) = \frac{A(0)}{2\sqrt{\pi\sigma}} \int_0^{\infty} v(\zeta' - \xi) \left[ e^{\frac{i(\zeta - \zeta')^2}{4\sigma}} - e^{\frac{i(\zeta + \zeta')^2}{4\sigma}} \right] \mu(\zeta', \zeta_1, \zeta_2) d\zeta'. \quad (27)$$

Проанализируем поведение интенсивности волнового процесса  $U(\sigma, \zeta)$  в окрестности луча  $L$  после перехода через линию сопряжения на поверхности  $\partial\Omega$ , т.е. при увеличении  $\sigma$  от нуля. Для этого найдем для функции (27) разложение вблизи поверхности  $\partial\Omega$

$$U(\sigma, \zeta) = U(\sigma, \zeta) \Big|_{\zeta=0} + \frac{\partial U}{\partial \zeta} \Big|_{\zeta=0} \zeta + \dots \quad (28)$$

В силу граничных условий для задачи Дирихле (поляризация I) первое слагаемое в правой части формулы (28) равно тождественно нулю, а для задачи Неймана (поляризация II) - второе слагаемое равно тождественно нулю. В связи с этим по аналогии с теорией распространения электромагнитных волн [4] первый отличный от нуля коэффициент правой части формулы (28), т.е.  $\left. \frac{\partial U}{\partial \zeta} \right|_{\zeta=0}$

в задаче Дирихле и  $U(\sigma, \zeta) \Big|_{\zeta=0} = U(\sigma, 0)$  в задаче Неймана, ниже будем называть поверхностным током вдоль луча  $L$  для волнового процесса в теории упругости.

Тогда поверхностный ток вдоль луча  $L$ , определяемый волной шепчущей галереи и соответствующий задаче Дирихле (поляризация I), будет характеризоваться следующим выражением

$$\Psi(\sigma) = \left. \frac{\partial U}{\partial \zeta} \right|_{\zeta=0} = \frac{A(0)}{2\sqrt{\pi\sigma^3}} \int_0^\infty v(\zeta' - \xi) \zeta' e^{\frac{i(\zeta')^2}{4\sigma}} \mu(\zeta', \zeta_1, \zeta_2) d\zeta'. \quad (29)$$

Последняя формула показывает, что величина рассматриваемого поверхностного тока волнового процесса быстро убывает при смещении от точки  $(0, y, 0)$  вправо т.е. при возрастании  $\sigma$  (как  $O(\sigma^{-3/2})$ ).

Аналогичным образом может быть решена задача Неймана. Здесь волна шепчущей галереи будет в окрестности точки  $(0, y, 0)$  равна

$$U^{wg}(\sigma, \zeta) = U^{wg}(0) e^{i\sigma(-\xi')} \frac{v(\zeta - \xi')}{v(-\xi')},$$

где  $-\xi'$  - корень производной  $v'(t)$  функции Эйри  $v(t)$ .

Функция Грина в случае задачи Неймана будет определяться следующим выражением

$$G^N(\sigma, \zeta, \zeta') = \frac{1}{2\sqrt{\pi\sigma}} \left[ e^{\frac{i(\zeta - \zeta')^2}{4\sigma}} + e^{\frac{i(\zeta + \zeta')^2}{4\sigma}} \right],$$

а формула, определяющая поле справа от точки  $(0, y, 0)$ , имеет вид

$$U(\sigma, \zeta) = \frac{U^{wg}(0)}{2\sqrt{\pi\sigma}} \int_0^\infty \frac{v(\zeta' - \xi')}{v(-\xi')} \left[ e^{\frac{i(\zeta - \zeta')^2}{4\sigma}} + e^{\frac{i(\zeta + \zeta')^2}{4\sigma}} \right] d\zeta'. \quad (30)$$

В частности поверхностный ток вдоль луча  $L$  на поверхности  $\partial\Omega^+$  справа от точки  $(0, y, 0)$  будет выражаться следующей формулой

$$U(\sigma, 0) = \frac{U^{wg}(0)}{\sqrt{\pi\sigma}} \int_0^\infty \frac{v(\zeta' - \xi')}{v(-\xi')} e^{\frac{i(\zeta')^2}{4\sigma}} d\zeta'. \quad (31)$$

Легко видеть, что при  $\sigma \rightarrow +0$  выражение (31) будет переходить в решение  $U^{wg}(\sigma, 0)$  слева от точки  $(0, y, 0)$ , поскольку функция

$$\frac{1}{\sqrt{\pi\sigma}} e^{\frac{i(\zeta')^2}{4\sigma}} \rightarrow \delta(\zeta') \text{ при } \sigma \rightarrow +0.$$

Сделаем некоторые выводы относительно поведения поперечных составляющих вектора смещений, т.е. составляющей  $u_b^v$  для поляризации типа I и составляющей  $u_b^\alpha$  для поляризации типа II.

Решение слева от точки  $(0, y, 0)$  плавно переходит в решение справа от этой точки.

Поверхностный ток  $U(\sigma, 0)$  волнового процесса вдоль луча  $L$ , связанного с задачей Неймана (поляризация II), убывает гораздо медленнее, чем поверхностный ток  $\Psi(\sigma)$  волнового процесса вдоль луча  $L$ , связанного с задачей Дирихле, т.е. при удалении от линии разрыва кривизны гораздо большей будет интенсивность  $U(\sigma, \zeta)$  волнового процесса с поляризацией II, которому соответствует задача Неймана.

Мы нашли дифракционное поле в малой окрестности границы, а также асимптотику интенсивности волнового процесса и ее изменения на луче  $L$  (формулы (27), (29)) для задачи Дирихле и асимптотику интенсивности волнового процесса (формулы (30), (31)) для задачи Неймана.

Поле на любых расстояниях от границы можно найти двумя способами:

1) можно продолжить решения (27), (30), полученные в окрестности границы, за ее пределы внутрь тела,

2) используя найденную выше асимптотику поверхностного тока на границе (соотношения (29), (31) для поверхностного тока), асимптотику поля всюду вне поверхности  $\partial\Omega$  можно найти с помощью формулы Грина.

Покажем, что решение (27) переходит при  $\zeta \gg 1$  в известное выражение для волны шепчущей галереи. Воспользуемся асимптотикой функции Эйри  $v$

$$v(t) \sim t^{-1/4} e^{-x}, \quad v'(t) \sim -\frac{1}{2} t^{1/4} e^{-x}$$

где  $t$  — большое положительное число, а  $x$  равно

$$x = \frac{2}{3} t^{3/2}.$$

Подставляя эту асимптотику в формулу (27) для поля  $U$ , получим,

что подынтегральное выражение можно представить в виде

$$U(\sigma, \hat{\zeta}) = \frac{A(0)}{2\sqrt{\pi\sigma}} \int_0^{\infty} (\zeta' - \xi)^{-1/4} [e^{i\theta^-} - e^{i\theta^+}] d\zeta',$$

$$\theta^{\pm} = i\frac{2}{3}(\zeta' - \xi)^{3/2} + \frac{(\zeta' \pm \hat{\zeta})^2}{4\hat{\sigma}}. \quad (32)$$

Найдем стационарную точку функции (32)

$$\frac{\partial \theta^{\pm}}{\partial \zeta'} = i\sqrt{\zeta' - \xi} + \frac{\zeta' \pm \hat{\zeta}}{2\hat{\sigma}} = 0, \quad \xi = -x_1,$$

где  $x_1$  — первый корень функции Эйри  $v(t)$ . Учитывая, что  $\zeta' \gg |\xi|$  условие для стационарной точки в главном приближении примет вид:

$$\zeta' = -(2\hat{\sigma}^2 \pm \hat{\zeta}) \pm 2\hat{\sigma}(\sqrt{\hat{\sigma}^2 \pm \hat{\zeta}}), \quad (33)$$

Легко видеть, что уравнение (33) со знаком “+” не имеет решений, а со знаком “-” имеет решение. Кроме этого следует учесть важное для дальнейшего соотношение  $\sigma \approx \sqrt{\zeta}$ . Тогда соответствующее решение уравнения (33) примет следующий вид  $\zeta' = -(2\hat{\sigma}^2 - \hat{\zeta})$  и имеет простой геометрический смысл. Остановимся на этом подробнее.

Вспомним определение растянутых координат (см. выше формулы (21) и (23)), которые в окрестности точки  $(0, y, 0)$  можно записать следующим образом:

$$\sigma = Msk(0), \quad \zeta = 2M^2vk(0),$$

$$\hat{\sigma} = Mxk(0), \quad \hat{\zeta} = 2M^2yk(0),$$

где

$$M = \left( \frac{\omega}{2bk(0)} \right)^{1/3}.$$

Теперь получим некоторые геометрические тождества, которые нам понадобятся при исследовании решения и установлении его геометрического смысла. Рассмотрим рис. 3.

Мы рассматриваем задачу о собственных функциях, сосредоточенных вблизи поверхности  $\partial\Omega$  и имеющих систему лучей, заполняющих некоторую окрестность поверхности  $\partial\Omega^-$ , с углом скольжения  $\varepsilon(s) = \gamma k(s)^{1/3}$ ,  $\gamma = const \ll 1$ , малым настолько, что в треугольнике  $OAB$  имеем  $l' \approx s$  и

$$\tan \varphi \approx \frac{s}{z'} = \frac{M}{\sqrt{\zeta'}}. \quad (34)$$

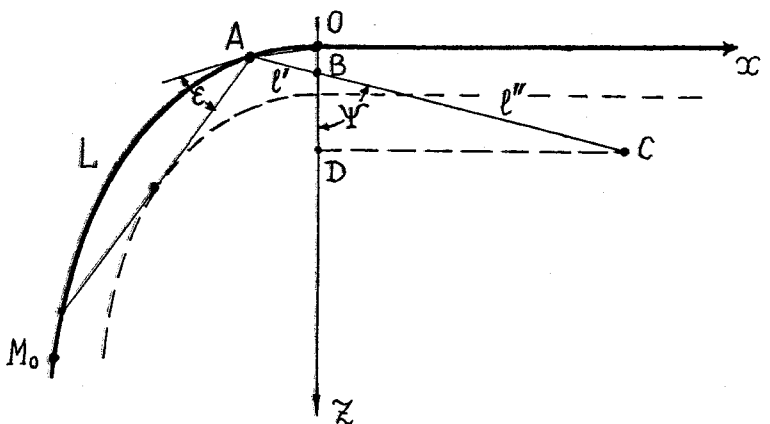


Рис. 3.

Далее последовательно находим, что из треугольника  $BCD$  имеем

$$\tan \psi = \frac{x}{z - z'} = M \frac{2\sigma}{\hat{\zeta} - \zeta'}.$$

Уравнение для стационарной точки

$$\sqrt{\zeta'} - \frac{\hat{\zeta} - \zeta'}{2\sigma} = 0 \quad (35)$$

является условием равенства углов  $\psi$  и  $\varphi$ , т.е. условием того, что линия  $ABC$  является прямой.

Пусть стационарная точка  $\zeta' = \zeta^*$  будет решением уравнения (35), тогда разложение фазовой функции  $\theta^-$  в окрестности этой точки будет иметь следующий вид:

$$\theta^- = i \frac{2}{3} (\zeta^*)^{3/2} - i \sqrt{\zeta^*} \xi_1 + \frac{(\hat{\zeta} - \zeta^*)^2}{4\sigma} + \dots$$

Вычисляя интеграл (32) методом стационарной фазы и учитывая тождества (33) и (35), получим для дифракционного поля  $u_b^y$  следующее выражение

$$u_b^y = \frac{A(0)}{\sqrt{\theta_{\zeta\zeta}^-(0)}} \exp \left[ i \frac{\omega}{b} (s_0 - s + l' + l'') + i \left( \frac{\omega}{2b} \right)^{1/3} (-\xi_1) \int_{s_0}^s k^{2/3}(0) ds \right],$$

$$s_0 < 0, \quad (36)$$



где точка  $A$  луча  $L$  имеет координаты  $A = (s, y, 0)$  (см. рис. 3). Выражение (36) как и следовало ожидать, при  $\hat{\zeta} \gg 1$  определяет волну шепчущей галереи.

Таким образом, можно сделать вывод, что решение (27), полученное справа от точки разрыва кривизны в окрестности границы ( $\hat{\sigma}, \hat{\zeta} = O(1)$ ), переходит в волну шепчущей галереи при увеличении  $\hat{\zeta}$ , т.е. при удалении от границы  $\partial\Omega^+, z = 0, x > 0$ .

Аналогичная формула может быть получена из формулы Грина, для которой в качестве тока следует взять выражение (28).

В заключение отметим, что аналогичным образом рассмотрены следующие квазидвумерные задачи:

1) задача со скачком кривизны, когда граница  $\partial\Omega^+$  тоже будет криволинейной, а упругое тело  $\Omega$  — однородно.

2) задача дифракции волны шепчущей галереи от вертикальной линии сопряжения  $x = 0, y, z \geq 0$  неоднородного упругого тела, ограниченного криволинейной поверхностью  $\partial\Omega^-$  положительной кривизны, с однородным упругим полупространством, имеющим плоскую границу нулевой кривизны  $\partial\Omega^+, z = 0$ .

Работа выполнена при финансовой поддержке Российского фонда фундаментальных исследований (93-011-16148).

#### ЛИТЕРАТУРА

1. Н. Я. Кирпичникова, *О распространении сосредоточенных вблизи лучей поверхностных волн в неоднородном упругом теле произвольной форм.* Труды МИАН 1971. Т. СХV Математические вопросы теории дифракции и распространения волн. 1. Л.: Изд-во "Наука", 1971. с. 114-130.
2. В. М. Бабич, Н. Я. Кирпичникова, *О распространении волн Лява вдоль поверхности упругого неоднородного тела произвольной формы.* — В кн.: Проблемы математического анализа. Вып. 2.. Изд-во ЛГУ, 1969. с. 134-140.
3. Н. В. Сивицкая, В. Б. Филиппов, *О распространении волн шепчущей галереи в среде с вертикальной границей раздела.* — Зап. научн. семин. ЛОМИ. 179 (1989), 147-151.
4. В. А. Фок, *Проблемы дифракции и распространения электромагнитных волн.* М.: Издательство "Советское радио", 1970. 520 с.

Kirpichnikova N. Ya., Philippov V. B. Behavior of the surface waves under crossing through the junction line on the boundary of the elastic homogeneous isotopic body.

The homogeneous elastic body is considered. This body is bounded with the stress-free surface which consists of two parts continuously transferring each into other: the smooth cylindrical and plane surfaces. When crossing

the line of the junction of the surfaces the tangent plane varies continuously. The curvature of the normal cross-section of that surface in each point of this line has a break of the first kind.

The behavior of the transverse waves of the whispering gallery during the transition through the line of the jump of the curvature is studied. We have two types of the waves: the waves, the displacement of the particles of which primarily takes place in the direction of the normal to the surface (the Dirichlet boundary condition) and waves, the displacement of the particles of which takes place perpendicularly to the plane of normal section of the surface along the ray, similar to Love waves (the Neumann boundary condition).

С.-Петербургское отделение  
Математического института  
им. В. А. Стеклова

Поступило 10 сентября 1995 г.