

УДК 518.5

МАТЕМАТИКА

В. Л. АРЛАЗАРОВ, Е. А. ДИНИЦ, М. А. КРОНРОД, И. А. ФАРАДЖЕВ

**ОБ ЭКОНОМНОМ ПОСТРОЕНИИ ТРАНЗИТИВНОГО ЗАМЫКАНИЯ
ОРИЕНТИРОВАННОГО ГРАФА**

(Представлено академиком И. Г. Петровским 9 III 1970)

1. Для ориентированного графа (H, γ) , где H — множество вершин, а γ — отображение H в себя ⁽¹⁾, известны алгоритмы построения транзитивного замыкания Γ с оценкой числа действий для графа общего вида $O(n^3)$ ⁽²⁻⁴⁾, где $n = |H|$. В ⁽⁴⁾ задача построения транзитивного замыкания графа общего вида сводится к последовательности трех задач: построения графа Герца ⁽⁵⁾ данного графа, транзитивного замыкания графа Герца (ациклического) и построения транзитивного замыкания данного графа по транзитивному замыканию его графа Герца, причем показано, что первая и третья из них могут быть решены за $O(n^2)$ действий.

В данной заметке строится алгоритм транзитивного замыкания ациклического графа за $O(n^3 / \ln n)$ действий.

2. Для ациклического графа (H, γ) рассмотрим разбиение H на ранги K_i :

$$K_0 = \{h \in H: \gamma^{-1}h = \emptyset\}, \quad K_i = \{h \in H \setminus S_{i-1}: \gamma^{-1}h \subset S_{i-1}\},$$

где $S_i = \bigcup_{j \leq i} K_j$.

В ⁽⁴⁾ приводится алгоритм такого разбиения за $O(n^2)$ действий.

Обозначим γ_i и Γ_i отображения S_{i-1} в K_i порожденные γ и Γ соответственно, а $G_i = \bigcup \Gamma_j$ — отображение S_{i-1} в S_i . Тогда, очевидно:

$$G_0 = \emptyset, \quad \Gamma_i = \gamma_i G_{i-1} \cup \gamma_i. \tag{1}$$

Тем самым построение транзитивного замыкания сведено к треугольному процессу получения произведений отображений.

3. Лемма (М. Кронрод). Пусть A, B, C — множества, $|A| = p$, $|B| = q$, $|C| = r$, и α, β — многозначные отображения $\alpha: A \rightarrow B$, $\beta: B \rightarrow C$.

Тогда отображение $\beta\alpha: A \rightarrow C$ можно построить за $O((p+q)qr / \ln q)$ действий.

Доказательство. Разобьем B на $[q / \ln q] + 1$ непересекающихся подмножеств B_i , так чтобы $|B_i| \leq \ln q$. Обозначим $\alpha_i: A \rightarrow B_i$, $\beta_i: B_i \rightarrow C$, порожденные α и β соответственно. Тогда, очевидно:

$$\beta\alpha = \bigcup_i \beta_i\alpha_i. \tag{2}$$

Рассмотрим множество $M_i = \{m_{is}\}$ всех подмножеств B_i и изоморфное ему множество $L_i = \{l_{is}\}$, где $l_{is} = \bigcup_{b \in m_{is}} \beta_i b$. Занумеровав элементы B_i : $b_{i0}, b_{i1},$ и т. д., упорядочим элементы M_i и L_i следующим образом:

$s = \sum_k 2^{jk} \leftrightarrow m_{is} = \bigcup_k b_{ij_k}$. Очевидно, что $l_{i0} = \emptyset$, $l_{i2^j} = \beta_i b_{ij}$, а любое другое l_{is} может быть получено объединением двух других с меньшими номерами. Например: $l_{is} = l_{ik} \cup l_{i, s-k}$; $s \neq 2^j$, где $k = \max\{2^j: 2^j < s\}$. Поскольку $|L_i| \leq q$, а $|l_{is}| \leq r$, то L_i можно построить за $O(qr)$, а все L_i — за $O(q^2 r / \ln q)$ действий.

Далее, из полноты M_i следует, что для $a \in A$ $a_i a \in M_i$ и, следовательно, $\beta_i a_i a \in L_i$. Таким образом, после того как все L_i построены, на получение βa по (2) требуется $O(pqr / \ln q)$ действий.

4. Теорема. Для ациклического ориентированного графа (H, γ) с $|H| = n$ транзитивное замыкание Γ можно построить за $O(n^3 / \ln n)$ действий.

Доказательство. Применим алгоритм леммы к построению $\gamma_i G_{i-1}$ в (1). Так как γ_i действует из S_{i-1} с $|S_{i-1}| < n$ в K_i с $|K_i| = n_i$, а G_{i-1} действует из S_{i-2} с $|S_{i-2}| < n$ в S_{i-1} , построение $\gamma_i G_{i-1}$ может быть выполнено за $O(n^2 n_i / \ln n)$ действий. Суммируя по рангам, получим искомую оценку.

Институт проблем передачи информации
Академии наук СССР
Москва

Поступило
20 II 1970

Институт проблем управления
Москва

Московский государственный университет
им. М. В. Ломоносова

Центральный научно-исследовательский
институт патентной информации
Москва

ЦИТИРОВАННАЯ ЛИТЕРАТУРА

¹ С. Берж, Теория конечных графов и ее приложения, ИЛ, 1962. ² В. В. Мартынюк, Журн. вычислит. матем. и матем. физ., 2, № 6 (1963). ³ Э. Б. Ершов, Экономика и математические методы, 2, в. 2 (1966). ⁴ И. А. Фараджев, Журн. вычислит. матем. и матем. физ., 10, № 4 (1970). ⁵ А. А. Зыков, Теория конечных графов, Новосибирск, 1969.