A. A. Mishulovich, V. A. Sloushch, T. A. Suslina, Homogenization of a one-dimensional periodic elliptic operator at the edge of a spectral gap: operator estimates in the energy norm, *Zap. Nauchn. Sem. POMI*, 2022, Volume 519, 114–151

Записки научных
семинаров ПОМИ
Том 519, 2022 г.

А. А. Мишулович, В. А. Слоущ, Т. А. Суслина

УСРЕДНЕНИЕ ОДНОМЕРНОГО ПЕРИОДИЧЕСКОГО ЭЛЛИПТИЧЕСКОГО ОПЕРАТОРА НА КРАЮ СПЕКТРАЛЬНОЙ ЛАКУНЫ: ОПЕРАТОРНЫЕ ОЦЕНКИ В ЭНЕРГЕТИЧЕСКОЙ НОРМЕ

§1. Введение

1.1. Усреднение в пределе малого периода. Работа относится к теории усреднения (гомогенизации). Задачам гомогенизации посвящена обширная литература. Прежде всего укажем книги [1–3].

Пусть Γ – решетка в $\mathbb{R}^d$ и Ω – элементарная ячейка решетки Γ. Для всякой Γ-периодической функции $\varphi(\mathbf{x})$ в $\mathbb{R}^d$ используем обозначение $\varphi^\varepsilon(\mathbf{x}) := \varphi(\varepsilon^{-1}\mathbf{x})$, $\varepsilon > 0$.

Обсудим типичную задачу теории усреднения. В $L_2(\mathbb{R}^d)$ рассмотрим эллиптический оператор $\widehat{\mathcal{A}}_\varepsilon$, формально заданный выражением

$$\widehat{\mathcal{A}}_\varepsilon = -\operatorname{div} g^\varepsilon(\mathbf{x})\nabla. \tag{1.1}$$

Здесь $g(\mathbf{x})$ – симметричная матрица-функция размера $d \times d$ с вещественными элементами; предполагается, что $g(\mathbf{x})$ положительно определена, ограничена и Γ-периодична. Строгое определение оператора $\widehat{\mathcal{A}}_\varepsilon$ дается через квадратичную форму. Пусть $u_\varepsilon(\mathbf{x})$ – обобщенное решение эллиптического уравнения

$$-\operatorname{div} g^\varepsilon(\mathbf{x})\nabla u_\varepsilon(\mathbf{x}) + \varkappa^2 u_\varepsilon(\mathbf{x}) = f(\mathbf{x}), \tag{1.2}$$

где $f \in L_2(\mathbb{R}^d)$ и $\varkappa > 0$. Базовый результат теории усреднения: при $\varepsilon \to 0$ решение u_ε сходится (в некотором смысле) к решению u_0 "усредненного" уравнения

$$-\operatorname{div} g^0\nabla u_0(\mathbf{x}) + \varkappa^2 u_0(\mathbf{x}) = f(\mathbf{x}). \tag{1.3}$$

Ключевые слова: Периодические дифференциальные операторы, спектральная лакуна, усреднение, эффективный оператор, корректор, операторные оценки погрешности.

Работа выполнена при поддержке РНФ (проект 22-11-00092).

Здесь g^0 – постоянная положительная матрица, называемая *эффективной*. Оператор $\widehat{\mathcal{A}}^0 = -\operatorname{div} g^0 \nabla$ называется *эффективным оператором* для $\widehat{\mathcal{A}}_\varepsilon$. В теории усреднения применительно к уравнению (1.2) изучаются различные вопросы: нахождение эффективной матрицы g^0, характер сходимости u_ε к u_0, оценка погрешности $u_\varepsilon - u_0$, построение дальнейших членов асимптотического разложения решения u_ε по степеням ε. Поскольку $u_\varepsilon = (\widehat{\mathcal{A}}_\varepsilon + \varkappa^2 I)^{-1} f$, то в операторных терминах вопрос состоит в нахождении аппроксимаций резольвенты $(\widehat{\mathcal{A}}_\varepsilon + \varkappa^2 I)^{-1}$ при малом ε.

Процедура нахождения эффективной матрицы хорошо известна. Для описания g^0 нужно рассмотреть вспомогательную краевую задачу на ячейке Ω. Пусть $\Phi_j(\mathbf{x})$ есть Γ-периодическое решение задачи

$$\operatorname{div} g(\mathbf{x})(\nabla \Phi_j(\mathbf{x}) + \mathbf{e}_j) = 0, \qquad \int_\Omega \Phi_j(\mathbf{x})\, d\mathbf{x} = 0. \tag{1.4}$$

Здесь $\mathbf{e}_1, \dots, \mathbf{e}_d$ – стандартный ортонормированный базис в $\mathbb{R}^d$. Тогда g^0 – это $(d \times d)$-матрица со столбцами

$$\mathbf{g}_j^0 = |\Omega|^{-1} \int_\Omega g(\mathbf{x})(\nabla \Phi_j(\mathbf{x}) + \mathbf{e}_j)\, d\mathbf{x}, \quad j = 1, \dots, d. \tag{1.5}$$

Выясняется, что эффективная матрица положительно определена.

1.2. Операторные оценки погрешности. В работах Бирмана и Суслиной [4–7] был предложен и развит теоретико-операторный подход к задачам теории усреднения (вариант спектрального метода). При этом явление усреднения трактовалось как спектральный пороговый эффект на краю спектра эллиптического оператора. В рамках этого подхода в [4, 5] была установлена оценка

$$\|u_\varepsilon - u_0\|_{L_2(\mathbb{R}^d)} \leqslant C\varepsilon \|f\|_{L_2(\mathbb{R}^d)}, \tag{1.6}$$

где u_ε – решение уравнения (1.2), а u_0 – решение усредненного уравнения (1.3). Оценка (1.6) точна по порядку; постоянная C явно контролируется в терминах данных задачи. В операторных терминах (1.6) означает, что при $\varepsilon \to 0$ резольвента $(\widehat{\mathcal{A}}_\varepsilon + \varkappa^2 I)^{-1}$ сходится по операторной норме в $L_2(\mathbb{R}^d)$ к резольвенте эффективного оператора $\widehat{\mathcal{A}}^0$, причем

$$\left\| (\widehat{\mathcal{A}}_\varepsilon + \varkappa^2 I)^{-1} - (\widehat{\mathcal{A}}^0 + \varkappa^2 I)^{-1} \right\|_{L_2(\mathbb{R}^d) \to L_2(\mathbb{R}^d)} \leqslant C\varepsilon.$$

В [6] была получена более точная аппроксимация резольвенты оператора $\widehat{\mathcal{A}}_\varepsilon$:

$$\left\|(\widehat{\mathcal{A}}_\varepsilon + \varkappa^2 I)^{-1} - (\widehat{\mathcal{A}}^0 + \varkappa^2 I)^{-1} - \varepsilon \widehat{\mathcal{K}}(\varepsilon)\right\|_{L_2(\mathbb{R}^d)\to L_2(\mathbb{R}^d)} \leqslant C\varepsilon^2. \quad (1.7)$$

Оператор $\widehat{\mathcal{K}}(\varepsilon)$, называемый *корректором*, имеет вид

$$\widehat{\mathcal{K}}(\varepsilon) = \widehat{\mathcal{K}}_1(\varepsilon) + \widehat{\mathcal{K}}_1(\varepsilon)^*, \quad \widehat{\mathcal{K}}_1(\varepsilon) = \sum_{j=1}^{d} [\Phi_j^\varepsilon] \partial_j (\widehat{\mathcal{A}}^0 + \varkappa^2 I)^{-1}, \quad (1.8)$$

где $\Phi_j(\mathbf{x})$ есть Γ-периодическое решение задачи (1.4). В работе [7] была найдена аппроксимация резольвенты $\widehat{\mathcal{A}}_\varepsilon$ по "энергетической" норме (т. е. по норме операторов, действующих из $L_2(\mathbb{R}^d)$ в пространство Соболева $H^1(\mathbb{R}^d)$):

$$\left\|(\widehat{\mathcal{A}}_\varepsilon + \varkappa^2 I)^{-1} - (\widehat{\mathcal{A}}^0 + \varkappa^2 I)^{-1} - \varepsilon \widehat{\mathcal{K}}_1(\varepsilon)\right\|_{L_2(\mathbb{R}^d)\to H^1(\mathbb{R}^d)} \leqslant C\varepsilon. \quad (1.9)$$

Обратим внимание, что корректоры в (1.7) и (1.9) различны.

В [5–7] изучались также более общие операторы вида

$$\mathcal{A}_\varepsilon = -\operatorname{div} \widetilde{g}^\varepsilon(\mathbf{x}) \nabla + \varepsilon^{-2} p^\varepsilon(\mathbf{x}), \quad (1.10)$$

где $\widetilde{g}(\mathbf{x})$ – положительно определенная и ограниченная матрица-функция с вещественными элементами, а $p(\mathbf{x})$ – вещественная функция. Предполагалось, что $\widetilde{g}(\mathbf{x})$ и $p(\mathbf{x})$ Γ-периодичны и $p(\mathbf{x})$ принадлежит классу $L_q(\Omega)$ с подходящим q. Будем считать, что край спектра соответствующего оператора $\mathcal{A} = \mathcal{A}_1 = -\operatorname{div} \widetilde{g}(\mathbf{x}) \nabla + p(\mathbf{x})$ есть точка $\lambda_0 = 0$. Тогда оператор $\mathcal{A}$ допускает удобную факторизацию

$$\mathcal{A} = -\omega(\mathbf{x})^{-1} \operatorname{div} g(\mathbf{x}) \nabla \omega(\mathbf{x})^{-1}, \quad g(\mathbf{x}) = \widetilde{g}(\mathbf{x}) \omega^2(\mathbf{x}).$$

Здесь $\omega(\mathbf{x})$ – положительное Γ-периодическое решение уравнения

$$-\operatorname{div} \widetilde{g}(\mathbf{x}) \nabla \omega(\mathbf{x}) + p(\mathbf{x}) \omega(\mathbf{x}) = 0,$$

подчиненное условию нормировки $\|\omega\|^2_{L_2(\Omega)} = |\Omega|$. Тогда оператор (1.10) запишется в факторизованном виде

$$\mathcal{A}_\varepsilon = -(\omega^\varepsilon)^{-1} \operatorname{div} g^\varepsilon \nabla (\omega^\varepsilon)^{-1} = (\omega^\varepsilon)^{-1} \widehat{\mathcal{A}}_\varepsilon (\omega^\varepsilon)^{-1}, \quad (1.11)$$

где $\widehat{\mathcal{A}}_\varepsilon$ – оператор (1.1). Для оператора (1.11) уже не удается найти такой оператор с постоянными коэффициентами, к резольвенте которого сходилась бы резольвента $(\mathcal{A}_\varepsilon + \varkappa^2 I)^{-1}$. В [5] было показано, что

$$\left\|(\mathcal{A}_\varepsilon + \varkappa^2 I)^{-1} - [\omega^\varepsilon](\widehat{\mathcal{A}}^0 + \varkappa^2 I)^{-1}[\omega^\varepsilon]\right\|_{L_2(\mathbb{R}^d)\to L_2(\mathbb{R}^d)} \leqslant C\varepsilon. \quad (1.12)$$

Здесь $\widehat{\mathcal{A}}^0$ – эффективный оператор для оператора (1.1) при $g = \widetilde{g}\omega^2$, а $[\omega^\varepsilon]$ – оператор умножения на функцию $\omega^\varepsilon(\mathbf{x})$. Аппроксимация теперь содержит быстро осциллирующие множители по краям от резольвенты оператора $\widehat{\mathcal{A}}^0$.

В работе [6] аппроксимация (1.12) была уточнена за счет учета корректора

$$\left\|(\mathcal{A}_\varepsilon+\varkappa^2 I)^{-1}-[\omega^\varepsilon](\widehat{\mathcal{A}}^0+\varkappa^2 I)^{-1}[\omega^\varepsilon]-\varepsilon\mathcal{K}(\varepsilon)\right\|_{L_2(\mathbb{R}^d)\to L_2(\mathbb{R}^d)}\leqslant C\varepsilon^2. \quad (1.13)$$

Здесь $\mathcal{K}(\varepsilon) = [\omega^\varepsilon]\widehat{\mathcal{K}}(\varepsilon)[\omega^\varepsilon]$, а оператор $\widehat{\mathcal{K}}(\varepsilon)$ определен в (1.8). В [7] была найдена аппроксимация резольвенты оператора (1.11) по "энергетической" норме:

$$\left\|(\omega^\varepsilon)^{-1}(\mathcal{A}_\varepsilon+\varkappa^2 I)^{-1}-(\widehat{\mathcal{A}}^0+\varkappa^2 I)^{-1}[\omega^\varepsilon]-\varepsilon\widehat{\mathcal{K}}_1(\varepsilon)[\omega^\varepsilon]\right\|_{L_2(\mathbb{R}^d)\to H^1(\mathbb{R}^d)}\leqslant C\varepsilon. \quad (1.14)$$

Оператор $\widehat{\mathcal{K}}_1(\varepsilon)$ определен в (1.8).

Отметим, что в работах [4–7] аппроксимации для резольвенты были найдены не только для операторов вида (1.1), (1.10), но для широкого класса матричных дифференциальных операторов второго порядка.

Поясним метод на примере более простого оператора (1.1). *Масштабным преобразованием* изучение оператора $(\widehat{\mathcal{A}}_\varepsilon + \varkappa^2 I)^{-1}$ при малом ε сводится к изучению поведения резольвенты $(\widehat{\mathcal{A}} + \varkappa^2\varepsilon^2 I)^{-1}$. Здесь $\widehat{\mathcal{A}} = \widehat{\mathcal{A}}_1 = -\operatorname{div} g(\mathbf{x})\nabla$. С помощью теории Флоке–Блоха оператор $\widehat{\mathcal{A}}$ раскладывается в прямой интеграл по операторам $\widehat{\mathcal{A}}(\boldsymbol{\xi})$. Оператор $\widehat{\mathcal{A}}(\boldsymbol{\xi})$ действует в $L_2(\Omega)$ и задается дифференциальным выражением $-\operatorname{div} g(\mathbf{x})\nabla$ при $\boldsymbol{\xi}$-квазипериодических граничных условиях. Параметр $\boldsymbol{\xi}$ называют *квазиимпульсом*. Спектр оператора $\widehat{\mathcal{A}}(\boldsymbol{\xi})$ дискретен. Пусть $E_1(\boldsymbol{\xi})$ – первое собственное значение и $\psi_1(\mathbf{x};\boldsymbol{\xi})$ – первая собственная функция оператора $\widehat{\mathcal{A}}(\boldsymbol{\xi})$. Выясняется, что поведение резольвенты $(\widehat{\mathcal{A}} + \varkappa^2\varepsilon^2 I)^{-1}$ можно описать в терминах "пороговых" характеристик, то есть, спектральных характеристик оператора $\widehat{\mathcal{A}}$ на краю спектра (имеются в виду асимптотики для $E_1(\boldsymbol{\xi})$ и $\psi_1(\mathbf{x};\boldsymbol{\xi})$ при $|\boldsymbol{\xi}| \to 0$). В частности, эффективная матрица g^0 получается из асимптотики первой зонной функции $E_1(\boldsymbol{\xi})$ при $|\boldsymbol{\xi}| \to 0 \,:\, E_1(\boldsymbol{\xi}) \sim \langle g^0\boldsymbol{\xi},\boldsymbol{\xi}\rangle$. Таким образом, эффект усреднения можно трактовать как пороговый эффект на краю спектра периодического оператора $\widehat{\mathcal{A}}$.

Отметим, что другой подход к операторным оценкам погрешности при усреднении эллиптических уравнений в $\mathbb{R}^d$ (так называемый метод сдвига) был развит Жиковым и Пастуховой [8,9]; см. также обзор [10].

1.3. Усреднение на краю внутренней спектральной лакуны. Ясное понимание порогового характера эффекта усреднения влечет следующий естественный вопрос. Спектр периодического оператора $\mathcal{A}$ имеет зонную структуру и может иметь лакуны. Имеет ли смысл связывать с краями внутренних лакун аналоги задач усреднения? Этот вопрос изучался в работах [11, 12] в одномерном случае и в [13, 14] в случае произвольной размерности d.

Пусть $\nu > 0$ – край внутренней лакуны в спектре оператора $\mathcal{A}$. Для определенности будем считать, что это правый край и точка $\nu - \varkappa^2$ лежит в лакуне. Для оператора $\mathcal{A}_\varepsilon$ этот край перейдет в точку $\varepsilon^{-2}\nu$, то есть, в область высоких энергий. При $0 < \varepsilon \leqslant 1$ точка $\varepsilon^{-2}\nu - \varkappa^2$ лежит в лакуне оператора $\mathcal{A}_\varepsilon$. Вместо (1.2) рассматривается уравнение

$$(\mathcal{A}_\varepsilon u_\varepsilon)(\mathbf{x}) - (\varepsilon^{-2}\nu - \varkappa^2)u_\varepsilon(\mathbf{x}) = f(\mathbf{x}),$$

где $f \in L_2(\mathbb{R}^d)$. Вопрос о поведении решения u_ε при $\varepsilon \to 0$ сводится к изучению оператора $\bigl(\mathcal{A}_\varepsilon - (\varepsilon^{-2}\nu - \varkappa^2)I\bigr)^{-1}$, а после масштабного преобразования – к изучению резольвенты $\bigl(\mathcal{A} - (\nu - \varkappa^2\varepsilon^2)I\bigr)^{-1}$. Аппроксимация описывается в терминах спектральных характеристик оператора $\mathcal{A}$ на данном краю лакуны.

Сформулируем результат в одномерном случае. Рассматривается оператор вида (1.10) при $d = 1$; в одномерном случае для этого оператора будем использовать обозначение A_ε, см. (1.18) ниже. Выясняется, что с каждым краем лакуны ν связан свой эффективный оператор $A^0_\nu = -b_\nu \frac{d^2}{dx^2}$, $b_\nu > 0$. Для определенности считаем, что ν – правый край "периодической" лакуны (см. п. 2.2 ниже). Справедлива оценка

$$\Bigl\| \bigl(A_\varepsilon - (\varepsilon^{-2}\nu - \varkappa^2)I\bigr)^{-1} - [\varphi_0^\varepsilon]\bigl(A^0_\nu + \varkappa^2 I\bigr)^{-1}[\varphi_0^\varepsilon] \Bigr\|_{L_2(\mathbb{R}) \to L_2(\mathbb{R})} \leqslant C\varepsilon, \quad 0 < \varepsilon \leqslant 1. \tag{1.15}$$

Здесь b_ν – коэффициент в асимптотике зонной функции $\lambda(\xi)$ (отвечающей той зоне, для которой точка ν является левым краем): $\lambda(\xi) - \nu \sim b_\nu \xi^2$ при $|\xi| \to 0$, а $\varphi_0(x)$ – вещественное периодическое решение уравнения $A\varphi_0 = \nu\varphi_0$, нормированное в $L_2(0, 1)$.

Оценка (1.15) была установлена в [11] в случае $p(x) = 0$. В [13] аналог оценки (1.15) получен для оператора вида (1.10) в произвольной размерности $d \geqslant 1$. В работе [12] при $d = 1$ установлена более точная аппроксимация резольвенты $\big(A_\varepsilon - (\varepsilon^{-2}\nu - \varkappa^2)I\big)^{-1}$ с погрешностью $O(\varepsilon^2)$ при учете корректора:

$$\Big\| \big(A_\varepsilon - (\varepsilon^{-2}\nu - \varkappa^2)I\big)^{-1} - [\varphi_0^\varepsilon]\big(A_\nu^0 + \varkappa^2 I\big)^{-1}[\varphi_0^\varepsilon] - \varepsilon K_\nu(\varepsilon)\Big\|_{L_2(\mathbb{R})\to L_2(\mathbb{R})} \leqslant C\varepsilon^2. \tag{1.16}$$

Корректор $K_\nu(\varepsilon)$ имеет структуру, аналогичную корректору $\mathcal{K}(\varepsilon)$ из (1.13):

$$K_\nu(\varepsilon) = K_\nu^{(1)}(\varepsilon) + (K_\nu^{(1)}(\varepsilon))^*, \quad K_\nu^{(1)}(\varepsilon) = [\Lambda^\varepsilon]\frac{d}{dx}(A_\nu^0 + \varkappa^2 I)^{-1}[\varphi_0^\varepsilon], \tag{1.17}$$

где $\Lambda(x)$ – некоторая вещественная периодическая функция, определенная ниже в п. 2.3.

В [14] более точная аппроксимация резольвенты найдена в случае произвольной размерности. Задача усреднения на краю лакуны для параболического уравнения при $d = 1$ изучалась в [15].

В настоящей работе при $d = 1$ получена аппроксимация в энергетической норме для резольвенты оператора A_ε на краю лакуны (аналог оценки (1.14)).

1.4. Постановка задачи. В $L_2(\mathbb{R})$ рассматривается оператор вида (1.10) при $d = 1$. Оператор A_ε формально задан дифференциальным выражением

$$A_\varepsilon = -\frac{d}{dx}\widetilde{g}^\varepsilon(x)\frac{d}{dx} + \varepsilon^{-2}p^\varepsilon(x), \tag{1.18}$$

где вещественные измеримые функции $p(x)$ и $\widetilde{g}(x)$ подчинены условиям

$$0 < c_0 \leqslant \widetilde{g}(x) \leqslant c_1 < \infty; \quad \widetilde{g}(x+1) = \widetilde{g}(x), \quad x \in \mathbb{R}; \tag{1.19}$$

$$p \in L_1(0,1), \qquad p(x+1) = p(x), \quad x \in \mathbb{R}. \tag{1.20}$$

Точное определение оператора A_ε дается через квадратичную форму

$$a_\varepsilon[u,u] = \int\limits_{\mathbb{R}} \big(\widetilde{g}^\varepsilon(x)|u'(x)|^2 + \varepsilon^{-2}p^\varepsilon(x)|u(x)|^2\big)\,dx, \quad u \in H^1(\mathbb{R}).$$

При наших предположениях эта форма замкнута и полуограничена снизу. Обозначим $A := A_1 = -\frac{d}{dx}\widetilde{g}(x)\frac{d}{dx} + p(x)$. Введем масштабное преобразование – семейство унитарных операторов T_ε в $L_2(\mathbb{R})$:

$$(T_\varepsilon u)(x) = \varepsilon^{1/2}u(\varepsilon x), \quad \varepsilon > 0. \tag{1.21}$$

Нетрудно убедиться, что справедливо равенство

$$A_\varepsilon = T_\varepsilon^* \left(\varepsilon^{-2} A\right) T_\varepsilon. \tag{1.22}$$

Спектр оператора A имеет зонную структуру: $\sigma(A) = \bigcup\limits_{j=1}^{\infty} \left[\nu_j, \mu_j\right]$. За счет добавления к $p(x)$ подходящей постоянной можно считать, что нижним краем спектра оператора A является точка ноль, то есть $\nu_1 = 0$. В силу (1.22) спектр оператора A_ε имеет вид $\sigma(A_\varepsilon) = \bigcup\limits_{j=1}^{\infty} [\varepsilon^{-2}\nu_j, \varepsilon^{-2}\mu_j]$.

Мы находим аппроксимацию в “энергетической” норме резольвенты оператора A_ε в точке, близкой к краю лакуны. Ограничимся формулировкой для случая правого края “периодической” лакуны:

$$\begin{aligned} \Big\| (\omega^\varepsilon)^{-1} \Big(\big(A_\varepsilon - (\varepsilon^{-2}\nu - \varkappa^2) I\big)^{-1} \\ - [\varphi_0^\varepsilon](A_\nu^0 + \varkappa^2 I)^{-1} [\varphi_0^\varepsilon] - \varepsilon K_\nu(\varepsilon) \Big) \Big\|_{L_2(\mathbb{R}^d) \to H^1(\mathbb{R}^d)} \leqslant C\varepsilon. \end{aligned} \tag{1.23}$$

Здесь эффективный оператор A_ν^0, периодическая функция φ_0 и корректор $K_\nu(\varepsilon)$ определены так же, как в (1.15)–(1.17). Таким образом, в случае внутренней лакуны корректор в оценке (1.23) – тот же самый, что и в (1.16). В случае, когда $\nu = \nu_1 = 0$ (и $\varphi_0 = \omega$), второй член корректора $(K_\nu^{(1)}(\varepsilon))^*$ можно отбросить, поскольку норма $\big\|(\omega^\varepsilon)^{-1}(K_\nu^{(1)}(\varepsilon))^*\big\|_{L_2 \to H^1}$ равномерно ограничена. Поэтому результат согласуется с (1.14). Если же ν – край внутренней лакуны, то указанная норма имеет порядок $O(\varepsilon^{-1})$ и потому второй член корректора отбросить нельзя.

Оценка (1.23) и ее аналоги для других краев лакун представляют собой основные результаты работы.

Работа состоит из введения и трех параграфов. В §2 обсуждается спектральное разложение оператора A и формулируются основные результаты работы. В §3 приведены доказательства основных результатов. Приложение (§4) посвящено доказательству технического результата – леммы 2.2.

1.5. Обозначения. Через $L_q(\mathbb{R})$, $L_q(a,b)$ обозначим стандартные L_q–классы на оси и на промежутке (a,b). Для измеримой функции f через $[f]$ или $[f(x)]$ обозначим оператор умножения на функцию f в пространстве L_2. Через $C_0^\infty(\mathbb{R})$ обозначается класс бесконечно дифференцируемых функций с компактным носителем на оси; через $H^1(\mathbb{R})$ – стандартный класс Соболева; $H^1_{\mathrm{loc}}(\mathbb{R})$ – класс функций $f(x)$, $x \in \mathbb{R}$, для которых произведение $f\varphi$ принадлежит $H^1(\mathbb{R})$ при всех $\varphi \in C_0^\infty(\mathbb{R})$; $\widetilde{H}^1(0,1)$ – подпространство тех функций из $H^1(0,1)$, периодическое продолжение которых принадлежит классу $H^1_{\mathrm{loc}}(\mathbb{R})$; через $\widetilde{H}^1_\xi(0,1)$, где $\xi \in \mathbb{R}$, обозначим класс функций $u(x)$, для которых произведение $e^{-i\xi x}u(x)$ принадлежит $\widetilde{H}^1(0,1)$.

Пусть $\mathfrak{H}, \mathfrak{H}_*$ – комплексные сепарабельные гильбертовы пространства; для линейного ограниченного оператора $T\colon \mathfrak{H} \to \mathfrak{H}_*$ через $\|T\|_{\mathfrak{H}\to\mathfrak{H}_*}$ обозначим операторную норму. Иногда мы опускаем индексы. Для замкнутого оператора T в гильбертовом пространстве $\mathfrak{H}$ через $\operatorname{Dom} T$ обозначается его область определения, а через T^* – сопряженный оператор. Пусть A – самосопряженный линейный оператор в гильбертовом пространстве. В этом случае $\sigma(A)$ обозначает спектр оператора A. Если δ – произвольное борелевское множество на $\mathbb{R}$, то $E_A(\delta)$ – спектральный проектор оператора A, отвечающий множеству δ.

Для всякой 1-периодической функции $\varphi(x)$ на оси положим $\varphi^\varepsilon(x) := \varphi(x/\varepsilon)$. Через Φ обозначим оператор Фурье, действующий по правилу

$$(\Phi v)(\xi) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int\limits_{\mathbb{R}} e^{-i\xi x} v(x)\, dx, \quad v \in L_2(\mathbb{R}) \cap L_1(\mathbb{R}).$$

§2. Спектральное разложение периодического оператора в $L_2(\mathbb{R})$. Формулировка основных результатов

2.1. Оператор A. Факторизация. В $L_2(\mathbb{R})$ рассматривается оператор, отвечающий дифференциальному выражению

$$A = -\frac{d}{dx}\widetilde{g}(x)\frac{d}{dx} + p(x), \tag{2.1}$$

где $\widetilde{g}(x)$, $p(x)$ – вещественные измеримые функции на оси, удовлетворяющие условиям (1.19) и (1.20). Строго говоря, самосопряженный оператор A порождается замкнутой квадратичной формой

$$a[u,u] = \int\limits_{\mathbb{R}} \left(\widetilde{g}(x)|u'(x)|^2 + p(x)|u(x)|^2\right) dx, \quad u \in H^1(\mathbb{R}). \tag{2.2}$$

Добавлением вещественной постоянной к $p(x)$ можем добиться справедливости равенства

$$\inf \sigma(A) = 0. \tag{2.3}$$

При условии (2.3) существует 1–периодическое (обобщенное) решение $\omega(x)$ уравнения

$$-\left(\widetilde{g}(x)\omega'(x)\right)' + p(x)\omega(x) = 0. \tag{2.4}$$

Иными словами, функция $\omega \in \widetilde{H}^1(0,1)$ удовлетворяет интегральному тождеству

$$\int_0^1 \left(\widetilde{g}(x)\omega'(x)\overline{\eta'(x)} + p(x)\omega(x)\overline{\eta(x)}\right) dx = 0, \quad \eta \in \widetilde{H}^1(0,1).$$

Решение определено с точностью до постоянного множителя. Этот множитель можно фиксировать так, что решение положительно: $\omega(x) > 0$ и выполнено условие нормировки

$$\int_0^1 \omega^2(x)\, dx = 1. \tag{2.5}$$

При этом справедливы соотношения

$$0 < \omega_0 \leqslant \omega(x) \leqslant \omega_1 < \infty \tag{2.6}$$

с некоторыми постоянными ω_0, ω_1. Кроме того, $\omega \in C^\alpha$ с некоторым $\alpha > 0$ и ω является мультипликатором в классе $H^1(\mathbb{R})$ и в классе $\widetilde{H}^1(0,1)$.

Подстановка $u = \omega v$ преобразует форму (2.2) к виду

$$a[u,u] = \int_{\mathbb{R}} \widetilde{g}(x)\omega^2(x)|v'(x)|^2\, dx, \quad v = \omega^{-1}u \in H^1(\mathbb{R}). \tag{2.7}$$

Это означает, что оператор A допускает факторизацию

$$A = -\omega^{-1}\frac{d}{dx} g \frac{d}{dx}\omega^{-1}, \quad g := \widetilde{g}\omega^2. \tag{2.8}$$

Факторизованную запись (2.8) можно принять за исходную. Тогда достаточно предположить, что ω – 1-периодическая измеримая функция, удовлетворяющая условиям (2.5) и (2.6). *Далее будем считать, что оператор A есть самосопряженный оператор в $L_2(\mathbb{R})$, порожденный* *квадратичной формой* (2.7)*, где* $\widetilde{g}(x)$ *и* $\omega(x)$ *являются* 1*-периодическими измеримыми функциями, удовлетворяющими условиям* (1.19)*,* (2.5) *и* (2.6)*.*

Вернуться к представлению (2.1) можно, полагая (см. (2.4)) $p = \omega^{-1}(\widetilde{g}\omega')'$. При этом потенциал $p(x)$ может оказаться сингулярной обобщенной функцией.

Замечание 2.1. *Описанные выше факты, касающиеся свойств периодического решения уравнения* (2.4) *и факторизации оператора* (2.1)*, проверены в* [16] *при* $\widetilde{g}(x) = 1$ *и в* [17, §4] *в общем случае. См. также* [5, гл. 6, §1].

2.2. Спектральные свойства оператора A**.** Опишем спектральные свойства оператора A (мы следуем работам [11], [12], [18], [19], см. также [20]). Определим в $L_2(0,1)$ семейство замкнутых неотрицательных квадратичных форм

$$a(\xi)[u,u] = \int_0^1 g(x)|v'(x)|^2\,dx, \quad v = \omega^{-1}u \in \widetilde{H}^1_\xi(0,1), \quad \xi \in \mathbb{R}.$$

Параметр ξ будем называть *квазиимпульсом*. Форма $a(\xi)$ порождает самосопряженный оператор $A(\xi)$ в $L_2(0,1)$. Спектр оператора $A(\xi)$ дискретен. Обозначим через $E_j(\xi)$ и $\psi_j(\xi,x)$ последовательные собственные значения и ортонормированные собственные функции оператора $A(\xi)$:

$$E_1(\xi) \leqslant E_2(\xi) \leqslant \dots \leqslant E_j(\xi) \leqslant \dots, \quad \sigma(A(\xi)) = \bigl\{E_j(\xi)\bigr\}_{j=1}^\infty.$$

Собственные функции $\psi_j(\xi,\cdot)$ являются обобщенными решениями следующих задач:

$$\begin{aligned} &-\omega(x)^{-1}\frac{d}{dx}g(x)\frac{d}{dx}\omega(x)^{-1}\psi_j(\xi,x) = E_j(\xi)\psi_j(\xi,x), \ \ 0<x<1,\\ &(\omega^{-1}\psi_j)(\xi,1) = e^{i\xi}(\omega^{-1}\psi_j)(\xi,0),\\ &\frac{d}{dx}(\omega^{-1}\psi_j)(\xi,1) = e^{i\xi}\frac{d}{dx}(\omega^{-1}\psi_j)(\xi,0). \end{aligned} \tag{2.9}$$

Функции $E_j(\xi)$, $\xi \in \mathbb{R}$, будем называть *зонными функциями*; зонные функции липшицевы (и даже кусочно аналитичны) и периодичны с периодом 2π. При $\xi \neq 0 \pmod{\pi}$ собственные значения $E_j(\xi)$ являются простыми. Собственные функции $\psi_j(\xi,x)$ можно выбрать (2π)–периодическими по ξ. Мы считаем, что $\psi_j(\xi,x)$ доопределены при всех $x \in \mathbb{R}$ так, что функции $\varphi_j(\xi, x) := e^{-i\xi x}\psi_j(\xi, x)$ являются 1–периодическими по переменной x и $(\omega^{-1}\varphi_j)(\xi, \cdot) \in H^1_{\mathrm{loc}}(\mathbb{R})$.

Введем частично изометрические интегральные операторы

$$X_j \colon L_2(\mathbb{R}) \to L_2(-\pi, \pi)$$

по правилу

$$(X_j u)(\xi) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int\limits_{\mathbb{R}} \overline{\psi_j(\xi, x)} u(x)\, dx, \quad u \in L_2(\mathbb{R}) \cap L_1(\mathbb{R}).$$

Операторы $X_j^* X_j$, $j \in \mathbb{N}$, – ортогональные проекторы на попарно ортогональные подпространства в $L_2(\mathbb{R})$, причем $\sum\limits_{j=1}^{\infty} X_j^* X_j = I$. Для оператора A имеет место *разложение Флоке*

$$A = \sum_{j=1}^{\infty} X_j^* \left[E_j(\cdot)\right] X_j. \tag{2.10}$$

В силу (2.10) спектр оператора A имеет зонную структуру. Именно, справедливо равенство

$$\sigma(A) = \bigcup_{j=1}^{\infty} \left[\nu_j, \mu_j\right], \quad [\nu_j, \mu_j] = E_j([-\pi, \pi]), \quad j \in \mathbb{N}.$$

Отрезки $[\nu_j, \mu_j]$ будем называть *спектральными зонами*. Справедливы равенства $E_A([\nu_j, \mu_j]) = X_j^* X_j$, $j \in \mathbb{N}$. Образ отображения $\xi \to E_j(\xi)$, $\xi \in [-\pi, \pi]$, дважды покрывает зону $[\nu_j, \mu_j]$. Для функций $E_j(\xi)$ точки $\xi = 0, \pi \,(\mathrm{mod}\, 2\pi)$ являются точками экстремумов. При этом для нечетных зон справедливо

$$\nu_j = \min_{0 \leqslant |\xi| \leqslant \pi} E_j(\xi) = E_j(0), \ \ \mu_j = \max_{0 \leqslant |\xi| \leqslant \pi} E_j(\xi) = E_j(\pi), \ \ j = 2n+1, \ n \in \mathbb{Z}_+.$$

Для четных зон выполнены равенства

$$\nu_j = \min_{0 \leqslant |\xi| \leqslant \pi} E_j(\xi) = E_j(\pi), \ \ \mu_j = \max_{0 \leqslant |\xi| \leqslant \pi} E_j(\xi) = E_j(0), \ \ j = 2n, \ \ n \in \mathbb{N}.$$

В одномерном случае спектральные зоны не могут перекрываться. Разделяющие их интервалы

$$(-\infty, \nu_1), \ (\mu_1, \nu_2), \ (\mu_2, \nu_3), \ldots$$

будем называть *спектральными лакунами*. Возможно, однако, пересечение зон по граничным точкам, т. е. некоторые лакуны могут оказаться пустыми. В общем случае открывается бесконечно много лакун. Лакуны вида (μ_{2n}, ν_{2n+1}) называют "периодическими", поскольку собственные функции, отвечающие краям μ_{2n}, ν_{2n+1}, являются периодическими. Условимся считать $\mu_0 = -\infty$. Полубесконечная лакуна $(-\infty, \nu_1) = (\mu_0, \nu_1)$ является периодической. Лакуны вида (μ_{2n-1}, ν_{2n}) называют "антипериодическими", поскольку собственные функции, отвечающие краям μ_{2n-1}, ν_{2n}, являются антипериодическими.

2.3. Спектральные характеристики на правом краю периодической лакуны. Для определенности при некотором $n \in \mathbb{Z}_+$ зафиксируем $(\mu_{2n}, \nu_{2n+1}) \neq \varnothing$ – открытую периодическую лакуну; $[\nu_{2n+1}, \mu_{2n+1}]$ – фиксированная нечетная зона. Введем обозначения:

$$\nu := \nu_{2n+1}; \quad \lambda(\xi) := E_{2n+1}(\xi); \quad \psi(\xi, x) := \psi_{2n+1}(\xi, x),$$
$$\varphi(\xi, x) := \varphi_{2n+1}(\xi, x) = e^{-i\xi x}\psi(\xi, x), \quad \xi \in [-\pi, \pi], \quad x \in \mathbb{R}.$$

Положим

$$\mathcal{H}^1(0,1) := \{f : \omega^{-1} f \in H^1(0,1)\}, \ \widetilde{\mathcal{H}}^1(0,1) := \{f : \omega^{-1} f \in \widetilde{H}^1(0,1)\},$$
$$\|f\|_{\mathcal{H}^1(0,1)} := \|\omega^{-1} f\|_{H^1(0,1)}, \quad f \in \mathcal{H}^1(0,1).$$

Отметим следующие факты. Функцию $\psi(\xi, x)$ можно выбрать (см., например, [11], а также [20] и [21]) измеримой по паре переменных (ξ, x) и вещественно аналитической (по ξ) функцией со значениями в $\mathcal{H}^1(0,1)$ при $|\xi| < \pi$. Тогда функция $\varphi(\xi, x)$ оказывается вещественно аналитической по $\xi \in (-\pi, \pi)$ со значениями в $\widetilde{\mathcal{H}}^1(0,1)$. Функция $\lambda(\xi)$ непрерывна и четна при $|\xi| \leqslant \pi$, при $\xi = 0$ имеет невырожденный минимум; при $0 \leqslant \xi \leqslant \pi$ она строго монотонна. Имеет место представление [20]

$$\lambda(\xi) = \nu + b_\nu \xi^2 + \xi^4 \gamma(\xi), \quad |\xi| \leqslant \pi, \quad b_\nu > 0, \tag{2.11}$$

где функция $\gamma(\xi)$ непрерывна на $[-\pi, \pi]$.

Для функции $\varphi(\xi, x)$ справедливо разложение (см., например, [12])

$$\varphi(\xi, x) = \varphi_0(x) + \xi\varphi_1(x) + \xi^2\theta(\xi, x), \quad \xi \in (-\pi, \pi), \quad x \in \mathbb{R}, \tag{2.12}$$

где $\theta(\xi, \cdot)$ – вещественно аналитическая по $\xi \in (-\pi, \pi)$ функция со значениями в $\widetilde{\mathcal{H}}^1(0,1)$. Можно показать (см. [11], [12]), что функцию $\psi(\xi, x)$ можно выбрать так, чтобы функция $\varphi_0(x) = \varphi(0, x) = \psi(0, x)$ была вещественной, а функция $\varphi_1(x) = \frac{\partial}{\partial\xi}\varphi(0, x)$ принимала чисто мнимые значения. Таким образом, $\varphi_0(x)$ – вещественная функция, удовлетворяющая условию нормировки $\int\limits_0^1 \varphi_0^2(x)\,dx = 1$ и краевой задаче

$$\begin{aligned}&-\omega(x)^{-1}\frac{d}{dx}g(x)\frac{d}{dx}\omega(x)^{-1}\varphi_0(x) = \nu\varphi_0(x), \quad 0 < x < 1,\\ &(\omega^{-1}\varphi_0)(1) = (\omega^{-1}\varphi_0)(0), \quad \frac{d}{dx}(\omega^{-1}\varphi_0)(1) = \frac{d}{dx}(\omega^{-1}\varphi_0)(0).\end{aligned} \tag{2.13}$$

Функция $\varphi_1 \in \widetilde{\mathcal{H}}^1(0,1)$ допускает представление

$$\varphi_1(x) = i\Lambda(x) + i\beta\varphi_0(x), \quad x \in \mathbb{R}. \tag{2.14}$$

Здесь $\beta \in \mathbb{R}$ – некоторая постоянная, Λ – единственное 1-периодическое слабое решение задачи

$$\begin{aligned}-\omega^{-1}\frac{d}{dx}g\frac{d}{dx}\omega^{-1}\Lambda = \nu\Lambda + g\omega^{-1}\frac{d}{dx}(\omega^{-1}\varphi_0) + \omega^{-1}\frac{d}{dx}(g\omega^{-1}\varphi_0),&\\ 0 < x < 1,&\\ \int\limits_0^1 \Lambda(x)\varphi_0(x)\,dx = 0.&\end{aligned} \tag{2.15}$$

Условие разрешимости выполнено. В силу вещественности функции $\varphi_0(x)$ решение $\Lambda(x)$ также оказывается вещественным. Отметим, что функции φ_0, φ_1 и Λ принадлежат классу $\widetilde{\mathcal{H}}^1(0,1)$, а потому ограничены. Мы считаем, что функции φ_0, φ_1 и Λ периодически продолжены на всю ось $\mathbb{R}$.

Далее, из (2.13) видно, что выполнено уравнение $\big(g(\omega^{-1}\varphi_0)'\big)' = -\nu\omega\varphi_0$, а потому производная функции $g(\omega^{-1}\varphi_0)'$ ограничена. Следовательно, эта функция абсолютно непрерывна, откуда следует, что $(\omega^{-1}\varphi_0)' \in L_\infty$. Нам понадобятся также включения $(\omega^{-1}\varphi_1)' \in L_\infty$ и $(\omega^{-1}\Lambda)' \in L_\infty$, которые вытекают из соотношений $\varphi_1(x) = \frac{\partial}{\partial\xi}\varphi(0,x)$ и (2.14) на основании следующей леммы.

Лемма 2.2. *В предположениях пункта* 2.3 *функция* $\frac{d}{dx}\big(\omega^{-1}(x)\varphi(\xi,x)\big)$ *является вещественно аналитической функцией от* $\xi \in (-\pi,\pi)$ *со значениями в* $L_\infty(0,1)$.

Доказательство этого важного утверждения вынесено в приложение (§ 4).

Замечание 2.3. *Как показано в* [15, п. 3.3], *коэффициент* b_ν *из* (2.11) *может быть выражен в терминах решений вспомогательных задач*:

$$b_\nu = \int_0^1 g(x) \left(\left(\frac{\Lambda(x)}{\omega(x)} \right)' \frac{\varphi_0(x)}{\omega(x)} - \left(\frac{\varphi_0(x)}{\omega(x)} \right)' \frac{\Lambda(x)}{\omega(x)} + \frac{\varphi_0^2(x)}{\omega^2(x)} \right) dx. \tag{2.16}$$

Здесь φ_0 *– вещественное нормированное решение задачи* (2.13), *а* Λ *–* 1*-периодическое решение задачи* (2.15).

2.4. Основные результаты для правого края периодической лакуны. В $L_2(\mathbb{R})$ рассмотрим оператор A_ε, формально заданный выражением

$$A_\varepsilon = -(\omega^\varepsilon)^{-1} \frac{d}{dx} g^\varepsilon \frac{d}{dx} (\omega^\varepsilon)^{-1}, \quad g := \widetilde{g}\omega^2. \tag{2.17}$$

Строго говоря, оператор A_ε есть самосопряженный оператор в $L_2(\mathbb{R})$, порожденный квадратичной формой

$$a_\varepsilon[u,u] = \int_{\mathbb{R}} g^\varepsilon(x) |v'(x)|^2 dx, \quad v = (\omega^\varepsilon)^{-1} u \in H^1(\mathbb{R}), \tag{2.18}$$

где $g = \widetilde{g}\omega^2$, а $\widetilde{g}(x)$ и $\omega(x)$ являются 1-периодическими измеримыми функциями, удовлетворяющими условиям (1.19), (2.5) и (2.6). Область определения формы (2.18)

$$\mathcal{H}^1_\varepsilon(\mathbb{R}) := \{ u \in L_2(\mathbb{R}) : (\omega^\varepsilon)^{-1} u \in H^1(\mathbb{R}) \}$$

назовем *энергетическим пространством*; это гильбертово пространство относительно нормы $\|u\|_{\mathcal{H}^1_\varepsilon(\mathbb{R})} = \|(\omega^\varepsilon)^{-1} u\|_{H^1(\mathbb{R})}$.

Напомним, что оператор вида (1.18), где $p(x)$ и $\widetilde{g}(x)$ – вещественные функции, подчиненные условиям (1.19) и (1.20), при условии (2.3) допускает запись в виде (2.17).

Пусть $\nu_{2n+1} = \nu$ – правый край периодической лакуны в спектре оператора A, порожденного формой (2.7). Фиксируем число $\varkappa > 0$ такое, что $\nu - \varkappa^2 > \mu_{2n}$. Тогда для оператора A_ε точка $\varepsilon^{-2}\nu - \varkappa^2$ заведомо принадлежит лакуне $(\varepsilon^{-2}\mu_{2n}, \varepsilon^{-2}\nu)$, если $0 < \varepsilon \leqslant 1$. Наша цель – найти аппроксимацию резольвенты $(A_\varepsilon - (\varepsilon^{-2}\nu - \varkappa^2)I)^{-1}$ при малом ε.

В $L_2(\mathbb{R})$ введем самосопряженный оператор

$$A^0_\nu := -b_\nu \frac{d^2}{dx^2}, \quad \operatorname{Dom} A^0_\nu = H^2(\mathbb{R}), \tag{2.19}$$

где $b_\nu > 0$ – коэффициент при ξ^2 в разложении (2.11); b_ν определено в (2.16). Оператор (2.19) называется *эффективным оператором на краю лакуны* ν. Введем еще операторы

$$\begin{aligned} K_\nu^{(1)}(\varepsilon) &:= [\Lambda^\varepsilon]\frac{d}{dx}(A_\nu^0 + \varkappa^2 I)^{-1}[\varphi_0^\varepsilon], \\ K_\nu(\varepsilon) &:= K_\nu^{(1)}(\varepsilon) + (K_\nu^{(1)}(\varepsilon))^* \\ &= [\Lambda^\varepsilon]\frac{d}{dx}(A_\nu^0 + \varkappa^2 I)^{-1}[\varphi_0^\varepsilon] - [\varphi_0^\varepsilon](A_\nu^0 + \varkappa^2 I)^{-1}\frac{d}{dx}[\Lambda^\varepsilon], \end{aligned} \tag{2.20}$$

где φ_0 – вещественное нормированное решение задачи (2.13), а Λ – 1-периодическое решение задачи (2.15). Оператор $K_\nu(\varepsilon)$ назовем *корректором*. Следующее утверждение показывает, что корректор является непрерывным оператором из $L_2(\mathbb{R})$ в "энергетическое" пространство $\mathcal{H}^1_\varepsilon(\mathbb{R})$.

Предложение 2.4. *При* $0 < \varepsilon \leqslant 1$ *выполнены оценки*

$$\|K_\nu(\varepsilon)\|_{L_2(\mathbb{R})\to L_2(\mathbb{R})} \leqslant \mathfrak{C}_1, \tag{2.21}$$

$$\left\|\frac{d}{dx}[(\omega^\varepsilon)^{-1}]K_\nu(\varepsilon)\right\|_{L_2(\mathbb{R})\to L_2(\mathbb{R})} \leqslant \mathfrak{C}_2\varepsilon^{-1} + \mathfrak{C}_3. \tag{2.22}$$

Постоянные $\mathfrak{C}_1, \mathfrak{C}_2, \mathfrak{C}_3$ *определены ниже*; $\mathfrak{C}_1$ *зависит от* $\varkappa, b_\nu, \|\varphi_0\|_{L_\infty}$, $\|\Lambda\|_{L_\infty}$; $\mathfrak{C}_2$ *зависит от* $\varkappa$, b_ν, $\|\varphi_0\|_{L_\infty}$, $\|\Lambda\|_{L_\infty}$, $\|(\omega^{-1}\varphi_0)'\|_{L_\infty}$, $\|(\omega^{-1}\Lambda)'\|_{L_\infty}$; $\mathfrak{C}_3$ *зависит от* b_ν, $\|\omega^{-1}\|_{L_\infty}$, $\|\varphi_0\|_{L_\infty}$ *и* $\|\Lambda\|_{L_\infty}$.

Доказательство. Оценка (2.21) вытекает из следущих очевидных соотношений:

$$\begin{aligned} &\|K_\nu(\varepsilon)\|_{L_2\to L_2} \leqslant 2\|K_\nu^{(1)}(\varepsilon)\|_{L_2\to L_2} \\ &\leqslant 2\|\Lambda\|_{L_\infty}\|\varphi_0\|_{L_\infty}\left\|\frac{d}{dx}(A_\nu^0 + \varkappa^2 I)^{-1}\right\|_{L_2\to L_2} \\ &= 2\|\Lambda\|_{L_\infty}\|\varphi_0\|_{L_\infty}\sup_{\xi\in\mathbb{R}}\frac{|\xi|}{b_\nu\xi^2+\varkappa^2} \leqslant 2\|\Lambda\|_{L_\infty}\|\varphi_0\|_{L_\infty} b_\nu^{-1/2}\varkappa^{-1} =: \mathfrak{C}_1. \end{aligned}$$

Далее, имеем

$$\begin{aligned} \frac{d}{dx}[(\omega^\varepsilon)^{-1}]K_\nu^{(1)}(\varepsilon) = \varepsilon^{-1}\left(\frac{d}{dx}(\omega^{-1}\Lambda)\right)^\varepsilon \frac{d}{dx}(A_\nu^0 + \varkappa^2 I)^{-1}[\varphi_0^\varepsilon] \\ + [(\omega^\varepsilon)^{-1}\Lambda^\varepsilon]\frac{d^2}{dx^2}(A_\nu^0 + \varkappa^2 I)^{-1}[\varphi_0^\varepsilon]. \end{aligned}$$

Следовательно,

$$\left\| \frac{d}{dx}[(\omega^\varepsilon)^{-1}] K_\nu^{(1)}(\varepsilon) \right\|_{L_2\to L_2} \leqslant \varepsilon^{-1} \|(\omega^{-1}\Lambda)'\|_{L_\infty} \|\varphi_0\|_{L_\infty} \sup_{\xi\in\mathbb{R}} \frac{|\xi|}{b_\nu \xi^2 + \varkappa^2}$$
$$+ \|\omega^{-1}\|_{L_\infty} \|\Lambda\|_{L_\infty} \|\varphi_0\|_{L_\infty} \sup_{\xi\in\mathbb{R}} \frac{\xi^2}{b_\nu\xi^2+\varkappa^2} \leqslant \mathfrak{C}_2' \varepsilon^{-1} + \widetilde{\mathfrak{C}}_3, \quad (2.23)$$

где

$$\mathfrak{C}_2' = \|(\omega^{-1}\Lambda)'\|_{L_\infty} \|\varphi_0\|_{L_\infty} b_\nu^{-1/2} \varkappa^{-1}$$

и

$$\widetilde{\mathfrak{C}}_3 = \|\omega^{-1}\|_{L_\infty} \|\Lambda\|_{L_\infty} \|\varphi_0\|_{L_\infty} b_\nu^{-1}.$$

Аналогично получаем

$$\left\| \frac{d}{dx}[(\omega^\varepsilon)^{-1}] (K_\nu^{(1)}(\varepsilon))^* \right\|_{L_2\to L_2} \leqslant \varepsilon^{-1} \|(\omega^{-1}\varphi_0)'\|_{L_\infty} \|\Lambda\|_{L_\infty} \sup_{\xi\in\mathbb{R}} \frac{|\xi|}{b_\nu \xi^2 + \varkappa^2}$$
$$+ \|\omega^{-1}\|_{L_\infty} \|\Lambda\|_{L_\infty} \|\varphi_0\|_{L_\infty} \sup_{\xi\in\mathbb{R}} \frac{\xi^2}{b_\nu\xi^2+\varkappa^2} \leqslant \mathfrak{C}_2'' \varepsilon^{-1} + \widetilde{\mathfrak{C}}_3, \quad (2.24)$$

где $\mathfrak{C}_2'' = \|(\omega^{-1}\varphi_0)'\|_{L_\infty} \|\Lambda\|_{L_\infty} b_\nu^{-1/2}\varkappa^{-1}$. Из (2.23) и (2.24) вытекает искомая оценка (2.22) с постоянными $\mathfrak{C}_2 = \mathfrak{C}_2' + \mathfrak{C}_2''$, $\mathfrak{C}_3 = 2\widetilde{\mathfrak{C}}_3$. $\square$

Напомним результат [11, 12] об аппроксимации резольвенты $\big(A_\varepsilon - (\varepsilon^{-2}\nu - \varkappa^2)I\big)^{-1}$ по операторной норме в $L_2(\mathbb{R})$.

Теорема 2.5 ([11, 12]). *Пусть A_ε – самосопряженный оператор в $L_2(\mathbb{R})$, порожденный формой* (2.18). *Пусть выполнены предположения пунктов* 2.3, 2.4. *Пусть $\nu_{2n+1} = \nu$ – правый край периодической лакуны в спектре оператора A. Пусть A_ν^0 – эффективный оператор* (2.19) *на краю лакуны ν, а φ_0 – вещественное нормированное решение задачи* (2.13). *Тогда справедлива оценка*

$$\left\| \big(A_\varepsilon - (\varepsilon^{-2}\nu - \varkappa^2)I\big)^{-1} - [\varphi_0^\varepsilon] \big(A_\nu^0 + \varkappa^2 I\big)^{-1} [\varphi_0^\varepsilon] \right\|_{L_2(\mathbb{R})\to L_2(\mathbb{R})} \leqslant C^\circ \varepsilon,$$
$$0 < \varepsilon \leqslant 1. \quad (2.25)$$

Постоянная C° зависит от $\varkappa$, μ_{2n}, $\nu = \nu_{2n+1}$, ν_{2n+2}, b_ν, $\|\gamma\|_{L_\infty}$, $\|\varphi_0\|_{L_\infty}$, $\|\varphi_1\|_{L_\infty}$, $\|\theta\|_M$, где

$$\|\theta\|_M := \operatorname*{ess\text{-}sup}_{x\in\mathbb{R}} \|\theta(\cdot,x)\|_{C^1([-3\pi/4,3\pi/4])}\,.$$

Основной результат работы в случае правого края периодической лакуны представляет следующая теорема.

Теорема 2.6. *Пусть выполнены условия теоремы* 2.5. *Тогда при* $0 < \varepsilon \leqslant 1$ *справедлива оценка*

$$\Big\|(\omega^\varepsilon)^{-1}\Big(\big(A_\varepsilon - (\varepsilon^{-2}\nu - \varkappa^2)I\big)^{-1} - \big[\varphi_0^\varepsilon\big]\big(A_\nu^0 + \varkappa^2 I\big)^{-1}\big[\varphi_0^\varepsilon\big] \\ - \varepsilon K_\nu(\varepsilon)\Big)\Big\|_{L_2(\mathbb{R})\to H^1(\mathbb{R})} \leqslant C\varepsilon. \quad (2.26)$$

Здесь корректор $K_\nu(\varepsilon)$ *определен в* (2.20). *Постоянная* C *зависит от* $\varkappa$, μ_{2n}, $\nu = \nu_{2n+1}$, μ_{2n+1}, ν_{2n+2}, b_ν, $\|\gamma\|_{L_\infty}$, $\|g\|_{L_\infty}$, $\|g^{-1}\|_{L_\infty}$, $\|\omega^{-1}\|_{L_\infty}$, $\|\varphi_0\|_{L_\infty}$, $\|\varphi_1\|_{L_\infty}$, $\|(\omega^{-1}\varphi_0)'\|_{L_\infty}$, $\|(\omega^{-1}\varphi_1)'\|_{L_\infty}$, $\|\theta\|_M$, $\|\frac{d}{dx}(\omega^{-1}\theta)\|_M$.

Замечание 2.7. 1) *В случае внутренней лакуны корректор* $K_\nu(\varepsilon)$ *в аппроксимации резольвенты по энергетической норме* (*оценка* (2.26)) *совпадает с корректором в аппроксимации резольвенты по операторной норме в* $L_2(\mathbb{R})$ *с погрешностью* $O(\varepsilon^2)$ (*оценка* (1.16)). 2) *Полубесконечная лакуна* $(-\infty, 0)$ *является периодической. В этом случае* $\nu = \nu_1 = 0$ *и* $\varphi_0(x) = \omega(x)$. *Тогда в оценке* (2.26) *в пределах допустимой погрешности можно отбросить второй член корректора и заменить* $K_\nu(\varepsilon)$ *на* $K_\nu^{(1)}(\varepsilon)$. *Действительно, в рассматриваемом случае оценка* (2.24) *дает* $\Big\|\frac{d}{dx}[(\omega^\varepsilon)^{-1}](K_\nu^{(1)}(\varepsilon))^*\Big\|_{L_2\to L_2} \leqslant \widetilde{C}_3$. *Это согласуется с известным результатом об аппроксимации в энергетической норме для резольвенты на нижнем краю спектра*; *см. оценку* (1.14).

2.5. Случай левого края периодической лакуны. Для определенности при некотором $n \in \mathbb{N}$ зафиксируем $(\mu_{2n}, \nu_{2n+1}) \neq \varnothing$ – открытую периодическую лакуну; $[\nu_{2n}, \mu_{2n}]$ – фиксированная четная зона. Введем обозначения:

$$\mu := \mu_{2n}; \quad \lambda(\xi) := E_{2n}(\xi); \quad \psi(\xi, x) := \psi_{2n}(\xi, x), \\ \varphi(\xi, x) := \varphi_{2n}(\xi, x) = e^{-i\xi x}\psi(\xi, x), \quad \xi \in [-\pi, \pi], \quad x \in \mathbb{R}.$$

Как и прежде, можно выбрать функции $\psi(\xi, x)$ и $\varphi(\xi, x)$ при $|\xi| < \pi$ вещественно аналитическими со значениями в $\mathcal{H}^1(0,1)$ и в $\widetilde{\mathcal{H}}^1(0,1)$ соответственно. Функция $\lambda(\xi)$ непрерывна и четна при $|\xi| \leqslant \pi$, при $\xi = 0$ имеет невырожденный максимум; при $0 \leqslant \xi \leqslant \pi$ она строго монотонна. Имеет место представление

$$\lambda(\xi) = \mu - b_\mu \xi^2 + \xi^4 \gamma(\xi), \quad |\xi| \leqslant \pi, \quad b_\mu > 0, \quad (2.27)$$

где функция $\gamma(\xi)$ непрерывна на $[-\pi,\pi]$.

Для функции $\varphi(\xi,x)$ справедливо разложение вида (2.12), где $\theta(\xi,\cdot)$ – вещественно аналитическая по $\xi\in(-\pi,\pi)$ функция со значениями в $\widetilde{\mathcal{H}}^1(0,1)$. Функция $\varphi_0(x)$ – нормированное вещественное решение краевой задачи вида (2.13) с заменой ν на μ. Функция $\varphi_1(x)$ допускает представление (2.14), где Λ – 1-периодическое решение задачи вида (2.15) с заменой ν на μ.

Фиксируем число $\varkappa>0$ такое, что $\mu+\varkappa^2<\nu_{2n+1}$. Тогда для оператора A_ε точка $\varepsilon^{-2}\mu+\varkappa^2$ заведомо принадлежит лакуне $(\varepsilon^{-2}\mu,\varepsilon^{-2}\nu_{2n+1})$, если $0<\varepsilon\leqslant 1$. Мы находим аппроксимацию при малом ε для резольвенты $(A_\varepsilon-(\varepsilon^{-2}\mu+\varkappa^2)I)^{-1}$.

По аналогии с (2.19), (2.20) введем эффективный оператор и корректор на краю лакуны μ:

$$A_\mu^0:=-b_\mu\frac{d^2}{dx^2},\quad \operatorname{Dom}A_\mu^0=H^2(\mathbb{R}), \tag{2.28}$$

$$K_\mu(\varepsilon):=[\Lambda^\varepsilon]\frac{d}{dx}\left(A_\mu^0+\varkappa^2 I\right)^{-1}[\varphi_0^\varepsilon]-[\varphi_0^\varepsilon]\left(A_\mu^0+\varkappa^2 I\right)^{-1}\frac{d}{dx}[\Lambda^\varepsilon]. \tag{2.29}$$

Здесь $b_\mu>0$ – коэффициент при ξ^2 в разложении (2.27); для b_μ справедлив полный аналог представления (2.16); φ_0 – нормированное вещественное решение задачи вида (2.13) с заменой ν на μ; Λ – 1-периодическое решение задачи вида (2.15) с заменой ν на μ.

Как показано в [11, 12], аналогом оценки (2.25) на левом краю лакуны служит оценка

$$\left\|\left(A_\varepsilon-(\varepsilon^{-2}\mu+\varkappa^2)I\right)^{-1}+[\varphi_0^\varepsilon]\left(A_\mu^0+\varkappa^2 I\right)^{-1}[\varphi_0^\varepsilon]\right\|_{L_2(\mathbb{R})\to L_2(\mathbb{R})}\leqslant C^\circ\varepsilon,\quad 0<\varepsilon\leqslant 1. \tag{2.30}$$

Основной результат работы в случае левого края периодической лакуны представляет следующая теорема.

Теорема 2.8. *Пусть A_ε – самосопряженный оператор в $L_2(\mathbb{R})$, порожденный формой* (2.18). *Пусть выполнены предположения пункта* 2.5. *Пусть $\mu_{2n}=\mu$ – левый край периодической лакуны в спектре оператора A. Пусть A_μ^0 – эффективный оператор* (2.28) *на краю лакуны μ, а φ_0 – вещественное нормированное решение задачи вида* (2.13) *с заменой ν на μ. Тогда при $0 < \varepsilon \leqslant 1$ справедлива оценка*

$$\Big\|(\omega^\varepsilon)^{-1}\Big(\left(A_\varepsilon - (\varepsilon^{-2}\mu + \varkappa^2)I\right)^{-1} + [\varphi_0^\varepsilon]\left(A_\mu^0 + \varkappa^2 I\right)^{-1}[\varphi_0^\varepsilon] + \varepsilon K_\mu(\varepsilon)\Big)\Big\|_{L_2(\mathbb{R})\to H^1(\mathbb{R})} \leqslant C\varepsilon.$$

Здесь корректор $K_\mu(\varepsilon)$ определен в (2.29). Постоянная C зависит от $\varkappa$, μ_{2n-1}, $\mu = \mu_{2n}$, ν_{2n+1}, b_μ, $\|\gamma\|_{L_\infty}$, $\|g\|_{L_\infty}$, $\|g^{-1}\|_{L_\infty}$, $\|\omega^{-1}\|_{L_\infty}$, $\|\varphi_0\|_{L_\infty}$, $\|\varphi_1\|_{L_\infty}$, $\|(\omega^{-1}\varphi_0)'\|_{L_\infty}$, $\|(\omega^{-1}\varphi_1)'\|_{L_\infty}$, $\|\theta\|_M$, $\|\frac{d}{dx}(\omega^{-1}\theta)\|_M$.

2.6. Случай правого края антипериодической лакуны. Для определенности при некотором $n \in \mathbb{N}$ фиксируем $(\mu_{2n-1}, \nu_{2n}) \neq \varnothing$ – открытую антипериодическую лакуну в спектре оператора A; $[\nu_{2n}, \mu_{2n}]$ – фиксированная четная зона. Введем обозначения:

$$\nu := \nu_{2n}; \quad \lambda(\xi) := E_{2n}(\xi), \quad \psi(\xi, x) := \psi_{2n}(\xi, x),$$
$$\varphi(\xi, x) := \varphi_{2n}(\xi, x) = e^{-i\xi x}\psi(\xi, x), \quad \xi \in [0, 2\pi], \quad x \in \mathbb{R}.$$

Аналогично (2.11) и (2.12) справедливы представления

$$\lambda(\xi) = \nu + b_\nu(\xi - \pi)^2 + (\xi - \pi)^4\gamma(\xi), \quad \xi \in [0, 2\pi], \quad b_\nu > 0; \tag{2.31}$$
$$\varphi(\xi, x) = \varphi_0(x) + (\xi - \pi)\varphi_1(x) + (\xi - \pi)^2\theta(\xi, x), \ \xi \in (0, 2\pi), \ x \in \mathbb{R}. \tag{2.32}$$

Здесь функция $\gamma(\xi)$ непрерывна на $[0, 2\pi]$; $\theta(\xi, \cdot)$ – вещественно аналитическая по $\xi \in (0, 2\pi)$ функция со значениями в $\widetilde{\mathcal{H}}^1(0, 1)$. Функция $\psi_0(x) := e^{i\pi x}\varphi_0(x)$ является обобщенным решением краевой задачи

$$\begin{aligned} &-\omega(x)^{-1}\frac{d}{dx}g(x)\frac{d}{dx}\omega(x)^{-1}\psi_0(x) = \nu\psi_0(x), \quad 0 < x < 1, \\ &(\omega^{-1}\psi_0)(1) = -(\omega^{-1}\psi_0)(0), \quad \frac{d}{dx}(\omega^{-1}\psi_0)(1) = -\frac{d}{dx}(\omega^{-1}\psi_0)(0). \end{aligned} \tag{2.33}$$

Известно (см. [11], [12]), что функцию $\psi(\xi, x)$ можно выбрать так, чтобы $\psi_0(x)$ была вещественной и удовлетворяла условию нормировки $\int_0^1 \psi_0^2(x)\,dx = 1$. При этом функция $\psi_1(x) := e^{i\pi x}\varphi_1(x)$, $x \in \mathbb{R}$, допускает представление

$$\psi_1(x) = i\Lambda(x) + i\beta\psi_0(x), \quad x \in \mathbb{R}, \tag{2.34}$$

при некотором $\beta \in \mathbb{R}$. Здесь Λ – единственное антипериодическое решение задачи

$$
\begin{gathered}
-\omega^{-1}\frac{d}{dx}g\frac{d}{dx}\omega^{-1}\Lambda = \nu\Lambda + g\omega^{-1}\frac{d}{dx}(\omega^{-1}\psi_0) + \omega^{-1}\frac{d}{dx}(g\omega^{-1}\psi_0), \\
0 < x < 1, \\
\int_0^1 \Lambda(x)\psi_0(x)\,dx = 0.
\end{gathered}
\tag{2.35}
$$

В силу вещественности функции $\psi_0(x)$ решение $\Lambda(x)$ также оказывается вещественным. Мы считаем, что функция $\Lambda(x)$ продолжена на всю ось $\mathbb{R}$ так, чтобы $e^{-i\pi x}\Lambda(x)$ была 1-периодической.

Фиксируем число $\varkappa > 0$ такое, что $\nu - \varkappa^2 > \mu_{2n-1}$. Тогда для оператора A_ε точка $\varepsilon^{-2}\nu - \varkappa^2$ заведомо принадлежит лакуне $(\varepsilon^{-2}\mu_{2n-1}, \varepsilon^{-2}\nu)$, если $0 < \varepsilon \leqslant 1$. Мы находим аппроксимацию резольвенты $(A_\varepsilon - (\varepsilon^{-2}\nu - \varkappa^2)I)^{-1}$ при малом ε.

В $L_2(\mathbb{R})$ введем эффективный оператор

$$
A^0_\nu := -b_\nu \frac{d^2}{dx^2}, \quad \operatorname{Dom} A^0_\nu = H^2(\mathbb{R}), \tag{2.36}
$$

и корректор

$$
K_\nu(\varepsilon) := [\Lambda^\varepsilon]\frac{d}{dx}\left(A^0_\nu + \varkappa^2 I\right)^{-1}[\psi^\varepsilon_0] - [\psi^\varepsilon_0]\left(A^0_\nu + \varkappa^2 I\right)^{-1}\frac{d}{dx}[\Lambda^\varepsilon]. \tag{2.37}
$$

Здесь $b_\nu > 0$ – коэффициент при $(\xi - \pi)^2$ в разложении (2.31); для b_ν справедливо представление вида (2.16) с заменой φ_0 на ψ_0; ψ_0 – вещественное нормированное решение задачи (2.33); Λ – антипериодическое решение задачи (2.35).

Как показано в [11, 12], в случае правого края антипериодической лакуны справедлива оценка вида (2.25) с заменой φ_0 на ψ_0.

Сформулируем наш основной результат в случае правого края антипериодической лакуны.

Теорема 2.9. *Пусть A_ε – самосопряженный оператор в $L_2(\mathbb{R})$, порожденный формой* (2.18). *Пусть выполнены предположения пункта* 2.6. *Пусть $\nu_{2n} = \nu$ – правый край антипериодической лакуны в спектре оператора A. Пусть A^0_ν – эффективный оператор* (2.36) *на* *краю лакуны ν, а ψ_0 – вещественное нормированное решение задачи (2.33). Тогда при $0<\varepsilon\leqslant 1$ справедлива оценка*

$$\Big\|(\omega^\varepsilon)^{-1}\Big(\left(A_\varepsilon-(\varepsilon^{-2}\nu-\varkappa^2)I\right)^{-1} \\ -[\psi_0^\varepsilon]\left(A_\nu^0+\varkappa^2 I\right)^{-1}[\psi_0^\varepsilon]-\varepsilon K_\nu(\varepsilon)\Big)\Big\|_{L_2(\mathbb{R})\to H^1(\mathbb{R})}\leqslant C\varepsilon.$$

Здесь корректор $K_\nu(\varepsilon)$ определен в (2.37). Постоянная C зависит от $\varkappa$, μ_{2n-1}, $\nu=\nu_{2n}$, μ_{2n}, ν_{2n+1}, b_ν, $\|\gamma\|_{L_\infty}$, $\|g\|_{L_\infty}$, $\|g^{-1}\|_{L_\infty}$, $\|\omega^{-1}\|_{L_\infty}$, $\|\varphi_0\|_{L_\infty}$, $\|\varphi_1\|_{L_\infty}$, $\|(\omega^{-1}\varphi_0)'\|_{L_\infty}$, $\|(\omega^{-1}\varphi_1)'\|_{L_\infty}$, $\|\theta\|_M$, $\|\frac{d}{dx}(\omega^{-1}\theta)\|_M$. Здесь норма $\|\cdot\|_M$ определяется равенством

$$\|\theta\|_M:=\operatorname*{ess\text{-}sup}_{x\in\mathbb{R}}\|\theta(\cdot,x)\|_{C^1([\pi/4,7\pi/4])}\,.$$

2.7. Случай левого края антипериодической лакуны. Для определенности при некотором $n\in\mathbb{N}$ фиксируем $(\mu_{2n-1},\nu_{2n})\neq\varnothing$ – открытую антипериодическую лакуну в спектре оператора A; $[\nu_{2n-1},\mu_{2n-1}]$ – фиксированная нечетная зона. Введем обозначения:

$$\mu:=\mu_{2n-1};\quad \lambda(\xi):=E_{2n-1}(\xi),\quad \psi(\xi,x):=\psi_{2n-1}(\xi,x), \\ \varphi(\xi,x):=\varphi_{2n-1}(\xi,x)=e^{-i\xi x}\psi(\xi,x),\quad \xi\in[0,2\pi],\quad x\in\mathbb{R}.$$

Аналогично (2.31) справедливо представление

$$\lambda(\xi)=\mu-b_\mu(\xi-\pi)^2+(\xi-\pi)^4\gamma(\xi),\quad \xi\in[0,2\pi],\quad b_\mu>0. \tag{2.38}$$

Здесь функция $\gamma(\xi)$ непрерывна на $[0,2\pi]$.

Для функции $\varphi(\xi,x)$ справедливо разложение вида (2.32), где $\theta(\xi,\cdot)$ – вещественно аналитическая по $\xi\in(0,2\pi)$ функция со значениями в $\widetilde{\mathcal{H}}^1(0,1)$. Функция $\psi_0(x):=e^{i\pi x}\varphi_0(x)$ – нормированное вещественное решение краевой задачи вида (2.33) с заменой ν на μ. Функция $\psi_1(x):=e^{i\pi x}\varphi_1(x)$ допускает представление (2.34), где Λ – решение задачи вида (2.35) с заменой ν на μ.

Фиксируем число $\varkappa>0$ такое, что $\mu+\varkappa^2<\nu_{2n}$. Тогда для оператора A_ε точка $\varepsilon^{-2}\mu+\varkappa^2$ заведомо принадлежит лакуне $(\varepsilon^{-2}\mu,\varepsilon^{-2}\nu_{2n})$, если $0<\varepsilon\leqslant 1$. Мы находим аппроксимацию резольвенты

$$(A_\varepsilon-(\varepsilon^{-2}\mu+\varkappa^2)I)^{-1}\ \text{при малом } \varepsilon.$$

В $L_2(\mathbb{R})$ введем эффективный оператор

$$A_\mu^0:=-b_\mu\frac{d^2}{dx^2},\quad \operatorname{Dom}A_\mu^0=H^2(\mathbb{R}), \tag{2.39}$$

и корректор

$$K_\mu(\varepsilon) := [\Lambda^\varepsilon]\frac{d}{dx}(A^0_\mu + \varkappa^2 I)^{-1}[\psi^\varepsilon_0] - [\psi^\varepsilon_0](A^0_\mu + \varkappa^2 I)^{-1}\frac{d}{dx}[\Lambda^\varepsilon]. \qquad (2.40)$$

Здесь $b_\mu > 0$ – коэффициент при $(\xi - \pi)^2$ в разложении (2.38); для b_μ справедливо представление вида (2.16) с заменой φ_0 на ψ_0; ψ_0 – вещественное нормированное решение задачи вида (2.33) с заменой ν на μ; Λ – антипериодическое решение задачи вида (2.35) с заменой ν на μ.

Согласно [11, 12], в случае левого края антипериодической лакуны справедлива оценка вида (2.30) с заменой φ_0 на ψ_0.

Сформулируем наш основной результат в случае левого края антипериодической лакуны.

Теорема 2.10. *Пусть A_ε – самосопряженный оператор в $L_2(\mathbb{R})$, порожденный формой* (2.18). *Пусть выполнены предположения пункта* 2.7. *Пусть $\mu_{2n-1} = \mu$ – левый край антипериодической лакуны в спектре оператора A. Пусть A^0_μ – эффективный оператор* (2.39) *на краю лакуны μ, а ψ_0 – вещественное нормированное решение задачи вида* (2.33) *с заменой ν на μ. Тогда при $0 < \varepsilon \leqslant 1$ справедлива оценка*

$$\Big\|(\omega^\varepsilon)^{-1}\Big(\big(A_\varepsilon - (\varepsilon^{-2}\mu + \varkappa^2)I\big)^{-1} + [\psi^\varepsilon_0]\big(A^0_\nu + \varkappa^2 I\big)^{-1}[\psi^\varepsilon_0] + \varepsilon K_\mu(\varepsilon)\Big)\Big\|_{L_2(\mathbb{R})\to H^1(\mathbb{R})} \leqslant C\varepsilon.$$

Здесь корректор $K_\mu(\varepsilon)$ определен в (2.40). *Постоянная C зависит от $\varkappa$, μ_{2n-2}, $\mu = \mu_{2n-1}$, ν_{2n}, b_μ, $\|\gamma\|_{L_\infty}$, $\|g\|_{L_\infty}$, $\|g^{-1}\|_{L_\infty}$, $\|\omega^{-1}\|_{L_\infty}$, $\|\varphi_0\|_{L_\infty}$, $\|\varphi_1\|_{L_\infty}$, $\|(\omega^{-1}\varphi_0)'\|_{L_\infty}$, $\|(\omega^{-1}\varphi_1)'\|_{L_\infty}$, $\|\theta\|_M$, $\|\frac{d}{dx}(\omega^{-1}\theta)\|_M$.*

§3. Доказательство основных результатов

Приведем доказательство основного результата для случая правого края периодической лакуны (теорема 2.6). Ниже мы следуем обозначениям, введенным в пунктах 2.2–2.4.

3.1. Приближение резольвенты $(A - (\nu - \varkappa^2\varepsilon^2)I)^{-1}$**.** На протяжении пунктов 3.1, 3.2 предполагаются выполненными условия теоремы 2.6. Мы выводим теорему 2.6 с помощью масштабного преобразования из следующего ключевого результата.

Теорема 3.1. *При* $0 < \varepsilon \leqslant 1$ *выполнена оценка*

$$\Big\| A^{1/2}\Big(\big(A - (\nu - \varkappa^2\varepsilon^2)I\big)^{-1} \\ - [\varphi_0]\left(A^0_\nu + \varkappa^2 I\right)^{-1}[\varphi_0] - \Sigma(\varepsilon)\Big)\Big\|_{L_2(\mathbb{R})\to L_2(\mathbb{R})} \leqslant C_0. \quad (3.1)$$

Здесь

$$\Sigma(\varepsilon) := [\Lambda]\frac{d}{dx}\left(A^0_\nu + \varkappa^2\varepsilon^2 I\right)^{-1}[\varphi_0] - [\varphi_0]\left(A^0_\nu + \varkappa^2\varepsilon^2 I\right)^{-1}\frac{d}{dx}[\Lambda]. \quad (3.2)$$

Постоянная C_0 *зависит от* $\varkappa$, μ_{2n}, $\nu = \nu_{2n+1}$, μ_{2n+1}, ν_{2n+2}, b_ν, $\|\gamma\|_{L_\infty}$, $\|g\|_{L_\infty}$, $\|\omega^{-1}\|_{L_\infty}$, $\|\varphi_0\|_{L_\infty}$, $\|\varphi_1\|_{L_\infty}$, $\|(\omega^{-1}\varphi_0)'\|_{L_\infty}$, $\|(\omega^{-1}\varphi_1)'\|_{L_\infty}$, $\|\theta\|_M$, $\|\frac{d}{dx}(\omega^{-1}\theta)\|_M$.

Доказательство этой теоремы удобно разбить на несколько вспомогательных утверждений.

Обозначим оператор X_{2n+1} через X; через $\chi_\sigma(\xi)$ обозначим характеристическую функцию отрезка $[-\sigma,\sigma]$, $\sigma \in (0,\pi]$; через X_σ обозначим оператор $[\chi_\sigma]X$, действующий из $L_2(\mathbb{R})$ в $L_2(-\pi,\pi)$.

Лемма 3.2. *При* $\sigma \in (0,\pi]$ *и* $0 < \varepsilon \leqslant 1$ *выполнена оценка*

$$\Big\| A^{1/2}\Big(\big(A - (\nu - \varkappa^2\varepsilon^2)I\big)^{-1} \\ - X^*_\sigma\left[(\lambda(\xi) - \nu + \varkappa^2\varepsilon^2)^{-1}\right]X_\sigma\Big)\Big\|_{L_2(\mathbb{R})\to L_2(\mathbb{R})} \leqslant C_1. \quad (3.3)$$

Постоянная C_1 *зависит от* σ, $\varkappa$, μ_{2n}, $\nu = \nu_{2n+1}$, μ_{2n+1}, ν_{2n+2}.

Доказательство. В силу представления (2.10) справедливо равенство

$$\begin{aligned} A^{1/2}\left(A - (\nu - \varkappa^2\varepsilon^2)I\right)^{-1} &= A^{1/2}X^*_\sigma\left[(\lambda(\xi) - \nu + \varkappa^2\varepsilon^2)^{-1}\right]X_\sigma \\ &+ X^*\Big[\lambda(\xi)^{1/2}(\lambda(\xi) - \nu + \varkappa^2\varepsilon^2)^{-1}(1 - \chi_\sigma(\xi))\Big]X \\ &+ A^{1/2}\left(A - (\nu - \varkappa^2\varepsilon^2)I\right)^{-1}E_A([0,\mu_{2n}] \cup [\nu_{2n+2},\infty)). \end{aligned} \quad (3.4)$$

Введем обозначение $d_1(\sigma) := \min_{\sigma\leqslant|\xi|\leqslant\pi}(\lambda(\xi) - \nu) = \lambda(\sigma) - \nu > 0$. Очевидно, норма второго слагаемого в правой части (3.4) не превосходит константы $\mu_{2n+1}^{1/2}d_1(\sigma)^{-1}$. Далее, в силу спектральной теоремы норма третьего слагаемого оценивается через

$$\sup_{x\in[0,\mu_{2n}]\cup[\nu_{2n+2},\infty)} \frac{x^{1/2}}{|x-\nu+\varkappa^2\varepsilon^2|}$$
$$\leqslant \sup_{x\in[0,\mu_{2n}]\cup[\nu_{2n+2},\infty)} \left(\frac{1}{|x-\nu+\varkappa^2\varepsilon^2|^{1/2}} + \frac{\nu^{1/2}}{|x-\nu+\varkappa^2\varepsilon^2|}\right)$$
$$\leqslant d_2^{-1/2} + \nu^{1/2} d_2^{-1}.$$

Здесь $d_2 := \min\{\nu_{2n+2}-\nu, \nu-\varkappa^2-\mu_{2n}\}$. В итоге из (3.4) следует оценка (3.3) с постоянной $C_1 = \mu_{2n+1}^{1/2} d_1(\sigma)^{-1} + d_2^{-1/2} + \nu^{1/2} d_2^{-1}$. $\square$

Лемма 3.3. *Положим*

$$\sigma_0 = \sigma_0(b_\nu, \|\gamma\|_{L_\infty}) := \min\{b_\nu^{1/2}(2\|\gamma\|_{L_\infty})^{-1/2}, 3\pi/4\}.$$

При всех $\sigma \in (0, \sigma_0]$ *и* $0 < \varepsilon \leqslant 1$ *выполнена оценка*

$$\Big\| A^{1/2}\Big(X_\sigma^* \left[(\lambda(\xi)-\nu+\varkappa^2\varepsilon^2)^{-1}\right] X_\sigma - X_\sigma^* \left[(b_\nu\xi^2+\varkappa^2\varepsilon^2)^{-1}\right] X_\sigma\Big)\Big\|_{L_2(\mathbb{R})\to L_2(\mathbb{R})} \leqslant C_2. \quad (3.5)$$

Постоянная C_2 *зависит от* μ_{2n+1}, b_ν, $\|\gamma\|_{L_\infty}$.

Доказательство. С учетом (2.11) левую часть неравенства (3.5) можно представить в виде

$$\Big\| X_\sigma^* \Big[\lambda(\xi)^{1/2}\left((\lambda(\xi)-\nu+\varkappa^2\varepsilon^2)^{-1} - (b_\nu\xi^2+\varkappa^2\varepsilon^2)^{-1}\right)\Big] X_\sigma \Big\|$$
$$= \Big\| X_\sigma^* \Big[\lambda(\xi)^{1/2}\xi^4\gamma(\xi)(\lambda(\xi)-\nu+\varkappa^2\varepsilon^2)^{-1}(b_\nu\xi^2+\varkappa^2\varepsilon^2)^{-1}\Big] X_\sigma \Big\|.$$

Нетрудно видеть, что при условии $|\xi| \leqslant \sigma \leqslant \sigma_0$ выполнена оценка

$$\xi^4|\gamma(\xi)| \leqslant \frac{1}{2} b_\nu \xi^2,$$

а потому $\lambda(\xi) - \nu \geqslant \frac{1}{2} b_\nu \xi^2$. Следовательно,

$$\Big\| X_\sigma^* \Big[\lambda(\xi)^{1/2}\xi^4\gamma(\xi)(\lambda(\xi)-\nu+\varkappa^2\varepsilon^2)^{-1}(b_\nu\xi^2+\varkappa^2\varepsilon^2)^{-1}\Big] X_\sigma \Big\|$$
$$\leqslant \max_{|\xi|\leqslant\sigma} \Big|\lambda(\xi)^{1/2}\xi^4\gamma(\xi)(\lambda(\xi)-\nu+\varkappa^2\varepsilon^2)^{-1}(b_\nu\xi^2+\varkappa^2\varepsilon^2)^{-1}\Big|$$
$$\leqslant 2\mu_{2n+1}^{1/2} b_\nu^{-2} \|\gamma\|_{L_\infty}.$$

В итоге получаем оценку (3.5) с постоянной $C_2 = 2\mu_{2n+1}^{1/2} b_\nu^{-2}\|\gamma\|_{L_\infty}$. $\square$

Определим оператор X^1_σ, действующий из $L_2(\mathbb{R})$ в $L_2(-\pi,\pi)$:

$$X^1_\sigma := [\chi_\sigma(\xi)]\Phi[\varphi_0(x)] - [\xi\chi_\sigma(\xi)]\Phi[\varphi_1(x)], \quad \sigma \in (0,\pi). \tag{3.6}$$

Лемма 3.4. *При всех $\sigma \in (0,\pi)$ и $0 < \varepsilon \leqslant 1$ выполнено неравенство*

$$\Big\| A^{1/2}\Big(X^*_\sigma \left[(b_\nu\xi^2 + \varkappa^2\varepsilon^2)^{-1}\right] X_\sigma \\ - (X^1_\sigma)^* \left[(b_\nu\xi^2 + \varkappa^2\varepsilon^2)^{-1}\right] X^1_\sigma\Big)\Big\|_{L_2(\mathbb{R})\to L_2(\mathbb{R})} \leqslant C_3. \tag{3.7}$$

Постоянная C_3 зависит от b_ν, $\|g\|_{L_\infty}$, $\|\omega^{-1}\|_{L_\infty}$, $\|\varphi_0\|_{L_\infty}$, $\|\varphi_1\|_{L_\infty}$, $\|(\omega^{-1}\varphi_0)'\|_{L_\infty}$, $\|(\omega^{-1}\varphi_1)'\|_{L_\infty}$, $\|\theta\|_{M_\sigma}$, $\|\frac{d}{dx}(\omega^{-1}\theta)\|_{M_\sigma}$; норма $\|\cdot\|_{M_\sigma}$ определена ниже в (3.9).

Доказательство. Отметим, что X_σ, X^1_σ – интегральные операторы из $L_2(\mathbb{R})$ в $L_2(-\pi,\pi)$ с ядрами

$$t_\sigma(\xi,x) := \frac{1}{\sqrt{2\pi}}\chi_\sigma(\xi)e^{-ix\xi}\overline{\varphi(\xi,x)},$$
$$t^1_\sigma(\xi,x) := \frac{1}{\sqrt{2\pi}}\chi_\sigma(\xi)e^{-ix\xi}\left(\varphi_0(x) - \xi\varphi_1(x)\right).$$

В силу (2.12) с учетом того, что функция $\varphi_1(x)$ – чисто мнимая, имеем

$$\overline{\varphi(\xi,x)} = \varphi_0(x) - \xi\varphi_1(x) + \xi^2\overline{\theta(\xi,x)}.$$

Следовательно, оператор $X_\sigma - X^1_\sigma$ является интегральным оператором с ядром

$$t_\sigma(\xi,x) - t^1_\sigma(\xi,x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}}\xi^2\chi_\sigma(\xi)e^{-ix\xi}\overline{\theta(\xi,x)}. \tag{3.8}$$

Ядро $r_\sigma(\xi,x) := \frac{1}{\sqrt{2\pi}}\chi_\sigma(\xi)e^{-ix\xi}$ задает ограниченный оператор $[\chi_\sigma]\Phi$, нетривиально действующий из $L_2(\mathbb{R})$ в $L_2(-\sigma,\sigma)$. Функция $\overline{\theta(\xi,x)}$ является мультипликатором на множестве ядер ограниченных интегральных операторов, переводящих $L_2(\mathbb{R})$ в $L_2(-\sigma,\sigma)$; см. [12]. Действительно, функция $\overline{\theta(\xi,x)}$ при $\xi \in [-\sigma,\sigma]$ является аналитической по ξ со значениями в $\widetilde{\mathcal{H}}^1(0,1)$. С учетом непрерывности вложения $\widetilde{\mathcal{H}}^1(0,1)$ в $L_\infty(0,1)$ она также является аналитической по ξ со значениями в $L_\infty(0,1)$. Поэтому, с учетом периодичности этой функции по x, выполнено

$$\|\theta\|_{M_\sigma} := \operatorname*{ess\text{-}sup}_{x\in\mathbb{R}} \|\theta(\cdot,x)\|_{C^1([-\sigma,\sigma])} < \infty. \tag{3.9}$$

Мультипликаторная норма функции $\overline{\theta(\xi,x)}$ оценивается через величину (3.9). Подробности по поводу мультипликаторов для ядер интегральных операторов можно найти в [22, §8,9].

Следовательно, ядро $r_\sigma(\xi,x)\overline{\theta(\xi,x)}$ задает ограниченный оператор U_σ из $L_2(\mathbb{R})$ в $L_2(-\sigma,\sigma)$. Из (3.8) вытекает равенство

$$X_\sigma - X_\sigma^1 = \left[\xi^2\chi_\sigma(\xi)\right] U_\sigma. \tag{3.10}$$

Далее, справедливо соотношение

$$\begin{aligned} D_{\sigma,\varepsilon} &:= X_\sigma^*\left[(b_\nu\xi^2+\varkappa^2\varepsilon^2)^{-1}\right]X_\sigma - \left(X_\sigma^1\right)^*\left[(b_\nu\xi^2+\varkappa^2\varepsilon^2)^{-1}\right]X_\sigma^1 \\ &= \left(X_\sigma - X_\sigma^1\right)^*\left[(b_\nu\xi^2+\varkappa^2\varepsilon^2)^{-1}\right]X_\sigma + \left(X_\sigma^1\right)^*\left[(b_\nu\xi^2+\varkappa^2\varepsilon^2)^{-1}\right]\left(X_\sigma - X_\sigma^1\right). \end{aligned}$$

Вместе с (3.10) это дает

$$D_{\sigma,\varepsilon} = U_\sigma^*\left[\xi^2(b_\nu\xi^2+\varkappa^2\varepsilon^2)^{-1}\right]X_\sigma + \left(X_\sigma^1\right)^*\left[\xi^2(b_\nu\xi^2+\varkappa^2\varepsilon^2)^{-1}\right]U_\sigma. \tag{3.11}$$

Левую часть искомого неравенства (3.7) можно записать в виде $\left\|A^{1/2}D_{\sigma,\varepsilon}\right\|$. С учетом (3.11) имеем

$$\begin{aligned} \left\|A^{1/2}D_{\sigma,\varepsilon}\right\| &= \left\|g^{1/2}\frac{d}{dx}\omega^{-1}D_{\sigma,\varepsilon}\right\| \\ &\leqslant \|g\|_{L_\infty}^{1/2}\left\|\frac{d}{dx}\omega^{-1}U_\sigma^*\left[\xi^2(b_\nu\xi^2+\varkappa^2\varepsilon^2)^{-1}\right]X_\sigma\right\| \\ &+ \|g\|_{L_\infty}^{1/2}\left\|\frac{d}{dx}\omega^{-1}(X_\sigma^1)^*\left[\xi^2(b_\nu\xi^2+\varkappa^2\varepsilon^2)^{-1}\right]U_\sigma\right\|. \end{aligned} \tag{3.12}$$

Оператор $\left[\xi^2(b_\nu\xi^2+\varkappa^2\varepsilon^2)^{-1}\right]U_\sigma$ ограничен: его норма не превосходит $b_\nu^{-1}\|U_\sigma\|$. Оператор $\frac{d}{dx}\omega^{-1}(X_\sigma^1)^*$ представляет собой интегральный оператор с ядром

$$\begin{aligned} k_1(x,\xi) &= \frac{1}{\sqrt{2\pi}}e^{ix\xi}\chi_\sigma(\xi) \\ &\times\left(\frac{d(\omega^{-1}(x)\varphi_0(x))}{dx} + \xi\frac{d(\omega^{-1}(x)\varphi_1(x))}{dx} + i\xi\omega^{-1}(x)(\varphi_0(x)+\xi\varphi_1(x))\right). \end{aligned}$$

Его норма оценивается через

$$\|(\omega^{-1}\varphi_0)'\|_{L_\infty} + \pi\|(\omega^{-1}\varphi_1)'\|_{L_\infty} + \pi\|\omega^{-1}\varphi_0\|_{L_\infty} + \pi^2\|\omega^{-1}\varphi_1\|_{L_\infty}.$$

Таким образом, второе слагаемое в правой части (3.12) не превосходит константы

$$\widetilde{C}_3 = \|g\|_{L_\infty}^{1/2} \big(\|(\omega^{-1}\varphi_0)'\|_{L_\infty} + \pi \|(\omega^{-1}\varphi_1)'\|_{L_\infty} \\ + \pi \|\omega^{-1}\varphi_0\|_{L_\infty} + \pi^2 \|\omega^{-1}\varphi_1\|_{L_\infty} \big) b_\nu^{-1} \|U_\sigma\|.$$

Рассмотрим первое слагаемое. Норма оператора $\big[\xi^2(b_\nu\xi^2+\varkappa^2\varepsilon^2)^{-1}\big]X_\sigma$ не превосходит b_ν^{-1}. Оператор $\frac{d}{dx}\omega^{-1}U_\sigma^*$ представляет собой интегральный оператор с ядром

$$k_2(x,\xi) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{ix\xi} \chi_\sigma(\xi) \bigg(\frac{d(\omega^{-1}(x)\theta(\xi,x))}{dx} + i\xi\omega^{-1}(x)\theta(\xi,x) \bigg).$$

Сопряженный к нему оператор действует из $L_2(\mathbb{R})$ в $L_2(-\sigma,\sigma)$ как интегральный оператор с ядром

$$\frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{-ix\xi} \chi_\sigma(\xi) \frac{d(\omega^{-1}(x)\overline{\theta(\xi,x)})}{dx} - \frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{-ix\xi} \chi_\sigma(\xi) i\xi\omega^{-1}(x)\overline{\theta(\xi,x)}. \quad (3.13)$$

Ядро $\frac{1}{\sqrt{2\pi}} i\xi\chi_\sigma(\xi)e^{-ix\xi}$ задает ограниченный интегральный оператор из $L_2(\mathbb{R})$ в $L_2(-\sigma,\sigma)$. Как уже отмечалось, функция $\overline{\theta(x,\xi)}$ – мультипликатор на классе ядер таких операторов. Поэтому второе слагаемое в (3.13) является ядром ограниченного интегрального оператора, его норма контролируется через $\|\omega^{-1}\|_{L_\infty}$ и $\|\theta\|_{M_\sigma}$. Аналогично, ядро $\frac{1}{\sqrt{2\pi}}\chi_\sigma(\xi)e^{-ix\xi}$ задает ограниченный интегральный оператор из $L_2(\mathbb{R})$ в $L_2(-\sigma,\sigma)$. Функция $\frac{d(\omega^{-1}(x)\overline{\theta(\xi,x)})}{dx}$ является мультипликатором, поскольку в силу леммы 2.2, с учетом периодичности этой функции по x, выполнено

$$\bigg\| \frac{d(\omega^{-1}\theta)}{dx} \bigg\|_{M_\sigma} = \operatorname*{ess\text{-}sup}_{x\in\mathbb{R}} \bigg\| \frac{d(\omega^{-1}(x)\theta(\cdot,x))}{dx} \bigg\|_{C^1([-\sigma,\sigma])} < \infty.$$

Поэтому первое слагаемое в (3.13) является ядром ограниченного интегрального оператора, его норма контролируется через $\|\frac{d}{dx}(\omega^{-1}\theta)\|_{M_\sigma}$. Таким образом, первое слагаемое в правой части (3.12) не превосходит константы $\widehat{C}_3$, контролируемой через b_ν, $\|g\|_{L_\infty}$, $\|\omega^{-1}\|_{L_\infty}$, $\|\theta\|_{M_\sigma}$ и $\|\frac{d}{dx}(\omega^{-1}\theta)\|_{M_\sigma}$.

В итоге получаем искомое неравенство (3.7) с постоянной $C_3 = \widehat{C}_3 + \widetilde{C}_3$. □

Лемма 3.5. *При всех* $\sigma \in (0, \pi)$ *и* $0 < \varepsilon \leqslant 1$ *выполнено неравенство*

$$\Big\| A^{1/2}\Big((X_\sigma^1)^* \big[(b_\nu \xi^2 + \varkappa^2\varepsilon^2)^{-1}\big] X_\sigma^1 - [\varphi_0]\big(A_\nu^0 + \varkappa^2\varepsilon^2 I\big)^{-1}[\varphi_0] - \Sigma(\varepsilon)\Big)\Big\|_{L_2(\mathbb{R})\to L_2(\mathbb{R})} \leqslant C_4, \quad (3.14)$$

где оператор $\Sigma(\varepsilon)$ *определен в* (3.2). *Постоянная* C_4 *зависит от* σ, b_ν, $\|g\|_{L_\infty}$, $\|\omega^{-1}\|_{L_\infty}$, $\|\varphi_0\|_{L_\infty}$, $\|\varphi_1\|_{L_\infty}$, $\|(\omega^{-1}\varphi_0)'\|_{L_\infty}$, $\|(\omega^{-1}\varphi_1)'\|_{L_\infty}$.

Доказательство. В силу (3.6) справедливо представление

$$(X_\sigma^1)^* \left[(b_\nu\xi^2 + \varkappa^2\varepsilon^2)^{-1}\right] X_\sigma^1 = J_{\sigma,\varepsilon}^{(1)} + J_{\sigma,\varepsilon}^{(2)} + J_{\sigma,\varepsilon}^{(3)} + J_{\sigma,\varepsilon}^{(4)}, \quad (3.15)$$

где

$$J_{\sigma,\varepsilon}^{(1)} = [\varphi_0]\Phi^* \left[\chi_\sigma(\xi)(b_\nu\xi^2 + \varkappa^2\varepsilon^2)^{-1}\right] \Phi[\varphi_0], \quad (3.16)$$

$$J_{\sigma,\varepsilon}^{(2)} = -[\varphi_0]\Phi^* \left[\chi_\sigma(\xi)\xi(b_\nu\xi^2 + \varkappa^2\varepsilon^2)^{-1}\right] \Phi[\varphi_1], \quad (3.17)$$

$$J_{\sigma,\varepsilon}^{(3)} = [\varphi_1]\Phi^* \left[\chi_\sigma(\xi)\xi(b_\nu\xi^2 + \varkappa^2\varepsilon^2)^{-1}\right] \Phi[\varphi_0], \quad (3.18)$$

$$J_{\sigma,\varepsilon}^{(4)} = -[\varphi_1]\Phi^* \left[\chi_\sigma(\xi)\xi^2(b_\nu\xi^2 + \varkappa^2\varepsilon^2)^{-1}\right] \Phi[\varphi_1].$$

Оценим норму оператора $A^{1/2}J_{\sigma,\varepsilon}^{(4)}$:

$$\begin{aligned}\Big\|A^{1/2}J_{\sigma,\varepsilon}^{(4)}\Big\| &= \Big\|g^{1/2}\frac{d}{dx}\omega^{-1}J_{\sigma,\varepsilon}^{(4)}\Big\| \\ &\leqslant \|g\|_{L_\infty}^{1/2}\left\|[(\omega^{-1}\varphi_1)']\Phi^*\left[\chi_\sigma(\xi)\xi^2(b_\nu\xi^2 + \varkappa^2\varepsilon^2)^{-1}\right]\Phi[\varphi_1]\right\| \\ &+ \|g\|_{L_\infty}^{1/2}\left\|[\omega^{-1}\varphi_1]\Phi^*\left[\chi_\sigma(\xi)\xi^3(b_\nu\xi^2 + \varkappa^2\varepsilon^2)^{-1}\right]\Phi[\varphi_1]\right\| \\ &\leqslant \|g\|_{L_\infty}^{1/2} b_\nu^{-1}\|\varphi_1\|_{L_\infty}\left(\|(\omega^{-1}\varphi_1)'\|_{L_\infty} + \pi\|\omega^{-1}\varphi_1\|_{L_\infty}\right) =: \widetilde{C}_4.\end{aligned}$$

Отсюда и из (3.15) вытекает оценка

$$\Big\|A^{1/2}(X_\sigma^1)^*\big[(b_\nu\xi^2+\varkappa^2\varepsilon^2)^{-1}\big]X_\sigma^1 - A^{1/2}\Big(J_{\sigma,\varepsilon}^{(1)} + J_{\sigma,\varepsilon}^{(2)} + J_{\sigma,\varepsilon}^{(3)}\Big)\Big\| \leqslant \widetilde{C}_4. \quad (3.19)$$

Покажем теперь, что в пределах погрешности эта оценка сохранит силу, если в выражениях для $J_{\sigma,\varepsilon}^{(1)}$, $J_{\sigma,\varepsilon}^{(2)}$, $J_{\sigma,\varepsilon}^{(3)}$ “устранить” $\chi_\sigma(\xi)$. Имеем

$$\begin{aligned}&\Big\|A^{1/2}[\varphi_0]\Phi^*\big[(1-\chi_\sigma(\xi))(b_\nu\xi^2 + \varkappa^2\varepsilon^2)^{-1}\big]\Phi[\varphi_0]\Big\| \\ &\leqslant \|g\|_{L_\infty}^{1/2}\big\|[(\omega^{-1}\varphi_0)']\Phi^*\big[(1-\chi_\sigma(\xi))(b_\nu\xi^2 + \varkappa^2\varepsilon^2)^{-1}\big]\Phi[\varphi_0]\big\| \\ &+ \|g\|_{L_\infty}^{1/2}\big\|[\omega^{-1}\varphi_0]\Phi^*\big[(1-\chi_\sigma(\xi))\xi(b_\nu\xi^2 + \varkappa^2\varepsilon^2)^{-1}\big]\Phi[\varphi_0]\big\| \\ &\leqslant \|g\|_{L_\infty}^{1/2} b_\nu^{-1}\|\varphi_0\|_{L_\infty}\big(\sigma^{-2}\|(\omega^{-1}\varphi_0)'\|_{L_\infty} + \sigma^{-1}\|\omega^{-1}\varphi_0\|_{L_\infty}\big) =: \widehat{C}_4'.\end{aligned} \quad (3.20)$$

Аналогично,

$$\begin{aligned}&\left\|A^{1/2}[\varphi_0]\Phi^*\left[(1-\chi_\sigma(\xi))\xi(b_\nu\xi^2+\varkappa^2\varepsilon^2)^{-1}\right]\Phi[\varphi_1]\right\|\\&\leqslant\|g\|^{1/2}_{L_\infty}b_\nu^{-1}\|\varphi_1\|_{L_\infty}\left(\sigma^{-1}\|(\omega^{-1}\varphi_0)'\|_{L_\infty}+\|\omega^{-1}\varphi_0\|_{L_\infty}\right)=:\widehat{C}_4'',\end{aligned}\tag{3.21}$$

$$\begin{aligned}&\left\|A^{1/2}[\varphi_1]\Phi^*\left[(1-\chi_\sigma(\xi))\xi(b_\nu\xi^2+\varkappa^2\varepsilon^2)^{-1}\right]\Phi[\varphi_0]\right\|\\&\leqslant\|g\|^{1/2}_{L_\infty}b_\nu^{-1}\|\varphi_0\|_{L_\infty}\left(\sigma^{-1}\|(\omega^{-1}\varphi_1)'\|_{L_\infty}+\|\omega^{-1}\varphi_1\|_{L_\infty}\right)=:\widehat{C}_4'''.\end{aligned}\tag{3.22}$$

Сопоставляя (3.16)–(3.18), (3.19)–(3.22), приходим к оценке

$$\begin{aligned}&\left\|A^{1/2}(X_\sigma^1)^*\left[(b_\nu\xi^2+\varkappa^2\varepsilon^2)^{-1}\right]X_\sigma^1-A^{1/2}\left(\widetilde{J}^{(1)}_{\sigma,\varepsilon}+\widetilde{J}^{(2)}_{\sigma,\varepsilon}+\widetilde{J}^{(3)}_{\sigma,\varepsilon}\right)\right\|\\&\leqslant C_4=\widetilde{C}_4+\widehat{C}_4'+\widehat{C}_4''+\widehat{C}_4''',\end{aligned}\tag{3.23}$$

где

$$\widetilde{J}^{(1)}_{\sigma,\varepsilon}=[\varphi_0]\Phi^*\left[(b_\nu\xi^2+\varkappa^2\varepsilon^2)^{-1}\right]\Phi[\varphi_0]=[\varphi_0]\left(A_\nu^0+\varkappa^2\varepsilon^2I\right)^{-1}[\varphi_0],\tag{3.24}$$

$$\widetilde{J}^{(2)}_{\sigma,\varepsilon}=-[\varphi_0]\Phi^*\left[\xi(b_\nu\xi^2+\varkappa^2\varepsilon^2)^{-1}\right]\Phi[\varphi_1]=-[\varphi_0]\left(A_\nu^0+\varkappa^2\varepsilon^2I\right)^{-1}\frac{1}{i}\frac{d}{dx}[\varphi_1],$$

$$\widetilde{J}^{(3)}_{\sigma,\varepsilon}=[\varphi_1]\Phi^*\left[\xi(b_\nu\xi^2+\varkappa^2\varepsilon^2)^{-1}\right]\Phi[\varphi_0]=[\varphi_1]\frac{1}{i}\frac{d}{dx}\left(A_\nu^0+\varkappa^2\varepsilon^2I\right)^{-1}[\varphi_0].$$

Учитывая равенство $\varphi_1=i\Lambda+i\beta\varphi_0$ и (3.2), убеждаемся, что

$$\widetilde{J}^{(2)}_{\sigma,\varepsilon}+\widetilde{J}^{(3)}_{\sigma,\varepsilon}=\Sigma(\varepsilon).\tag{3.25}$$

В итоге, из (3.23), (3.24), (3.25) вытекает искомая оценка (3.14). □

Доказательство теоремы 3.1. Из оценок (3.3), (3.5), (3.7) и (3.14) при $\sigma=\sigma_0(b_\nu,\|\gamma\|_{L_\infty})$ вытекает искомое неравенство (3.1) с постоянной $C_0=C_1+C_2+C_3+C_4$. □

3.2. Доказательство теоремы 2.6. Пусть T_ε – оператор масштабного преобразования, определенный в (1.21). В силу (1.22) справедливы соотношения

$$A_\varepsilon^{1/2}=\varepsilon^{-1}T_\varepsilon^*A^{1/2}T_\varepsilon,\quad \left(A_\varepsilon-(\varepsilon^{-2}\nu-\varkappa^2)I\right)^{-1}=\varepsilon^2T_\varepsilon^*\left(A-(\nu-\varkappa^2\varepsilon^2)I\right)^{-1}T_\varepsilon.$$

Аналогично,

$$\left(A_\nu^0+\varkappa^2I\right)^{-1}=\varepsilon^2T_\varepsilon^*\left(A_\nu^0+\varkappa^2\varepsilon^2I\right)^{-1}T_\varepsilon.$$

Наконец, операторы (2.20) и (3.2) также связаны масштабным преобразованием:

$$K_\nu(\varepsilon)=\varepsilon T_\varepsilon^*\Sigma(\varepsilon)T_\varepsilon.$$

Из приведенных соотношений вытекает, что

$$A_\varepsilon^{1/2}\Big(\big(A_\varepsilon-(\varepsilon^{-2}\nu-\varkappa^2)I\big)^{-1}-[\varphi_0^\varepsilon]\big(A_\nu^0+\varkappa^2 I\big)^{-1}[\varphi_0^\varepsilon]-\varepsilon K_\nu(\varepsilon)\Big)$$
$$=\varepsilon T_\varepsilon^* A^{1/2}\Big(\big(A-(\nu-\varkappa^2\varepsilon^2)I\big)^{-1}-[\varphi_0]\big(A_\nu^0+\varkappa^2\varepsilon^2 I\big)^{-1}[\varphi_0]-\Sigma(\varepsilon)\Big)T_\varepsilon.$$

Отсюда и из теоремы 3.1 с учетом унитарности оператора T_ε вытекает неравенство

$$\Big\|A_\varepsilon^{1/2}\Big(\big(A_\varepsilon-(\varepsilon^{-2}\nu-\varkappa^2)I\big)^{-1}-[\varphi_0^\varepsilon]\big(A_\nu^0+\varkappa^2 I\big)^{-1}[\varphi_0^\varepsilon]-\varepsilon K_\nu(\varepsilon)\Big)\Big\|_{L_2(\mathbb{R})\to L_2(\mathbb{R})}\leqslant C_0\varepsilon \quad (3.26)$$

при $0<\varepsilon\leqslant 1$. Из (3.26) сразу получаем, что при $0<\varepsilon\leqslant 1$ выполнена оценка

$$\Big\|\frac{d}{dx}(\omega^\varepsilon)^{-1}\Big(\big(A_\varepsilon-(\varepsilon^{-2}\nu-\varkappa^2)I\big)^{-1}-[\varphi_0^\varepsilon]\big(A_\nu^0+\varkappa^2 I\big)^{-1}[\varphi_0^\varepsilon]-\varepsilon K_\nu(\varepsilon)\Big)\Big\|_{L_2(\mathbb{R})\to L_2(\mathbb{R})}\leqslant \|g^{-1}\|_{L_\infty}^{1/2}C_0\varepsilon. \quad (3.27)$$

Далее, в силу (2.21) и (2.25) имеем

$$\Big\|(\omega^\varepsilon)^{-1}\Big(\big(A_\varepsilon-(\varepsilon^{-2}\nu-\varkappa^2)I\big)^{-1}-[\varphi_0^\varepsilon]\big(A_\nu^0+\varkappa^2 I\big)^{-1}[\varphi_0^\varepsilon]-\varepsilon K_\nu(\varepsilon)\Big)\Big\|_{L_2(\mathbb{R})\to L_2(\mathbb{R})}\leqslant \|\omega^{-1}\|_{L_\infty}(C^\circ+\mathfrak{C}_1)\varepsilon.$$

Вместе с (3.27) это влечет искомую оценку (2.26) с постоянной

$$C=\|g^{-1}\|_{L_\infty}^{1/2}C_0+\|\omega^{-1}\|_{L_\infty}(C^\circ+\mathfrak{C}_1)$$

и завершает доказательство теоремы 2.6.

Теоремы 2.8, 2.9 и 2.10 доказываются тем же способом, что и теорема 2.6.

§4. Приложение: доказательство леммы 2.2

Пусть выполнены предположения пункта 2.3. Нам известно, что при $\xi\in(-\pi,\pi)$ функция $\lambda(\xi)$ вещественно аналитична, а функция $f(\xi,x):=\omega(x)^{-1}\psi(\xi,x)$ вещественно аналитична со значениями в $H^1(0,1)$.

Фиксируем точку $\xi_0 \in (-\pi, \pi)$. Обозначим $B_\delta(\xi_0) = \{\xi \in \mathbb{R} : |\xi - \xi_0| < \delta\}$. При достаточно малом $0 < \delta < \pi - |\xi_0|$ справедливы степенные разложения

$$\lambda(\xi) = \sum_{m=0}^{\infty} \lambda_m (\xi - \xi_0)^m, \quad \xi \in B_\delta(\xi_0), \tag{4.1}$$

$$f(\xi, x) = \omega(x)^{-1}\psi(\xi, x) = \sum_{m=0}^{\infty} f_m(x)(\xi - \xi_0)^m, \quad \xi \in B_\delta(\xi_0). \tag{4.2}$$

Ряд (4.1) сходится абсолютно, ряд (4.2) сходится по норме в $H^1(0,1)$.

Предложение 4.1. *Ряд* (4.2) *сходится абсолютно по норме в* $H^1(0,1)$*, т. е.*

$$\sum_{m=0}^{\infty} \|f_m\|_{H^1(0,1)} |\xi - \xi_0|^m < \infty, \quad \xi \in B_\delta(\xi_0). \tag{4.3}$$

Доказательство. Фиксируем $\xi \in B_\delta(\xi_0)$ и выберем точку $\xi_1 \in B_\delta(\xi_0)$ такую, что $|\xi - \xi_0| < |\xi_1 - \xi_0|$. Поскольку ряд $\sum\limits_{m=0}^{\infty} f_m(x)(\xi_1 - \xi_0)^m$ сходится в $H^1(0,1)$, то общий член ряда стремится к нулю: $\|f_m\|_{H^1(0,1)} \times |\xi_1 - \xi_0|^m \to 0$ при $m \to \infty$. Следовательно, общий член ряда равномерно ограничен: $\|f_m\|_{H^1(0,1)} |\xi_1 - \xi_0|^m \leqslant c = c(\xi_0, \xi_1)$, $m \in \mathbb{N}$. Положим $q = \frac{|\xi - \xi_0|}{|\xi_1 - \xi_0|} < 1$. Тогда

$$\|f_m\|_{H^1(0,1)} |\xi - \xi_0|^m = \|f_m\|_{H^1(0,1)} |\xi_1 - \xi_0|^m q^m \leqslant c\, q^m, \quad m \in \mathbb{N}.$$

Таким образом, ряд (4.3) мажорируется сходящейся геометрической прогрессией, а потому сходится. $\square$

Следствие 4.2. *Функция* $\frac{d}{dx} f(\xi, x) = \frac{d}{dx}(\omega(x)^{-1}\psi(\xi, x))$ *раскладывается в ряд*

$$\frac{d}{dx} f(\xi, x) = \sum_{m=0}^{\infty} f'_m(x)(\xi - \xi_0)^m, \quad \xi \in B_\delta(\xi_0), \tag{4.4}$$

абсолютно сходящийся по норме в $L_2(0,1)$.

Наша цель – усилить это утверждение и показать, что ряд (4.4) абсолютно сходится в $L_\infty(0,1)$.

Предложение 4.3. *Положим*

$$F(\xi, x) := \lambda(\xi) f(\xi, x) = \lambda(\xi)\omega(x)^{-1}\psi(\xi, x). \tag{4.5}$$

Тогда имеет место разложение

$$F(\xi,x)=\sum_{m=0}^{\infty}F_m(x)(\xi-\xi_0)^m,\quad F_m(x)=\sum_{l=0}^{m}\lambda_{m-l}f_l(x),\quad \xi\in B_\delta(\xi_0). \quad (4.6)$$

Ряд (4.6) *сходится абсолютно по норме в* $H^1(0,1)$*, при этом*

$$\sum_{m=0}^{\infty}\|F_m\|_{H^1(0,1)}|\xi-\xi_0|^m\leqslant\Bigl(\sum_{j=0}^{\infty}|\lambda_j||\xi-\xi_0|^j\Bigr)\Bigl(\sum_{l=0}^{\infty}\|f_l\|_{H^1(0,1)}|\xi-\xi_0|^l\Bigr),$$
$$\xi\in B_\delta(\xi_0). \quad (4.7)$$

Доказательство. Рассмотрим ряд $\sum\limits_{m=0}^{\infty}F_m(x)(\xi-\xi_0)^m$, где $F_m(x)=\sum\limits_{l=0}^{m}\lambda_{m-l}f_l(x)$. Абсолютная сходимость этого ряда в $H^1(0,1)$ вместе с оценкой (4.7) следует из выкладки

$$\sum_{m=0}^{\infty}\|F_m\|_{H^1(0,1)}|\xi-\xi_0|^m\leqslant\sum_{m=0}^{\infty}|\xi-\xi_0|^m\sum_{l=0}^{m}|\lambda_{m-l}|\|f_l\|_{H^1(0,1)}$$
$$=\sum_{l=0}^{\infty}\sum_{m=l}^{\infty}|\xi-\xi_0|^{m-l}|\lambda_{m-l}||\xi-\xi_0|^l\|f_l\|_{H^1(0,1)}$$
$$=\Bigl(\sum_{j=0}^{\infty}|\lambda_j||\xi-\xi_0|^j\Bigr)\Bigl(\sum_{l=0}^{\infty}\|f_l\|_{H^1(0,1)}|\xi-\xi_0|^l\Bigr)<\infty.$$

Далее, поскольку $H^1(0,1)$ непрерывно вложено в $C([0,1])$, то ряд $\sum\limits_{m=0}^{\infty}F_m(x)(\xi-\xi_0)^m$ абсолютно сходится в $C([0,1])$, а значит, сходится в каждой точке. При фиксированных x и ξ вычислим сумму (числового) ряда:

$$\sum_{m=0}^{\infty}F_m(x)(\xi-\xi_0)^m=\sum_{m=0}^{\infty}(\xi-\xi_0)^m\sum_{l=0}^{m}\lambda_{m-l}f_l(x)$$
$$=\sum_{l=0}^{\infty}\sum_{m=l}^{\infty}(\xi-\xi_0)^{m-l}\lambda_{m-l}(\xi-\xi_0)^l f_l(x)$$
$$=\Bigl(\sum_{j=0}^{\infty}\lambda_j(\xi-\xi_0)^j\Bigr)\Bigl(\sum_{l=0}^{\infty}f_l(x)(\xi-\xi_0)^l\Bigr)=\lambda(\xi)f(\xi,x)=F(\xi,x).$$

Мы учли соотношения (4.1), (4.2) и (4.5). $\square$

Воспользуемся уравнением вида (2.9) для функции $\psi(\xi, x)$:

$$-\omega(x)^{-1}\frac{d}{dx}g(x)\frac{d}{dx}\omega(x)^{-1}\psi(\xi,x)=\lambda(\xi)\psi(\xi,x), \quad 0<x<1.$$

С учетом обозначений $f(\xi,x)=\omega(x)^{-1}\psi(\xi,x)$ и (4.5) перепишем это уравнение в виде

$$\frac{d}{dx}g(x)\frac{d}{dx}f(\xi,x)=-\omega^2(x)F(\xi,x), \quad 0<x<1. \tag{4.8}$$

Поскольку функция $F(\xi,x)$ непрерывна по x, а $\omega(x)$ ограничена, то правая часть в (4.8) принадлежит $L_\infty(0,1)$ при фиксированном ξ. Следовательно, функция

$$G(\xi,x):=g(x)\frac{d}{dx}f(\xi,x)=g(x)\frac{d}{dx}\omega(x)^{-1}\psi(\xi,x) \tag{4.9}$$

абсолютно непрерывна по x.

Предложение 4.4. *Функция* (4.9) *допускает разложение в ряд*

$$G(\xi,x)=\sum_{m=0}^{\infty}G_m(x)(\xi-\xi_0)^m, \quad \xi\in B_\delta(\xi_0),$$

абсолютно сходящийся по норме в $C([0,1])$.

Доказательство. В силу следствия 4.2 функция (4.9) раскладывается в ряд

$$G(\xi,x)=\sum_{m=0}^{\infty}G_m(x)(\xi-\xi_0)^m, \quad G_m(x)=g(x)f_m'(x), \quad \xi\in B_\delta(\xi_0), \tag{4.10}$$

абсолютно сходящийся в $L_2(0,1)$. Мы стремимся показать, что этот ряд абсолютно сходится в $C([0,1])$.

Поскольку функция $G(\xi,x)$ абсолютно непрерывна (по x) и в силу (4.8) выполнено $\frac{d}{dx}G(\xi,x)=-\omega^2(x)F(\xi,x)$, то

$$G(\xi,x)=G(\xi,0)-\int_0^x\omega^2(t)F(\xi,t)\,dt, \quad x\in[0,1], \quad \xi\in(-\pi,\pi). \tag{4.11}$$

Следовательно,

$$G(\xi,0)=G(\xi,x)+\int_0^x\omega^2(t)F(\xi,t)\,dt, \quad x\in[0,1], \quad \xi\in(-\pi,\pi).$$

При $\xi \in B_\delta(\xi_0)$ первое слагаемое справа раскладывается в ряд (4.10), абсолютно сходящийся в $L_2(0,1)$. Из предложения 4.3 следует, что второе слагаемое также раскладывается в ряд

$$\int_0^x \omega^2(t)F(\xi,t)\,dt = \sum_{m=0}^{\infty}\Big(\int_0^x \omega^2(t)F_m(t)\,dt\Big)(\xi-\xi_0)^m,$$
$$x \in [0,1], \quad \xi \in B_\delta(\xi_0), \qquad (4.12)$$

который абсолютно сходится в $C([0,1])$ (и, тем более, в $L_2(0,1)$). Положим $B_m(x) := G_m(x) + \int_0^x \omega^2(t)F_m(t)\,dt$, $m \in \mathbb{Z}_+$. Мы показали, что

$$G(\xi,0) = \sum_{m=0}^{\infty} B_m(x)(\xi-\xi_0)^m, \quad \xi \in B_\delta(\xi_0), \qquad (4.13)$$

где ряд абсолютно сходится в $L_2(0,1)$. Но левая часть в (4.13) не зависит от x, а потому и коэффициенты $B_m(x)$ не зависят от x.

Действительно, при $\xi = \xi_0$ из (4.13) следует, что коэффициент B_0 равен $G(\xi_0,0)$, а потому не зависит от x. С учетом этого перепишем (4.13) в виде

$$G(\xi,0) = G(\xi_0,0) + (\xi-\xi_0)\sum_{m=1}^{\infty} B_m(x)(\xi-\xi_0)^{m-1}.$$

Отсюда получаем, что коэффициент B_1 равен $\lim\limits_{\xi\to\xi_0} \frac{G(\xi,0)-G(\xi_0,0)}{\xi-\xi_0}$, а потому не зависит от x. По индукции легко проверить, что все коэффициенты B_m не зависят от x. Тогда равенство (4.13) превращается в

$$G(\xi,0) = \sum_{m=0}^{\infty} B_m(\xi-\xi_0)^m, \quad \xi \in B_\delta(\xi_0), \qquad (4.14)$$

где ряд абсолютно сходится.

Возвращаясь к (4.11) и применяя разложения (4.12) и (4.14), получаем

$$G(\xi,x) = \sum_{m=0}^{\infty}\Big(B_m - \int_0^x \omega^2(t)F_m(t)\,dt\Big)(\xi-\xi_0)^m, \quad \xi \in B_\delta(\xi_0),$$

где ряд абсолютно сходится в $C([0,1])$. Сопоставляя это с (4.10), получаем соотношения $G_m(x) = B_m - \int\limits_0^x \omega^2(t) F_m(t)\,dt$, $m \in \mathbb{Z}_+$, и абсолютную сходимость ряда (4.10) в $C([0,1])$. $\square$

Доказательство леммы 2.2. Из (4.9) и предложения 4.4 вытекает, что функция $\frac{d}{dx} f(\xi,x) = \frac{d}{dx}\big(\omega(x)^{-1}\psi(\xi,x)\big)$ раскладывается в ряд

$$\frac{d}{dx}(\omega(x)^{-1}\psi(\xi,x)) = \sum_{m=0}^{\infty} g(x)^{-1} G_m(x)(\xi-\xi_0)^m, \quad \xi \in B_\delta(\xi_0), \tag{4.15}$$

абсолютно сходящийся по норме в $L_\infty(0,1)$.

Вспомним, что $\varphi(\xi,x) = e^{-i\xi x}\psi(\xi,x)$. Следовательно,

$$\begin{aligned}\frac{d}{dx}(\omega(x)^{-1}\varphi(\xi,x)) = e^{-i\xi x}\frac{d}{dx}(\omega(x)^{-1}\psi(\xi,x)) - i\xi e^{-i\xi x}\omega(x)^{-1}\psi(\xi,x)\\ = e^{-i\xi x} H(\xi,x). \quad (4.16)\end{aligned}$$

В силу (4.2) и (4.15) функция

$$H(\xi,x) := \frac{d}{dx}(\omega(x)^{-1}\psi(\xi,x)) - i\xi\omega(x)^{-1}\psi(\xi,x)$$

раскладывается в ряд

$$H(\xi,x) = \sum_{m=0}^{\infty} H_m(x)(\xi-\xi_0)^m, \quad \xi \in B_\delta(\xi_0), \tag{4.17}$$

абсолютно сходящийся в $L_\infty(0,1)$. Здесь

$$\begin{aligned}&H_0(x) = g(x)^{-1}G_0(x) - i\xi_0 f_0(x),\\ &H_m(x) = g(x)^{-1}G_m(x) - i\xi_0 f_m(x) - i f_{m-1}(x), \quad m \in \mathbb{N}.\end{aligned}$$

Функцию $e^{-i\xi x}$ также представим в виде абсолютно сходящегося ряда

$$e^{-i\xi x} = e^{-i\xi_0 x}\sum_{m=0}^{\infty}\frac{(-ix)^m}{m!}(\xi-\xi_0)^m.$$

Покажем, что функция $Q(\xi,x) := e^{-i\xi x}H(\xi,x)$ раскладывается в ряд

$$\begin{aligned}&Q(\xi,x) = \sum_{m=0}^{\infty} Q_m(x)(\xi-\xi_0)^m,\\ &Q_m(x) = e^{-i\xi_0 x}\sum_{l=0}^{m} H_{m-l}(x)\frac{(-ix)^l}{l!}, \quad \xi \in B_\delta(\xi_0),\end{aligned} \tag{4.18}$$

абсолютно сходящийся в $L_\infty(0,1)$.

Действительно, при $\xi \in B_\delta(\xi_0)$ ряд $\sum\limits_{m=0}^{\infty} Q_m(x)(\xi-\xi_0)^m$ абсолютно сходится в $L_\infty(0,1)$, поскольку

$$\begin{aligned}\sum_{m=0}^{\infty} \|Q_m\|_{L_\infty}|\xi-\xi_0|^m &\leqslant \sum_{m=0}^{\infty}\sum_{l=0}^{m} \|H_{m-l}\|_{L_\infty}\frac{1}{l!}|\xi-\xi_0|^m\\ &= \sum_{l=0}^{\infty}\sum_{m=l}^{\infty} \|H_{m-l}\|_{L_\infty}|\xi-\xi_0|^{m-l}\frac{1}{l!}|\xi-\xi_0|^l\\ &= \Big(\sum_{l=0}^{\infty}\frac{1}{l!}|\xi-\xi_0|^l\Big)\Big(\sum_{j=0}^{\infty}\|H_j\|_{L_\infty}|\xi-\xi_0|^j\Big) < \infty\end{aligned}$$

в силу абсолютной сходимости ряда (4.17) в $L_\infty(0,1)$. Тогда ряд

$$\sum_{m=0}^{\infty} Q_m(x)(\xi-\xi_0)^m$$

абсолютно сходится при почти всех $x \in (0,1)$. В точках сходимости, очевидно, выполнено

$$\begin{aligned}&\sum_{m=0}^{\infty} Q_m(x)(\xi-\xi_0)^m = e^{-i\xi_0 x}\sum_{m=0}^{\infty}\sum_{l=0}^{m} H_{m-l}(x)\frac{(-ix)^l}{l!}(\xi-\xi_0)^m\\ &= e^{-i\xi_0 x}\sum_{l=0}^{\infty}\sum_{m=l}^{\infty} H_{m-l}(x)(\xi-\xi_0)^{m-l}\frac{(-ix)^l}{l!}(\xi-\xi_0)^l\\ &= e^{-i\xi_0 x}\Big(\sum_{l=0}^{\infty}\frac{(-ix)^l}{l!}(\xi-\xi_0)^l\Big)\Big(\sum_{j=0}^{\infty} H_j(x)(\xi-\xi_0)^j\Big) = e^{-i\xi x}H(\xi,x).\end{aligned}$$

Сопоставляя (4.16) и (4.18), убеждаемся, то функция

$$\frac{d}{dx}(\omega(x)^{-1}\varphi(\xi,x))$$

раскладывается в ряд

$$\frac{d}{dx}(\omega(x)^{-1}\varphi(\xi,x)) = \sum_{m=0}^{\infty} Q_m(x)(\xi-\xi_0)^m, \quad \xi \in B_\delta(\xi_0),$$

абсолютно сходящийся по норме $L_\infty(0,1)$. Ввиду произвола в выборе точки $\xi_0 \in (-\pi,\pi)$ это означает, что функция $\frac{d}{dx}(\omega(x)^{-1}\varphi(\xi,x))$ является вещественно аналитической по $\xi \in (-\pi,\pi)$ со значениями в $L_\infty(0,1)$. $\square$

Список литературы

1. A. Bensoussan, J.-L. Lions, G. Papanicolaou, *Asymptotic analysis for periodic structures.* — Stud. Math. Appl., vol. 5, North-Holland Publishing Co., 1978.
2. Н. С. Бахвалов, Г. П. Панасенко, *Осреднение процессов в периодических средах*, Наука, М., 1984.
3. В. В. Жиков, С. М. Козлов, О. А. Олейник, *Усреднение дифференциальных операторов*, Наука, М., 1993.
4. M. Sh. Birman, T. A. Suslina, *Threshold effects near the lower edge of the spectrum for periodic differential operators of mathematical physics*, In: Systems, Approximation, Singular Integral Operators, and Related Topics (Bordeaux, 2000), Oper. Theory Adv. Appl., vol. 129, Birkhäuser, Basel, 2001, pp. 71–107.
5. М. Ш. Бирман, Т. А. Суслина, *Периодические дифференциальные операторы второго порядка. Пороговые свойства и усреднения.* — Алгебра и анализ **15**, No. 5 (2003), 1–108.
6. М. Ш. Бирман, Т. А. Суслина, *Усреднение периодических эллиптических дифференциальных операторов с учетом корректора.* — Алгебра и анализ **17**, No. 6 (2005), 1–104.
7. М. Ш. Бирман, Т. А. Суслина, *Усреднение периодических дифференциальных операторов с учетом корректора. Приближение решений в классе Соболева* $H^1(\mathbb{R}^d)$. — Алгебра и анализ **18**, No. 6 (2006), 1–130.
8. В. В. Жиков, *Об операторных оценках в теории усреднения.* — Докл. РАН **403**, No. 3 (2005), 305–308.
9. V. V. Zhikov, S. E. Pastukhova, *On operator estimates for some problems in homogenization theory.* — Russ. J. Math. Phys. **12**, No. 4 (2005), 515–524.
10. В. В. Жиков, С. Е. Пастухова, *Об операторных оценках в теории усреднения.* — Успехи матем. наук. **71**, No. 3 (2016), 27–122.
11. М. Ш. Бирман, *О процедуре усреднения для периодических операторов в окрестности края внутренней лакуны.* — Алгебра и анализ **15**, No. 4 (2003), 61–71.
12. Т. А. Суслина, А. А. Харин, *Усреднение с учетом корректора для периодического эллиптического оператора вблизи кра внутренней лакуны.* — Проблемы математического анализа **41** (2009), 127–141.
13. М. Ш. Бирман, Т. А. Суслина, *Усреднение многомерного периодического эллиптического оператора в окрестности края внутренней лакуны.* — Записки научных семинаров ПОМИ **318** (2004), 60–74.
14. Т. А. Суслина, А. А. Харин, *Усреднение с учетом корректора для многомерного периодического эллиптического оператора вблизи края внутренней лакуны.* — Проблемы математического анализа **59** (2011), 177–193.

15. A. R. Akhmatova, E. S. Aksenova, V. A. Sloushch, T. A. Suslina, *Homogenization of the parabolic equation with periodic coefficients at the edge of a spectral gap.* — Complex Variables and Elliptic Equations **67**, No. 3 (2022), 523–555.
16. W. Kirsch, B. Simon, *Comparison theorems for the gap of Schrödinger operators.* — J. Funct. Anal. **75**, No. 2 (1987), 396–410.
17. M. Sh. Birman, T. A. Suslina, *Two-dimensional periodic Pauli operator. The effective masses at the lower edge of the spectrum*, In: Oper. Theory Adv. Appl., vol. 108, Birkhäuser, Basel, 1999, pp. 13–31.
18. M. Sh. Birman, *The discrete spectrum in gaps of the perturbed periodic Schrödinger operator. I. Regular perturbations*, In: Boundary Value Problems, Schrödinger Operators, Deformation Quantization, Math. Top., vol. 8. Adv. Partial Differential Equations, Akademie Verlag, Berlin, 1995, pp. 334–352.
19. М. Ш. Бирман, *Дискретный спектр в лакунах возмущенного периодического оператора Шрёдингера. II. Нерегулярные возмущения.* — Алгебра и анализ **9**, No. 6 (1997), 62–89.
20. Э. Ч. Титчмарш, *Разложения по собственным функциям, связанные с дифференциальными уравнениями второго порядка*, том 2, Изд-во ИЛ, М., 1961.
21. Т. Като, *Теория возмущений линейных операторов*, Мир, М., 1972.
22. М. Ш. Бирман, М. З. Соломяк, *Оценки сингулярных чисел интегральных операторов.* — Успехи мат. наук **32**, No. 1 (1977), 17–84.

Mishulovich A. A., Sloushch V. A., Suslina T. A. Homogenization of a one-dimensional periodic elliptic operator at the edge of a spectral gap: operator estimates in the energy norm.

In $L_2(\mathbb{R})$, we consider an elliptic second-order differential operator A_ε, $\varepsilon > 0$, given by $A_\varepsilon = -\frac{d}{dx} g(x/\varepsilon) \frac{d}{dx} + \varepsilon^{-2} p(x/\varepsilon)$, with periodic coefficients. For small ε, we study the behavior of the resolvent of A_ε in a regular point close to the edge of a spectral gap. We obtain approximation of this resolvent in the "energy" norm with error $O(\varepsilon)$. Approximation is described in terms of the spectral characteristics of the operator at the edge of the gap.

С.-Петербургский государственный университет, Университетская наб., д. 7/9, 199034, С.-Петербург, Россия
E-mail: st062829@student.spbu.ru
E-mail: v.slouzh@spbu.ru
E-mail: t.suslina@spbu.ru

Поступило 29 октября 2022 г.