И. Н. Демшин, Ю. В. Дымченко, В. А. Шлык, Критерии нуль-множеств для весовых соболевских пространств, *Зап. научн. сем. ПОМИ*, 2001, том 276, 52–82

Записки научных
семинаров ПОМИ
Том 276, 2001 г.

И. Н. Демшин, Ю. В. Дымченко, В. А. Шлык

КРИТЕРИИ НУЛЬ-МНОЖЕСТВ ДЛЯ ВЕСОВЫХ СОБОЛЕВСКИХ ПРОСТРАНСТВ

1. Введение

Работа посвящена изучению точных функциональных, емкостных и метрических характеристик нуль-множеств для весовых соболевских пространств $L^1_{p,w}(G)$ с весом w, удовлетворяющим A_p-условию Макенхаупта. В идейном плане она следует работе Л. Альфорса и А. Бейрлинга [1] и продолжает исследования по теории устранимых множеств из [2–7]. Основные результаты этой статьи были анонсированы в [8].

Среди полученных свойств нуль-множеств пространства $L^1_{p,w}(G)$ особо выделим выполнение условия ε-обхвата. Для NED-множеств, устранимых для регулярных функций с ограниченным интегралом Дирихле [1], это условие было доказано с помощью аппарата конформных отображений в [9].

В дальнейшем G – открытое множество в n-мерном евклидовом пространстве R^n, $n \geqslant 2$; $\mathcal{H}_k$, $\mathcal{L}_k$ – соответственно k-мерные меры Хаусдорфа, Лебега; A_p – класс локально интегрируемых функций $w : R^n \mapsto (0, \infty)$, удовлетворяющих условию Макенхаупта [10]

$$\sup \frac{1}{\mathcal{L}_n(Q)} \int\limits_Q w dx \left(\frac{1}{\mathcal{L}_n(Q)} \int\limits_Q w^{\frac{1}{1-p}} dx \right)^{p-1} < \infty, \tag{1}$$

где sup берется по всем координатным кубам $Q \subset R^n$, $p \in (1, \infty)$.

Рассмотрим пространство $L^1_{p,w}(G)$ функций $u : G \mapsto (-\infty, \infty)$, локально интегрируемых в G, имеющих обобщенные частные производные и таких, что $\int\limits_G |\nabla u|^p w dx < \infty$. Б $L^1_{p,w}(G)$ введем по-

Работа выполнена при финансовой поддержке РФФИ (грант No. 99-01-00-443) и программы "Университеты России" (грант No. 991282).

лунорму

$$\|u\|_{L^1_{p,w}(G)} = \|u\| = \left(\int\limits_G |\nabla u|^p w dx\right)^{\frac{1}{p}}.$$

Известен результат Фейбса, Кенига и Серапиони (см. [11, стр. 171]): существуют положительные постоянные C и δ такие, что для всех $u \in C_0^\infty(G)$ и $q \in [p, \frac{pn}{n-1} + \delta]$ верны оценки

$$\left(\int\limits_G |u|^q w dx\right)^{\frac{1}{q}} \leqslant C \left(\int\limits_G |\nabla u|^p w dx\right)^{\frac{1}{p}}.$$

Это вместе с (1) показывает, что $\forall f \in L^1_{p,w}(G)$ принадлежит $L^1_{1,loc}(G)$, фактор-пространство пространства $L^1_{p,w}(G)$ по тождественно постоянным функциям банахово и полунорма $\|\cdot\|_{L^1_{p,w}(G)}$ является в нем нормой. Здесь под тождественно постоянной функцией в G будем понимать функцию, равную константе на каждой компоненте связности G.

Через $\mathcal{L}^p_k(G)$ обозначим класс всех вектор-функций $u = (u_1, \ldots, u_k)$, для которых

$$\|u\|_{\mathcal{L}^p_k(G)} = \left(\int\limits_G \left(\sum_{i=1}^k |u_i(x)|^2\right)^{p/2} dx\right)^{1/p} < \infty.$$

Открытые множества G_1 и G_2, $G_1 \subset G_2 \subset R^n$, назовем (p,w)-эквивалентными, если оператор ограничения

$$\theta : L^1_{p,w}(G_2) \mapsto L^1_{p,w}(G_1), \quad \theta u = u|_{G_1},$$

является изоморфизмом векторных пространств $L^1_{p,w}(G_1)$ и $L^1_{p,w}(G_2)$.

Под конденсатором будем понимать набор $(E_0, E_1, G) = (G)$, где E_0, $E_1 \subset \overline{G}$ – непустые непересекающиеся компакты. Определим p-емкость с весом $w \in A_p$ конденсатора (E_0, E_1, G) как

$$C_{p,w}(G) = C_{p,w}(E_0, E_1, G) = \inf \int\limits_G |\nabla u|^p w dx,$$

где inf берется по всем функциям u таким, что $u|_G \in C^\infty(G) \cap L^1_{p,w}(G)$, $u = j$ в некоторой окрестности компакта E_j, $j = 0, 1$. Класс всех таких допустимых функций обозначим

$$\operatorname{Adm}_{p,w}(E_0, E_1, G) = \operatorname{Adm}_{p,w}(G).$$

Пусть $u_0 = \lim\limits_{k\to\infty} u_k$ в $L^1_{p,w}(G)$, где

$$u_k \in \operatorname{Adm}_{p,w}(G) \quad \text{и} \quad \int\limits_G |\nabla u_0|^p w dx = C_{p,w}(G).$$

Тогда u_0 назовем экстремальной функцией для $C_{p,w}(G)$. Компакт $E \subset R^n$ назовем гладким, если он ограничен конечным числом непересекающихся гладких $(n-1)$-мерных многоообразий. Совокупность всех экстремальных функций для $C_{p,w}(E_0, E_1, G)$ с гладкими компактами $E_0, E_1 \subset G$ обозначим $E_{p,w}(G)$.

Замкнутое относительно G множество E назовем $NC_{p,w}$-множеством, если для любой пары гладких непересекающихся компактов $E_0, E_1 \subset G \setminus E$

$$C_{p,w}(E_0, E_1, G \setminus E) = C_{p,w}(E_0, E_1, G).$$

Кривой в R^n назовем образ числового интервала при непрерывном отображении его в R^n.

Пусть дано некоторое семейство Γ кривых в R^n. Определим p-модуль с весом $w \in A_p$ семейства Γ следующим образом:

$$M_{p,w}(\Gamma) = \inf \int\limits_{R^n} \rho^p w dx,$$

где inf берется по всем борелевским функциям $\rho : R^n \mapsto [0, \infty]$ таким, что

$$\int\limits_{R^n} \rho^p w dx < \infty \quad \text{и} \quad \int\limits_\gamma \rho d\mathcal{H}_1 \geqslant 1 \tag{2}$$

для всех кривых $\gamma \in \Gamma$. Класс всех таких допустимых метрик ρ обозначим через $\operatorname{adm}_{p,w}(\Gamma)$.

Для конденсатора (E_0, E_1, G) через $\Gamma(E_0, E_1, G)$ обозначим семейство всех кривых $\gamma \subset G$, соединяющих E_0 и E_1. Тогда p-модуль конденсатора (E_0, E_1, G) с весом $w \in A_p$ определим как

$$M_{p,w}(G) = M_{p,w}(E_0, E_1, G) = \inf_\rho \int\limits_{R^n} \rho^p w dx,$$

где $\rho \in \mathrm{adm}_{p,w}(\Gamma(E_0, E_1, G)) = \mathrm{adm}_{p,w}(E_0, E_1, G)$.

Отметим (см. [12]), что для локально спрямляемой кривой $\gamma \in \Gamma(E_0, E_1, G)$ и ее натурального параметра s, $\rho \in \mathrm{adm}_{p,w}(E_0, E_1, G)$, всегда имеет место неравенство

$$\int\limits_{\gamma} \rho ds \geqslant \int\limits_{\gamma} \rho d\mathcal{H}_1. \tag{3}$$

При этом найдется простая кривая $\gamma_1 \in \Gamma(E_0, E_1, G)$, $\gamma_1 \subset \gamma$, такая, что $\int\limits_{\gamma_1} \rho ds \geqslant \int\limits_{\gamma_1} \rho d\mathcal{H}_1$. Поэтому в (2) второе неравенство можно, не теряя общности, заменить на $\int\limits_{\gamma} \rho ds \geqslant 1$.

Пусть X_i – семейство всех прямых в R^n, параллельных координатной оси x_i, $i = 1, \ldots, n$. Будем говорить, что компакт $E \subset R^n$, $\mathcal{L}_n(E) = 0$, удовлетворяет условию ε-обхвата с весом $w \in A_p$ относительно семейства X_i, если для любого $\varepsilon > 0$ и для каждой борелевской функции $\rho : R^n \mapsto [0, \infty]$, локально ограниченной в $R^n \setminus E$, $\rho w^{\frac{1}{p}} \in \mathcal{L}_1^p(R^n \setminus E)$, для $M_{p,w}$-почти всех прямых $l \in X_i$ выполняются следующие требования.

1. $\mathcal{H}_1(l \cap E) = 0$.

2. Можно указать конечную последовательность непересекающихся интервалов $(a_k, b_k) \subset l$, $k = 1, \ldots, s$, где $\bigcup\limits_{k=1}^{s} (a_k, b_k) \supset l \cap E$, для которой существует соответствующая последовательность дуг $\gamma_k \subset R^n \setminus E$ с концами в точках a_k, b_k такая, что

$$\sum_{k=1}^{s} \int\limits_{\gamma_k} \rho d\mathcal{H}_1 < \varepsilon$$

и $\mathcal{H}_1(\bigcup\limits_{i=1}^{k} (a_k, b_k)) < \varepsilon$.

2. Предварительные результаты

Пусть γ, γ_1, γ_2, $\ldots$ – кривые в R^n. Будем говорить, что γ_k сходятся к γ при $k \to \infty$ ($\gamma_k \to \gamma$), если можно указать параметризации $x_k : (0, 1) \mapsto \gamma_k$, $k = 1, 2, \ldots$, $x : (0, 1) \mapsto \gamma$ такие, что $x_k(t) \rightrightarrows x(t)$ на $(0, 1)$.

Лемма 1. *Пусть γ_k – последовательность кривых равномерно ограниченной длины, содержащаяся в некотором шаре. Тогда существует кривая γ и подпоследовательность γ_{k_l} такие, что $\gamma_{k_l} \to \gamma$.*

Доказательство. Пусть S_k – длины кривых γ_k и $x_k(s)$, $0 < s < S_k$ – параметризации γ_k посредством длины дуги. Можно считать, что последовательность $\{S_k\}$ имеет предел.

Если существует бесконечное множество длин S_k, равных нулю, то соответствующие γ_k являются точками, имеющими предельную точку. Таким образом, в этом случае теорема доказана. Поэтому считаем, что все $S_k > 0$.

Обозначим $\widetilde{x}_k(t) = x_k(tS_k)$, $0 < t < 1$. Функции $\widetilde{x}_k(t)$ равномерно ограничены и липшицевы с одной и той же константой, следовательно, по теореме Асколи–Арцела можно извлечь подпоследовательность $\widetilde{x}_{k_l}(t)$, равномерно сходящуюся к непрерывной функции $x(t)$, которая задает некоторую кривую γ.

Лемма 2. *Пусть γ_k – кривые равномерно ограниченной длины, $\gamma_k \to \gamma$ и функция ρ неотрицательна и полунепрерывна снизу в R^n. Тогда*

$$\int\limits_{\gamma} \rho ds \leqslant \liminf_{k\to\infty} \int\limits_{\gamma_k} \rho ds.$$

Доказательство. По условию леммы, существуют параметризации $x_k(t)$ и $x(t)$, $0 \leqslant t \leqslant 1$, кривых γ_k и γ такие, что $x_k(t) \rightrightarrows x(t)$ при $k \to \infty$ на $[0,1]$. Пусть $0 < t' < t'' < 1$. Обозначим через $s_k(t',t'')$ (соответственно, $s(t',t'')$) длину части $\gamma_k(t',t'')$ кривой γ_k (соответственно, части $\gamma(t',t'')$ кривой γ) от $t = t'$ до $t = t''$. Для $t' = t_0 < t_1 < \cdots < t_m = t''$ имеем:

$$\sum_{i=1}^{m} |x(t_i) - x(t_{i-1})| = \lim_{k\to\infty} \sum_{i=1}^{m} |x_k(t_i) - x_k(t_{i-1})| \leqslant \liminf_{k\to\infty} s_k(t',t''),$$

и поэтому $s_k(t',t'') \leqslant \liminf\limits_{k\to\infty} s_k(t',t'')$.

Рассмотрим сначала случай, когда ρ непрерывна в R^n. Для данного $\varepsilon > 0$ выберем $0 < t_1 < \cdots < t_m = 1$ так, чтобы $|\rho(x(t')) - \rho(x(t''))| < \varepsilon$ при $t', t'' \in [t_{i-1}, t_i]$ для любого i, $1 \leqslant i \leqslant m$. Тогда для любых $\tau_i \in [t_{i-1}, t_i]$, $i = 1, \ldots, m$,

$$\left| \int\limits_{\gamma} \rho ds - \sum_{i=1}^{m} \rho(x(\tau_i)) s(t_{i-1}, t_i) \right| \leqslant \sum_{i=1}^{m} \int\limits_{\gamma(t_{i-1},t_i)} |\rho(x(t)) - \rho(x(\tau_i))| ds \leqslant \varepsilon S,$$

где S – длина кривой γ. Найдем точку $t_i^k \in [t_{i-1}, t_i]$ такую, что

$$\int\limits_{\gamma_k(t_{i-1},t_i)} \rho ds = \rho(x_k(t_i^k)) s_k(t_{i-1}, t_i).$$

Пусть τ_i – точка отрезка $[t_{i-1}, t_i]$ такая, что $\rho(x(\tau_i)) = \min\limits_{t_{i-1}\leqslant t\leqslant t_i} \rho(x(t))$. Так как $\rho(x_k(t)) \rightrightarrows \rho(x(t))$, то $\liminf\limits_{k\to\infty} \rho(x_k(t_i^k)) \geqslant \rho(x(\tau_i))$. Отсюда выводим:

$$\liminf_{k\to\infty} \int\limits_{\gamma_k} \rho ds = \liminf_{k\to\infty} \sum_{i=1}^{m} \int\limits_{\gamma_k(t_{i-1},t_i)} \rho ds \geqslant$$

$$\geqslant \sum_{i=1}^{m} \liminf_{k\to\infty} \rho(x_k(t_i^k)) s_k(t_{i-1}, t_i) \geqslant$$

$$\sum_{i=1}^{m} \rho(x(\tau_i)) s(t_{i-1}, t_i) \geqslant \int\limits_{\gamma} \rho ds - \varepsilon S.$$

В силу произвольности ε лемма доказана для непрерывной функции ρ.

Если теперь ρ – произвольная полунепрерывная снизу функция, то можно подобрать монотонно возрастающую последовательность непрерывных функций $\rho_m \to \rho$. Имеем:

$$\int\limits_{\gamma} \rho_m ds \leqslant \liminf_{k\to\infty} \int\limits_{\gamma_k} \rho_m ds \leqslant \liminf_{k\to\infty} \int\limits_{\gamma_k} \rho ds.$$

Переходя к пределу при $m \to \infty$, получаем утверждение леммы.

Лемма 3. *Пусть функция ρ положительна и полунепрерывна снизу в R^n, γ_k – последовательность кривых, у которых концевые точки $x_k \to x_0 \neq \infty$ и $y_k \to y_0$, и интегралы $\int\limits_{\gamma_k} \rho ds$ равномерно ограничены.*

Если $y_0 = \infty$ (соответственно, $y_0 \neq \infty$ и не существует подпоследовательности, содержащейся в некотором шаре), то существует подпоследовательность γ_{k_l} и кривая γ, соединяющая x_0 и y_0 и не проходящая через ∞ (соответственно, проходящая через ∞ только один раз), такая, что

$$\int\limits_{\gamma} \rho ds \leqslant \liminf_{k\to\infty} \int\limits_{\gamma_k} \rho ds,$$

и любая конечная дуга кривой γ является пределом некоторых конечных дуг кривых γ_{k_l}.

Доказательство. Сначала рассмотрим случай, когда $y_k \to y_0 = \infty$. Можно считать, что $|x_k - x_0| \leqslant 1$, $k = 1, 2, \dots$ и ни одна из кривых γ_k не содержится в шаре $|x - x_0| \leqslant 1$. Пусть γ_{1k} – часть γ_k между x_k и первой точкой пересечения γ_k с $|x - x_0| = 1$. По предыдущей лемме существует подпоследовательность γ_{1k_m}, которая сходится к некоторой кривой γ^1, соединяющей x_0 и $|x - x_0| = 1$, и

$$\int\limits_{\gamma^1} \rho ds \leqslant \liminf_{m\to\infty} \int\limits_{\gamma_{1k_m}} \rho ds \leqslant \lim_{k\to\infty} \int\limits_{\gamma_k} \rho ds = a.$$

Далее рассмотрим только те кривые γ_{k_m}, которые пересекают сферу $|x - x_0| = 2$. Как и выше, получим кривую γ^2, которая соединяет x_0 и $|x - x_0| = 2$ и $\int\limits_{\gamma^2} \rho ds \leqslant a$. Очевидно, что $\gamma^1 \subset \gamma^2$. Продолжая этот процесс, получим кривые γ^i, $i = 1, 2, \dots,$ и кривую γ такую, что $\gamma^1 \subset \gamma^2 \subset \dots \subset \gamma$ и $\int\limits_{\gamma} \rho ds \leqslant a$. Так как для любого компакта K длины $\gamma^i \cap K$ ограничены, то γ соединяет x_0 и $y_0 = \infty$.

Пусть $y_0 \neq \infty$ и не существует подпоследовательности кривых, содержащейся в некотором шаре. Если кривая γ_k проходит через ∞, то обозначим через γ_k' часть этой кривой, соединяющую x_k и ∞. Если γ_k не проходит через ∞, то пусть $|x - x_0| \leqslant R_k$ – наименьший шар с центром в x_0, содержащий γ_k, и γ_k' – часть кривой γ_k от x_0 до первой точки пересечения с $|x - x_0| = R_k$.

Положим $\gamma_k'' = \gamma_k \setminus \gamma_k'$. Возьмем последовательность натуральных чисел k_m такую, что существуют пределы $\alpha = \lim\limits_{m\to\infty} \int\limits_{\gamma_{k_m}'} \rho ds$ и $\beta = \lim\limits_{m\to\infty} \int\limits_{\gamma_{k_m}''} \rho ds$. Используя доказанное выше, получим кривую γ', соединяющую x_0 с ∞, и кривую γ'', соединяющую ∞ с y_0. Справедливы также неравенства $\int\limits_{\gamma'} \rho ds \leqslant \alpha$ и $\int\limits_{\gamma''} \rho ds \leqslant \beta$. Тогда кривая $\gamma = \gamma' \cup \gamma''$ соединяет x_0 с y_0, проходит через ∞ один раз и

$$\int\limits_{\gamma} \rho ds = \int\limits_{\gamma'} \rho ds + \int\limits_{\gamma''} \rho ds \leqslant \alpha + \beta = a.$$

Далее, из построения кривой γ видно, что любая ее конечная дуга является пределом конечных дуг некоторой подпоследовательности γ_{k_l}. Лемма доказана.

Следующая теорема устанавливает равенство p-емкости и p-модуля конденсатора.

Теорема 1. *Пусть* (E_0, E_1, G) – *конденсатор. Тогда*

$$M_{p,w}(E_0, E_1, G) = C_{p,w}(E_0, E_1, G).$$

Доказательство проведем для более общей ситуации, когда $G \subset \overline{R^n} = R^n \cup \{\infty\}$.

Докажем сначала неравенство

$$M_{p,w}(E_0, E_1, G) \leqslant C_{p,w}(E_0, E_1, G). \tag{4}$$

Возьмем произвольную функцию v, допустимую для $C_{p,w}(E_0, E_1, G)$. Покажем, что функция

$$\rho(x) = \begin{cases} |\nabla v(x)|, & x \in G \setminus \{\infty\}, \\ 0, & x \in R^n \setminus G \end{cases}$$

допустима для $M_{p,w}(E_0, E_1, G)$. Пусть $\gamma \in \Gamma = \Gamma(E_0, E_1, G)$ и $x(s)$, $0 < s < S$, – ее параметризация посредством длины дуги такая, что $x(0) \in E_0$, $x(S) \in E_1$. Для любых s_0, s_1 таких, что $0 < s_0 < s_1 < S$, имеем

$$\int\limits_0^S \left| \frac{dv}{ds}(x(s)) \right| ds \geqslant \int\limits_{s_0}^{s_1} \left| \frac{dv}{ds}(x(s)) \right| ds \geqslant$$

$$\geqslant \left| \int\limits_{s_0}^{s_1} \frac{dv}{ds}(x(s)) ds \right| = \left| v(x(s_1)) - v(x(s_0)) \right|.$$

В силу произвольности s_0, s_1 получаем, что

$$\int\limits_\gamma \left| \frac{dv}{ds}(x(s)) \right| ds \geqslant 1.$$

Таким образом, функция $\rho(x)$ допустима для $M_{p,w}(E_0, E_1, G)$. Следовательно,

$$M_{p,w}(E_0, E_1, G) \leqslant \int \rho^p w dx = \int |\nabla v|^p w dx.$$

В силу произвольности функции v неравенство (4) доказано.

Докажем теперь обратное неравенство. В определении модуля конденсатора при ограничениях, наложенных в формулировке теоремы, инфимум можно брать по функциям, положительным в $\overline{G}\setminus\{\infty\}$. Действительно, взяв непрерывную в G функцию f, положительную в любой ограниченной части $\overline{G}$ и такую, что $\int\limits_G f^p w dx$ меньше любого заданного числа, образуем новую функцию $\rho' = \max(\rho, f)$. Она будет удовлетворять всем вышеперечисленным условиям и $\int\limits_G \rho'^p w dx$ будет сколь угодно мало отличаться от $\int\limits_G \rho^p w dx$. Также можно ограничиться функциями, полунепрерывными снизу в R^n. Это возможно в силу того факта, что любую борелевскую функцию можно приблизить убывающей последовательностью полунепрерывных снизу функций.

Итак, пусть $M_{p,w}(E_0, E_1, G) < \infty$, ρ допустима для $M_{p,w}(E_0, E_1, G)$, непрерывна в $G\setminus(E_0\cup E_1)$, полунепрерывна снизу в R^n, положительна в $\overline{G}\setminus(E_0\cup E_1\cup\{\infty\})$ и $\int \rho^p w dx < M_{p,w}(E_0, E_1, G) + \frac{\varepsilon}{2}$. Пусть также G_{ik}, $k = 1, 2, \ldots,$ – открытые множества, исчерпывающие снаружи E_i, $i = 0, 1$ (т. е. $\overline{G_{ik}} \subset G_{i,k+1}$, $k = 1, 2, \ldots$, $\bigcap\limits_{k=1}^{\infty} G_{ik} = E_i$, $i = 0, 1$), и такие, что $G_{01}\cap G_{11} = \emptyset$. Считаем, что $\infty \notin \partial G_{ik}$, $i = 0, 1$, $k = 1, 2, \ldots$, и, если $\infty \in \overline{G}\setminus(E_0\cup E_1)$, то пусть $\infty \in \overline{G}\setminus(G_{01}\cup G_{11})$.

Обозначим $V_{01} = V_{11} = \overline{G}\setminus(G_{01}\cup G_{11})$, $V_{ik} = (G_{i,k-1}\setminus G_{ik})\cap G$, $V_k = V_{0k}\cup V_{1k}$, $\alpha_k = \operatorname{dist}(\partial G_{0k}\cup\partial G_{1k}, \partial G_{0,k+1}\cup\partial G_{1,k+1}) > 0$, $k \geqslant 1$, $i = 0, 1$.

Возьмем последовательность ε_k такую, что

$$2^{p+1}\sum_{k=1}^{\infty}\varepsilon_k < \varepsilon, \qquad \frac{\varepsilon_k}{\inf\limits_{V_k\cap G}\rho} < \alpha_k, \qquad k = 2, 3, \ldots. \tag{5}$$

Предположим сначала, что $\partial G\setminus(E_0\cup E_1) \neq \emptyset$.

Пусть Δ_k, $k \geqslant 1$ – исчерпание области G изнутри открытыми множествами, т. е. $\overline{\Delta_k} \subset \Delta_{k+1}$, $\bigcup\limits_{k=1}^{\infty}\Delta_k = G$. Возьмем k_l настолько большим, что

$$\int\limits_{B_{k_l}} \rho^p w dx < \varepsilon_l^{p+1} \tag{6}$$

при $l \geqslant 1$, где $B_{k_1} = (G \setminus \Delta_{k_1}) \cap (\overline{V}_1 \cup V_2)$, $B_{k_l} = (G \setminus \Delta_{k_l}) \cap (V_{l-1} \cup \overline{V}_l \cup V_{l+1})$, $l \geqslant 2$. Положим

$$B = \bigcup_l B_{k_l}.$$

В случае $\partial G \subset E_0 \cup E_1$ полагаем $B = \emptyset$. Кроме того, если $\infty \in G \setminus (E_0 \cup E_1)$, то можно считать, что $\infty \in V_1 \setminus B$.

Пусть $W_l = B \cap G \cap V_l$. Введем функцию

$$\rho_1 = \begin{cases} \dfrac{\rho}{\varepsilon_k}, & x \in W_k, \\ 0, & x \in \overline{R^n} \setminus \bigcup\limits_{k=1}^{\infty} W_k. \end{cases}$$

Функция $\rho_2 = \rho + \rho_1$ допустима для $M_{p,w}(E_0, E_1, G)$ и

$$\sum_{k=1}^{\infty} \int\limits_{W_k} \rho_2^p w dx = \sum_{k=1}^{\infty} \int\limits_{W_k} \left(\left(1 + \frac{1}{\varepsilon_k} \right) \rho \right)^p w dx \leqslant$$

$$\leqslant \sum_{k=1}^{\infty} \int\limits_{W_k} \left(\frac{2\rho}{\varepsilon_k} \right)^p w dx = 2^p \sum_{k=1}^{\infty} \varepsilon_k^{-p} \int\limits_{W_k} \rho^p w dx < \frac{\varepsilon}{2}$$

в силу (5) и (6). Отсюда

$$\int\limits_G \rho_2^p w dx = \int\limits_{G \setminus B} \rho^p w dx + \sum_{k=1}^{\infty} \int\limits_{W_k} \rho_2^p w dx < M_{p,w}(E_0, E_1, G) + \varepsilon.$$

Покажем, что

$$\exists k : \forall \gamma \in \Gamma_k \quad \int\limits_{\gamma} \rho_2 ds > 1 - \varepsilon, \tag{7}$$

где Γ_k – семейство кривых, соединяющих G_{0k} и G_{1k} в G.

Предположим противное, т. е. что существуют последовательность натуральных чисел k_l и $\gamma_l \in \Gamma_{k_l}$ такие, что $\int\limits_{\gamma_l} \rho_2 ds \leqslant 1 - \varepsilon, \quad l = 1, 2, \ldots$

Если область G не содержит ∞, то ρ_2 ограничена снизу положительной константой. Значит, $s(\gamma_l)$ ограничены сверху, а поэтому, по лемме 2, существует кривая $\gamma \subset \overline{G}$, соединяющая E_0 и E_1

и такая, что некоторая подпоследовательность $\gamma_{l_m} \to \gamma$. Так как ρ_2 непрерывна в $G \setminus B$ и полунепрерывна снизу в $B \cup \overline{G}$, то, разбивая кривую γ на компоненты, лежащие в $G \setminus B$, и компоненты из $B \cup \overline{G}$ и применяя неравенство из леммы 2 отдельно к каждой компоненте связности кривой γ, получим такое же неравенство для всей кривой γ.

Если же $\infty \in G$, то, применяя лемму 3, получим подпоследовательность кривых γ_{l_m} и кривую γ, соединяющую E_0 и E_1 в $\overline{G}$, любая конечная дуга которой является пределом некоторых конечных дуг кривых γ_{l_m}, и соответствующее неравенство из леммы 3. Обозначим полученную последовательность кривых γ_{l_m} снова через γ_l.

Пусть $\tau = \gamma \setminus B$. Так как $\rho_2 = \rho$ на $G \setminus B$, то

$$1 - \varepsilon \geqslant \liminf_{l\to\infty} \int\limits_{\gamma_l} \rho_2 ds \geqslant \int\limits_{\gamma} \rho_2 ds \geqslant \int\limits_{\tau} \rho_2 ds = \int\limits_{\tau} \rho ds. \tag{8}$$

Если $B = \emptyset$, то $\tau \in \Gamma$, откуда следует, что $\int\limits_{\tau} \rho ds \geqslant 1$, что противоречит предыдущему неравенству.

Предположим, что $B \neq \emptyset$ и что существует подкривая $\gamma' \subset \gamma$, которая соединяет ∂G_{k-1} и ∂G_k в $V_k \cap B$ для некоторого $k \geqslant 2$. Как показано выше, существуют $\gamma'_l \subset \gamma_l : \gamma'_l \to \gamma'$. Пусть $\zeta_l(t)$ – параметризация γ'_l и $\zeta(t)$ – параметризация γ' такие, что $\zeta_l(t) \rightrightarrows \zeta(t)$. Имеем:

$$\int\limits_{\gamma'_l} \rho ds \leqslant \varepsilon_k \int\limits_{\gamma'_l} \rho_1 ds \leqslant \varepsilon_k \int\limits_{\gamma'_l} \rho_2 ds \leqslant \varepsilon_k (1-\varepsilon) < \varepsilon_k.$$

Получаем, что

$$s(\gamma'_l) < \frac{\varepsilon_k}{\inf\limits_{V_k \cap G} \rho},$$

откуда следует неравенство

$$\alpha_k \leqslant s(\gamma') \leqslant \liminf_{l\to\infty} s(\gamma'_l) < \frac{\varepsilon_k}{\inf\limits_{V_k \cap G} \rho},$$

что противоречит (5). Таким образом мы получили, что не существует дуги $\gamma' \subset \gamma$, соединяющей ∂G_{k-1} и ∂G_k в $V_k \cap B$ для любого $k \geqslant 2$.

Пусть $\tau_1 = \gamma \cap W_1$. Для любой компоненты τ_1 существует дуга $\tau_{1,l}$ кривой γ в $W_1 \cup W_2$, содержащая эту компоненту и такая, что ее концы лежат на ∂B. Таких дуг не более чем счетное число.

Пусть U – окрестность $\partial(\overline{W_1 \cup W_2}) \cap \partial B$ такая, что $U \subset \overline{U} \subset G$. Тогда $\delta = \operatorname{dist}(\partial U, \overline{W_1 \cup W_2} \cap \partial B) > 0$ и $\rho_2 \leqslant m_1$ на U.

Пусть L – множество тех l, для которых $\tau_{1,l} \cap \partial B \neq \emptyset$ и $\tau_{1,l} \cap \partial U \neq \emptyset$. Получим, что

$$1 - \varepsilon \geqslant \sum_{l \in L} \int\limits_{\tau_{1,l}} \rho_2 ds \geqslant \inf_U \rho \sum_{l \in L} \delta > 0,$$

т.е. множество L конечно.

Выберем l_1 такое, чтобы $l_1 > \sup L$ и

$$\int\limits_{e'} \rho_2 ds < \varepsilon_1, \qquad e' = \bigcup_{l > l_1} \tau_{1,l} = \zeta(\bigcup_{l > l_1} [a_l, b_l]) \in G. \tag{9}$$

Для каждого l, $1 \leqslant l \leqslant l_1$, выберем c_l, d_l такие, что $a_l < c_l < d_l < b_l$, отрезки $\overline{\zeta(a_l)\zeta(c_l)}$, $\overline{\zeta(d_l)\zeta(b_l)}$ лежат в U и

$$s(\overline{\zeta(a_l)\zeta(c_l)} \cup \overline{\zeta(d_l)\zeta(b_l)}) < \frac{\varepsilon_1}{l_1 m_1}.$$

Возьмем j_1 настолько большим, что

$$s(\overline{\zeta(a_l)\zeta_{j_1}(c_l)} \cup \overline{\zeta_{j_1}(d_l)\zeta(b_l)}) < \frac{\varepsilon_1}{l_1 m_1}.$$

Обозначим первый отрезок в объединении слева через $e_{1,l}$, а второй через $e_{2,l}$. Из полученного неравенства выводим:

$$\sum_{l=1}^{l_1} \left(\int\limits_{e_{1,l}} \rho_2 ds + \int\limits_{e_{2,l}} \rho_2 ds \right) < \varepsilon_1. \tag{10}$$

Пусть $\sigma_l = \zeta_{j_1}([c_l, d_l])$. Тогда

$$\sum_{l=1}^{l_1} \int\limits_{\sigma_l} \rho_2 ds \leqslant \int\limits_{\gamma_{j_1}} \rho_2 ds \leqslant 1 - \varepsilon < 1.$$

Поэтому

$$\sum_{l=1}^{l_1} \int\limits_{\sigma_l} \rho ds = \sum_{l=1}^{l_1} \left(\int\limits_{\sigma_l \cap W_1} \rho ds + \int\limits_{\sigma_l \cap W_2} \rho ds \right) \leqslant$$

$$\leqslant \sum_{l=1}^{l_1} \left(\varepsilon_1 \int\limits_{\sigma_l \cap W_1} \rho_1 ds + \varepsilon_2 \int\limits_{\sigma_l \cap W_2} \rho_1 ds \right) < \varepsilon_1 + \varepsilon_2. \tag{11}$$

Обозначим

$$\widetilde{\tau_1} = \bigcup_{l=1}^{l_1} (e_{1,l} \cup \sigma_l \cup e_{2,l}) \cup \bigcup_{l > l_1} \tau_{1,l}.$$

Тогда в силу (9)–(11)

$$\int\limits_{\widetilde{\tau_1}} \rho ds < 3\varepsilon_1 + \varepsilon_2.$$

Далее, положим $\tau_2 = \gamma \cap W_2$ и рассмотрим те же дуги в $\overline{W_2 \cup W_3}$ что и выше, исключая лишь ранее учтенные. Так же как и выше строим $\widetilde{\tau_2}$ и получаем, что

$$\int\limits_{\widetilde{\tau_2}} \rho ds < 3\varepsilon_2 + \varepsilon_3.$$

Продолжая этот процесс, находим $\widetilde{\tau_3}$, $\widetilde{\tau_4}, \ldots$. Из изложенного выше следует, что

$$\sum_{k=1}^{\infty} \int\limits_{\widetilde{\tau_k}} \rho ds < 4 \sum_{k=1}^{\infty} \varepsilon_k < \varepsilon.$$

Так как кривая $\widetilde{\gamma} = \tau \cup \bigcup\limits_{k=1}^{\infty} \widetilde{\tau_k} \in \Gamma$, то $\int\limits_{\widetilde{\gamma_k}} \rho ds \geqslant 1$, откуда следует, что

$$\int\limits_{\tau} \rho ds > 1 - \varepsilon.$$

Это противоречит неравенству (8). Следовательно, (7) справедливо.

Введем функцию

$$\rho' = \begin{cases} \dfrac{\rho_2}{1-\varepsilon}, & x \in G \setminus (G_{0k} \cup G_{1k}), \\ 0, & x \notin G \setminus (G_{0k} \cup G_{1k}). \end{cases}$$

Она локально ограничена на $G \setminus (E_0 \cup E_1)$. Покажем, что функция

$$v(x) = \inf \int\limits_{\gamma(x)} \rho' ds,$$

где инфимум берется по всем кривым $\gamma(x)$, соединяющим G_{0k} с точкой x, локально липшицева в $G\setminus(\overline{G_{0k}\cup G_{1k}})$ и почти всюду в $G\setminus(\overline{G_{0k}\cup G_{1k}})$ удовлетворяет неравенству

$$|\nabla v|\leqslant\rho'.$$

Возьмем точку x и некоторый шар $B(x,r)$, принадлежащие $G\setminus(\overline{G_{0k}\cup G_{1k}})$. Пусть $x'\in B(x,r)$. Имеем (интеграл берется по отрезку $[x,x']$):

$$v(x')-v(x)\leqslant\int\limits_x^{x'}\rho' ds\leqslant|x'-x|\max_{B(x,r)}\rho'.$$

Деля на $|x'-x|$, устремляя x' к x и r к нулю, получаем требуемое неравенство.

Кроме того, $v(x)=0$ на E_0 и $v(x)\geqslant 1$ на E_1. Таким образом, функция $\widetilde{v}=\min(1,v)$ допустима для $C_{p,w}(E_0,E_1,G)$. Имеем следующую цепочку неравенств:

$$C_{p,w}(E_0,E_1,G)\leqslant\int\limits_G|\nabla\widetilde{v}|^p w dx\leqslant\int\limits_G|\nabla v|^p w dx\leqslant$$

$$\leqslant\int\rho'^p w dx\leqslant\int\left(\frac{\rho_2}{1-\varepsilon}\right)^p w dx=$$

$$=\frac{1}{(1-\varepsilon)^p}\int\rho_2^p w dx\leqslant\frac{1}{(1-\varepsilon)^p}(M_{p,w}(E_0,E_1,G)+\varepsilon).$$

В силу произвольности ε теорема доказана.

Теорема 2. *Линейная оболочка множества $E_{p,w}(G)$ всюду плотна в $L^1_{p,w}(G)$.*

Доказательство проведем для ограниченного открытого множества G. В случае, когда G – неограниченное множество, в нижеследующих выкладках евклидово расстояние $\operatorname{dist}(\cdot,\cdot)$ необходимо заменить на сферическое расстояние.

Покажем, что любую функцию $f\in L^1_{p,w}(G)$ можно с любой степенью точности приблизить линейными комбинациями элементов из $E_{p,w}(G)$. Известно, что любая функция из $L^1_{p,w}(G)$ аппроксимируется гладкими функциями по норме этого пространства. Используя стандартные свойства срезки и усреднения можно считать, что функция f ограничена (см. [12]). Поэтому доказательство будем проводить для гладких ограниченных функций.

Доказательство разобьем на три этапа.

1. Сначала покажем, что любую гладкую функцию можно приблизить кусочно-экстремальными функциями по норме пространства $L^1_{p,w}(G)$. Определение кусочно-экстремальной функции и доказательство первого этапа проведем по схеме, предложенной в работе [13, стр. 195]. Пусть f – гладкая ограниченная функция в G. Фиксируем $\varepsilon > 0$ и выбираем разбиение τ отрезка $[\max_{x\in G} f(x), \min_{x\in G} f(x)]$ вещественными числами $c_k (k = 0, 1, \dots, m)$ такое, что $\min_{x\in G} f(x) = c_0 < c_1 < \dots < c_m = \max_{x\in G} f(x)$ и $c_{k+1} - c_k < \varepsilon$. Обозначим $l_k = \{x \in G : f(x) = c_k\}$. Можно считать, что l_k являются гладкими многообразиями, поскольку по теореме Сарда этому условию удовлетворяют почти все значения функции f. Обозначим $V_k = \{x \in G : f(x) < c_k\}$.

Определим $p-$емкость с весом w пары $(\overline{V}_{k-1}, (G \setminus V_k))$ следующим образом. Для $\varepsilon > 0$ рассмотрим множества

$$F_\varepsilon = \{x \in G : x \in \overline{V}_{k-1} \text{ и } \operatorname{dist}(x, \partial G) \geqslant \varepsilon\}$$

и

$$E_\varepsilon = \{x \in G : x \in G \setminus V_k \text{ и } \operatorname{dist}(x, \partial G) \geqslant \varepsilon\}.$$

Возьмем убывающую последовательность ε_m такую, что ε_m стремится к нулю при $m \to \infty$ и построим множества $F_{\varepsilon_m} = F_m$, и $E_{\varepsilon_m} = E_m$.

Любая допустимая функция для пары (F_{m+1}, E_{m+1}) является допустимой для (F_m, E_m). Поэтому

$$C_{p,w}(F_m, E_m, G) \leqslant C_{p,w}(F_{m+1}, E_{m+1}, G).$$

Таким образом, получим возрастающую последовательность $C_{p,w}(F_m, E_m, G)$. Следовательно, существует $\lim\limits_{m\to\infty} C_{p,w}(F_m, E_m, G)$. Этот предел мы и будем понимать как p-емкость конденсатора $C_{p,w}(\overline{V}_{k-1}, (G \setminus V_k), G)$.

Пусть v_k – экстремальная функция пары $(\overline{V}_{k-1}, (G \setminus V_k))$. Заметим, что $g_k(x) = \frac{f(x) - c_{k-1}}{c_k - c_{k-1}}$ является допустимой для пары $(\overline{V}_{k-1}, (G \setminus V_k))$, если положить $g_k(x) = 0$ для всех $x \in V_{k-1}$ и $g_k(x) = 1$ для всех $x \in (G \setminus V_k)$. Рассмотрим функцию $v_\tau = c_0 + \sum_{k=1}^m (c_k - c_{k-1}) v_k$,

$$v_\tau \in L^1_{p,w}(G) \quad \text{и} \quad \|v_\tau\|^p_{L^1_{p,w}(G)} = \sum_{k=1}^m |c_k - c_{k-1}|^p \|v_k\|^p_{L^1_{p,w}(G)}.$$

На каждом из множеств $(\overline{V_k} \setminus V_{k-1})$ справедливо неравенство

$$\int\limits_{\overline{V}_k \setminus V_{k-1}} |\nabla v_k|^p w\, dx \leqslant$$

$$\leqslant \int\limits_{\overline{V}_k \setminus V_{k-1}} |\nabla g_k|^p w\, dx = |c_k - c_{k-1}|^{-p} \int\limits_{\overline{V}_k \setminus V_{k-1}} |\nabla f|^p w\, dx.$$

Тогда в G справедливо неравенство

$$\int\limits_G |\nabla v_\tau|^p w\, dx \leqslant \int\limits_G |\nabla f|^p w\, dx,$$

т.е. $\|v_\tau\|_{L^1_{p,w}(G)} \leqslant \|f\|_{L^1_{p,w}(G)}$.

Возьмем последовательность разбиений τ_l отрезка

$$[\max_{x \in G} f(x), \min_{x \in G} f(x)]$$

такую, что последовательность $\varepsilon_l = \varepsilon_{\tau_l}$ стремится к нулю при $l \to \infty$. Получим последовательность $v_l = v_{\tau_l}$. По построению,

$$|f(x) - v_l(x)| \leqslant \max_{k=\overline{1,m}} |c_k - c_{k-1}| < \varepsilon_l.$$

Последовательность v_l равномерно сходится к функции $f(x)$. Последовательность v_l ограничена в $L^1_{p,w}(G)$. Выберем из нее слабо сходящуюся в $L^1_{p,w}(G)$ подпоследовательность v_{l_k}. По свойству полунепрерывности имеем

$$\liminf_{k \to \infty} \|v_{l_k}\|_{L^1_{p,w}(G)} \geqslant \|f\|_{L^1_{p,w}(G)}.$$

Тогда, в силу неравенства $\|v_{l_k}\|_{L^1_{p,w}(G)} \leqslant \|f\|_{L^1_{p,w}(G)}$,

$$\|v_{l_k}\|_{L^1_{p,w}(G)} \to \|f\|_{L^1_{p,w}(G)} \quad \text{при} \quad k \to \infty.$$

Отсюда следует, что $v_{l_k} \to f$ в $L^1_{p,w}(G)$ при $k \to \infty$.

2. Покажем, что любую экстремальную функцию для пары $(\overline{V}_{k-1}, (G \setminus V_k))$ можно с любой степенью точности приблизить экстремальными функциями для $C_{p,w}(F, E, G)$ с компактами $F, E \subset G$ по норме пространства $L^1_{p,w}(G)$. Доказательство проведем по схеме, предложенной в работе [14]. Следуя первой части доказательства, для $\varepsilon > 0$ рассмотрим множества F_ε и E_ε, уже определенные выше. Вновь возьмем убывающую последовательность

ε_m такую, что ε_m стремится к нулю при $m \to \infty$, и построим множества $F_{\varepsilon_m} = F_m$ и $E_{\varepsilon_m} = E_m$. Пусть u_m – экстремальная функция для пары (F_m, E_m). Покажем, что последовательность экстремальных функций сходится в пространстве $L^1_{p,w}(G)$. Действительно, пусть

$$c^p = \lim_{m\to\infty} \int\limits_G |\nabla u_m|^p w\, dx =$$

$$= \lim_{m\to\infty} C_{p,w}(F_m, E_m, G) = C_{p,w}(\overline{V}_{k-1}, (G \setminus V_k), G).$$

Если $c = 0$, то $u_m \to 0$ при $m \to \infty$ в $L^1_{p,w}(G)$. Положим $c > 0$. Если последовательность $\{u_m\}_{m=1}^{\infty}$ не сходится в $L^1_{p,w}(G)$, то можно указать две ее подпоследовательности $\{u_{k_1}\}, \{u_{k_2}\}$ и $\varepsilon > 0$, для которых $\int_G |\nabla u_{k_j}|^p w\, dx = c^p_{k_j} > 0$, где $j = 1, 2$ и $c_{k_j} > 0$ и

$$\left\| \frac{u_{k_1}}{c} - \frac{u_{k_2}}{c} \right\|_{L^1_{p,w}(G)} \geqslant 2\varepsilon. \tag{12}$$

Если $k_1 < k_2$, то функция u_{k_2} является допустимой для пары (F_{k_1}, E_{k_1}). Следовательно, функция $v_k = \frac{1}{2}(u_{k_1} + u_{k_2})$ допустимая для пары (F_{k_1}, E_{k_1}). Тогда $\int_G |\nabla v_k|^p w\, dx \geqslant c^p_{k_1}$. Кроме того, $\|\frac{u_{k_j}}{c_{k_j}}\|_{L^1_{p,w}(G)} = 1$ и $c_{k_j} \to c$ при $k \to \infty$. Отсюда, учитывая непрерывность нормы и неравенство (12), имеем

$$\left\| \frac{u_{k_1}}{c_{k_1}} - \frac{u_{k_2}}{c_{k_2}} \right\|_{L^1_{p,w}(G)} \geqslant \varepsilon. \tag{13}$$

Применяя неравенство Кларксона (см. [15]) к функциям $\frac{\nabla u_{k_1}}{c_{k_1}} w^{\frac{1}{p}}$ и $\frac{\nabla u_{k_2}}{c_{k_2}} w^{\frac{1}{p}}$, имеем при $p \geqslant 2$

$$\left\| \frac{\nabla u_{k_1}}{2c_{k_1}} w^{\frac{1}{p}} + \frac{\nabla u_{k_2}}{2c_{k_2}} w^{\frac{1}{p}} \right\|^p_{\mathcal{L}^p_n(G)} + \left\| \frac{\nabla u_{k_1}}{2c_{k_1}} w^{\frac{1}{p}} - \frac{\nabla u_{k_2}}{2c_{k_2}} w^{\frac{1}{p}} \right\|^p_{\mathcal{L}^p_n(G)} \leqslant$$

$$\leqslant \frac{1}{2} \left\| \frac{\nabla u_{k_1}}{c_{k_1}} w^{\frac{1}{p}} \right\|^p_{\mathcal{L}^p_n(G)} + + \frac{1}{2} \left\| \frac{\nabla u_{k_2}}{c_{k_2}} w^{\frac{1}{p}} \right\|^p_{\mathcal{L}^p_n(G)} =$$

$$= \frac{1}{2} \left\| \frac{u_{k_1}}{c_{k_1}} \right\|^p_{L^1_{p,w}(G)} + \frac{1}{2} \left\| \frac{u_{k_2}}{c_{k_2}} \right\|^p_{L^1_{p,w}(G)} = \frac{1}{2} + \frac{1}{2} = 1.$$

Это и неравенство (13) дает

$$\left\| \frac{\nabla u_{k_1}}{2c_{k_1}} w^{\frac{1}{p}} + \frac{\nabla u_{k_2}}{2c_{k_2}} w^{\frac{1}{p}} \right\|_{\mathcal{L}_n^p(G)} \leqslant 1 - \delta(\varepsilon).$$

Если $1 < p \leqslant 2$, $\frac{1}{p} + \frac{1}{q} = 1$, то

$$\left\| \frac{\nabla u_{k_1}}{2c_{k_1}} w^{\frac{1}{p}} + \frac{\nabla u_{k_2}}{2c_{k_2}} w^{\frac{1}{p}} \right\|^q_{\mathcal{L}_n^p(G)} + \left\| \frac{\nabla u_{k_1}}{2c_{k_1}} w^{\frac{1}{p}} - \frac{\nabla u_{k_2}}{2c_{k_2}} w^{\frac{1}{p}} \right\|^q_{\mathcal{L}_n^p(G)} \leqslant$$

$$\leqslant \left(\frac{1}{2} \left\| \frac{\nabla u_{k_1}}{2c_{k_1}} w^{\frac{1}{p}} \right\|^p_{\mathcal{L}_n^p(G)} + + \frac{1}{2} \left\| \frac{\nabla u_{k_2}}{2c_{k_2}} w^{\frac{1}{p}} \right\|^p_{\mathcal{L}_n^p(G)} \right)^{\frac{1}{p-1}} = 1.$$

Используя данное неравенство и неравенство (13), получаем

$$\left\| \frac{\nabla u_{k_1}}{2c_{k_1}} w^{\frac{1}{p}} + \frac{\nabla u_{k_2}}{2c_{k_2}} w^{\frac{1}{p}} \right\|_{\mathcal{L}_n^p(G)} \leqslant 1 - \delta(\varepsilon). \tag{14}$$

С другой стороны, для достаточно больших k справедливо соотношение

$$1 \leqslant \left\| \frac{\nabla v_k}{c} w^{\frac{1}{p}} \right\|_{\mathcal{L}_n^p(G)} \leqslant \left\| \frac{\nabla u_{k_1}}{2c_{k_1}} w^{\frac{1}{p}} + \frac{\nabla u_{k_2}}{2c_{k_2}} w^{\frac{1}{p}} \right\|_{\mathcal{L}_n^p(G)} + o(1). \tag{15}$$

Сравнивая (13) и (15), приходим к противоречию. Следовательно, существует $\lim\limits_{m\to\infty} u_m$ в $L^1_{p,w}(G)$. Обозначим этот предел через u_0.

Таким образом мы показали, что любую экстремальную функцию для пары $(\overline{V}_{k-1}, (G \setminus V_k))$ можно с любой степенью точности приблизить экстремальными функциями для пар $(F_\varepsilon, E_\varepsilon)$.

3. Покажем, что любую экстремальную функцию для пары $(F_\varepsilon, E_\varepsilon)$ можно с любой степенью точности приблизить экстремальными функциями для $C_{p,w}(F, E, G)$ с гладкими компактами $F, E \subset G$ по норме пространства $L^1_{p,w}(G)$.

Возьмем $\delta > 0$ такое, что $\delta < \min(\frac{1}{2}\varepsilon, \frac{1}{3}\operatorname{dist}(F_\varepsilon, E_\varepsilon)$. Рассмотрим покрытия множеств F_ε и E_ε всевозможными шарами радиуса δ с центрами в точках, принадлежащих F_ε и E_ε, соответственно. F_ε и E_ε – замкнутые и ограниченные множества, следовательно, из этих покрытий можно выделить конечные подпокрытия множеств F_ε и E_ε, соответственно. Обозначим их через F'_ε и E'_ε. Возьмем гладкие функции $\psi_1(x)$ и $\psi_2(x)$, равные единице на F_ε

и E_ε и равные нулю на $G \setminus F'_\varepsilon$ и $G \setminus E'_\varepsilon$, соответственно, и такие, что $0 \leqslant \psi_i(x) \leqslant 1$, $i = 1, 2$. Выберем $0 < a < \frac{1}{2}$ такое, что $\psi_1^{-1}(a)$ и $\psi_2^{-1}(a)$ являются гладкими многообразиями. По теореме Сарда этому условию удовлетворяют почти все значения функций $\psi_i(x)$, $i = 1, 2$. Обозначим $F_{\varepsilon\delta} = \{x \in G : \psi_1(x) \geqslant a\}$ и $E_{\varepsilon\delta} = \{x \in G : \psi_2(x) \geqslant a\}$.

Теперь возьмем убывающую последовательность δ_m такую, что δ_m стремится к нулю при $m \to \infty$, и построим множества $F_{\varepsilon\delta_m} = F_{\varepsilon m}$ и $E_{\varepsilon\delta_m} = E_{\varepsilon m}$. Потребуем, чтобы выполнялось условие $\delta_{m+1} < \min(\operatorname{dist}(\partial F_{\varepsilon m}, F_\varepsilon), \operatorname{dist}(\partial E_{\varepsilon m}, E_\varepsilon))$. Тогда любая допустимая функция для пары $(F_{\varepsilon m}, E_{\varepsilon m})$ является допустимой для $(F_{\varepsilon(m+1)}, E_{\varepsilon(m+1)})$. Поэтому $C_{p,w}(F_{\varepsilon m}, E_{\varepsilon m}, G) \geqslant C_{p,w}(F_{\varepsilon(m+1)}, E_{\varepsilon(m+1)}, G)$.

Таким образом, получим убывающую последовательность $C_{p,w}(F_{\varepsilon m}, E_{\varepsilon m}, G)$. Следовательно, существует $\lim\limits_{m\to\infty} C_{p,w}(F_{\varepsilon m}, E_{\varepsilon m}, G)$. Пусть u_m – экстремальная функция для пары $(F_{\varepsilon m}, E_{\varepsilon m})$. Как и во второй части доказательства, показываем, что последовательность экстремальных функций сходится в пространстве $L^1_{p,w}(G)$ к экстремальной функции пары $(F_\varepsilon, E_\varepsilon)$.

В первой части доказательства теоремы было показано, что любую гладкую ограниченную функцию можно с любой степенью точности приблизить линейными комбинациями экстремальных функций пар $(\overline{V}_{k-1}, (G \setminus V_k))$.

Следовательно, теорема доказана.

Следствие 1. *Если E – $NC_{p,w}$-множество в G, то каждая функция $f \in L^1_{p,w}(G \setminus E)$ продолжается до функции $\widetilde{f} \in L^1_{p,w}(G)$ таким образом, что*

$$\|f\|_{L^1_{p,w}(G\setminus E)} = \|\widetilde{f}\|_{L^1_{p,w}(G)}.$$

Другими словами, для продолженной функции $\widetilde{f}$ выполняется условие $|\nabla \widetilde{f}| = 0$ $\mathcal{L}_n$-почти везде на E.

Доказательство. По теореме 2, найдем функцию $f_m = \sum\limits_{i=1}^{k} c_i v_i$, где $v_i \in E_{p,w}(G \setminus E)$ – экстремальная функция для $C_{p,w}(E_0^i, E_1^i, G)$, $i = 1, \ldots, k$, и $f_m \to f$ $\mathcal{L}_n$-почти везде на $G \setminus E$, $f_m \to f$ в $L^1_{p,w}(G \setminus E)$.

Поскольку E – $NC_{p,w}$-множество, то $C_{p,w}(G \setminus E) = C_{p,w}(G)$ для всех $i = 1, 2, \ldots, k$. Значит, экстремальная функция $\widetilde{v_i}$ для емкости

$C_{p,w}(G)$ в силу единственности удовлетворяет соотношениям $\widetilde{v_i} = v_i$ в $G \setminus E$ и $|\nabla v_i| = 0$ $\mathcal{L}_n$-почти везде на E, $i = 1, 2, \dots, k$. Тогда

$$\widetilde{f_m} = \sum_{i=1}^{k} c_i \widetilde{v_i} \to f \quad \text{в} \quad L^1_{p,w}(G \setminus E),$$

$$\|\widetilde{f_m} - \widetilde{f_l}\|_{L^1_{p,w}(G\setminus E)} = \|\widetilde{f_m} - \widetilde{f_l}\|_{L^1_{p,w}(G)} \to 0 \quad \text{при} \quad m, l \to \infty.$$

Следовательно, последовательность $\{\widetilde{f_m}\}$ фундаментальна в $L^1_{p,w}(G)$ и ее предел $\widetilde{f} \in L^1_{p,w}(G)$ удовлетворяет условию $|\nabla \widetilde{f}| = 0$ $\mathcal{L}_n$-почти везде на E.

Лемма 4. *Если* $\Pi = \{x = (x_1, \dots, x_n) \in R^n : a_i < x_i < b_i, i = 1, 2, \dots, n\}$ *– n-мерный прямоугольник, σ_{0k}, σ_{1k} – его грани, параллельные гиперплоскости $x_k = 0$, то* $M_{p,w}(\sigma_{0k}, \sigma_{1k}, \Pi) > 0$.

Доказательство. Пусть

$$\Pi' = \{(x_1, \dots, x_{k-1}, x_{k+1}, \dots, x_n) : a_i < x_i < b_i, i = 1, \dots, n, i \neq k\},$$

ρ – произвольная метрика из $\mathrm{adm}_{p,w}(\sigma_{0k}, \sigma_{1k}, \Pi)$. Тогда $\int\limits_{a_k}^{b_k} \rho dx_k \geqslant 1$, поскольку в семейство $\Gamma(\sigma_{0k}, \sigma_{1k}, \Pi)$ входят прямолинейные отрезки, соединяющие грани σ_{0k}, σ_{1k} прямоугольника Π. В силу теоремы Фубини, неравенства Гельдера и условия (1), это влечет неравенство

$$\left(\int\limits_{\Pi} \rho^p w dx\right) \geqslant\geqslant \int\limits_{\Pi'} \left(\int\limits_{a_k}^{b_k} w^{1-q} dx_k\right)^{1-p} dx_1 \dots dx_{k-1} dx_{k+1} \dots dx_n > 0,$$

$$\text{где} \quad \frac{1}{p} + \frac{1}{q} = 1. \tag{16}$$

Отсюда, учитывая произвол в выборе ρ, приходим к требуемому результату.

Замечание. Пусть M – двумерная гиперплоскость в R^n. Проведем в M окружность и рассмотрим на ней открытую дугу γ раствора α, $0 < \alpha < 2\pi$. Через центр данной окружности и каждую точку $a \in \gamma$ проведем $(n-1)$-мерную гиперплоскость H_a, $H_a \perp \gamma$. В каждой гиперплоскости H_a построим $(n-1)$-мерный шар с центром в точке a и радиуса $r > 0$. Полученную при этом область $T(\alpha, r, \gamma)$ в R^n назовем тороидальным прямоугольником. Аналогично, в концах дуги γ построим замкнутые $(n-1)$-мерные шары σ_0, σ_1 радиуса r и назовем их пластинами тороидального прямоугольника $T(\alpha, r, \gamma)$. Проводя рассуждения, аналогичные доказательству предыдущей леммы, получим, что $M_{p,w}(\sigma_0, \sigma_1, T(\alpha, r, \gamma)) > 0$.

Теорема 3. *Если E – $NC_{p,w}$-множество в G, то E не имеет внутренних точек.*

Доказательство. Пусть x_0 – внутренняя точка E и $D \subset E$ – максимальная область, для которой $x_0 \in D$. Пусть y_0 – граничная точка D, $y_0 \in G$. В области D проведем кривую γ, соединяющую x_0 и y_0. Рассмотрим шар $B(y_0, r) \subset G$ с центром в точке y_0 и радиуса $r > 0$. Ясно, что существует точка $z_0 \in (G \setminus E) \cap B(y_0, r)$ и точка $\widetilde{z}_0 \in \gamma$ такие, что $|y_0 - z_0| = |y_0 - \widetilde{z}_0|$.

Проводя через точки z_0, $\widetilde{z}_0$ окружность λ с центром в точке y_0, дугу $\lambda_0 \subset \lambda$ можно заключить в тороидальный прямоугольник $T = T(\alpha, r_1, \lambda_0) \ni \widetilde{z}_0$ с пластинами σ_0, σ_1 вблизи z_0 и в $G \setminus E$. За счет выбора r_1 можно добиться того, что E будет разбивать T на два непустых непересекающихся открытых множества G_0, G_1, $T \setminus E = G_0 \cup G_1$. При этом $\sigma_0 \subset \overline{G_0}$, $\sigma_0 \cap \overline{G_1} = \emptyset$, $\sigma_1 \subset \overline{G_1}$, $\sigma_1 \cap \overline{G_0} = \emptyset$. По построению, $C_{p,w}(\sigma_0, \sigma_1, T) = 0$.

С другой стороны, если u_0 – экстремальная функция для $C_{p,w}(\sigma_0, \sigma_1, T \setminus E)$ и $\widetilde{T} = T(\alpha, r_2, \lambda_0)$, $r_2 < r_1$, $\varphi \in C_0^\infty(G)$, $\varphi = 1$ на $\widetilde{T}$, то, по следствию 1, $u_0\varphi$ продолжается до функции из $L^1_{p,w}(G)$. Отсюда, в силу произвола в выборе $\widetilde{T}$, следует, что u_0 продолжается до функции из $L^1_{p,w}(T)$. При этом

$$0 = C_{p,w}(\sigma_0, \sigma_1, T \setminus E) = \int\limits_{T \setminus E} |\nabla u_0|^p w dx =$$

$$= \int\limits_{T} |\nabla u_0|^p w dx \geqslant C_{p,w}(\sigma_0, \sigma_1, T).$$

Выписанные соотношения противоречивы, поскольку

$$C_{p,w}(\sigma_0, \sigma_1, T) = M_{p,w}(\sigma_0, \sigma_1, T) > 0.$$

Следовательно, E не имеет внутренних точек.

Теорема 4. *Всякое компактное подмножество K $NC_{p,w}$-множества E в G является $NC_{p,w}$-множеством.*

Доказательство. Пусть E_0, E_1 гладкие компакты в $G \setminus K$, u_0 – экстремальная функция для $C_{p,w}(E_0, E_1, G \setminus K)$.

Поскольку $u_0 \in L^1_{p,w}(G \setminus E)$, то, по следствию 1, u_0 можно продолжить до $\widetilde{u_0} \in L^1_{p,w}(G)$, причем $|\nabla u_0| = 0$ $\mathcal{L}_n$-почти везде на E.

Если теперь τ – произвольная компонента связности E_0 или E_1 (множества E_0, E_1 имеют конечное число таких компонент и все они положительной $\mathcal{L}_n$-меры), то из теоремы 3 получим, что $\mathcal{L}_n(\tau \setminus E) > 0$. Отсюда $u_0 = i$ $\mathcal{L}_n$-почти везде на E_i, $i = 0, 1$. Это влечет соотношения

$$C_{p,w}(E_0, E_1, G \setminus K) = \int\limits_{G \setminus K} |\nabla u_0|^p w dx \geqslant$$

$$\geqslant \int\limits_{G} |\nabla \widetilde{u_0}|^p w dx \geqslant C_{p,w}(E_0, E_1, G).$$

С другой стороны, очевидно, что

$$C_{p,w}(E_0, E_1, G \setminus K) \leqslant C_{p,w}(E_0, E_1, G).$$

Следовательно, $C_{p,w}(E_0, E_1, G \setminus K) = C_{p,w}(E_0, E_1, G)$ для любых гладких непересекающихся компактов E_0, E_1 из $G \setminus K$. Теорема доказана.

Применяя прием умножения на функцию $\varphi \in C_0^\infty(R^n)$, использованный при доказательстве теоремы 3, легко установим следующие два утверждения.

Теорема 5. *Пусть G_1 – открытое подмножество G и E – $NC_{p,w}$-множество в G. Тогда $K = G_1 \cap E$ – $NC_{p,w}$-множество в G_1.*

Теорема 6. *Всякое компактное подмножество $NC_{p,w}$-множества E в G является $NC_{p,w}$-множеством в любом открытом множестве из R^n.*

Далее, справедлива

Теорема 7. *Если E – $NC_{p,w}$-множество в G, то $\mathcal{L}_n(E) = 0$.*

Доказательство. Предположим, что $\mathcal{L}_n(E) > 0$. Покажем существование всюду разрывного компакта $K \subset E$, $\mathcal{L}_n(K) > 0$.

Установим сначала существование компакта K_1, $\mathcal{L}_n(K_1) > 0$, для которого пересечение с любой прямой l, $l \perp H_1$ (H_1 – гиперплоскость $x_1 = 0$) либо пусто, либо всюду разрывное множество. Пусть $l \cap H_1$ состоит из точки a. Тогда положим $l = l_a$. Предположим сначала, что найдется множество $A = \{a \in H_1 : l_a \cap E$ содержит невырожденный отрезок$\}$, $\mathcal{L}_{n-1}(A) > 0$. Очевидно, что $\mathcal{L}_n(\widetilde{K}) > 0$ для $\widetilde{K} = \bigcup\limits_{a \in A} (l_a \cap E)$.

Полагая $\delta = \frac{1}{k}$, $k = 1, 2, \ldots$, найдем множество $A_\delta \subset A$, $\mathcal{L}_{n-1}(A_\delta) > 0$, для которого $l_a \cap E$ содержит отрезок τ_a, $\mathcal{H}_1(\tau_a) \geqslant \delta$ для всех $a \in A_\delta$.

Пусть $K' = \overline{\bigcup\limits_{a \in A_\delta} \tau_a}$. По построению, $K' \subset E$ и каждая компонента связности $l \cap K'$, $l \cap K' \neq \emptyset$, есть отрезок длины $\geqslant \delta$. Разобьем теперь координатную ось X_1 на отрезки равной длины $\frac{\delta}{3}$ и в каждом из них построим всюду разрывное замкнутое множество положительной длины. Объединение этих множеств обозначим через X_1'. Проведем через каждую точку $c \in X_1'$ $(n-1)$-мерную гиперплоскость $H(c) \perp X_1$. Тогда $P = \bigcup\limits_{c \in X_1'} (H(c) \cap K')$ – множество положительной $\mathcal{L}_n$-меры, для которого $l \cap P \neq \emptyset$ – всюду разрывное множество. Очевидно, что в P можно вписать компакт K_1 с такими же свойствами.

В случае, если упомянутое выше множество A не существует, то это означает, что для $\mathcal{L}_{n-1}$-почти всех $a \in H_1$, где $l_a \cap E \neq \emptyset$, $l_a \cap E$ – всюду разрывное множество. Тогда найдется компакт $A' \subset H_1$, для которого $\mathcal{L}_{n-1}(A') > 0$, $l_a \cap E$ – всюду разрывное множество для всех $a \in A'$ и замкнутое относительно G множество $\bigcup_{a \in A'} (l_a \cap E)$ имеет положительную $\mathcal{L}_n$-меру. Как и выше, компакт из $\bigcup\limits_{a \in A'} (l_a \cap E)$ положительной $\mathcal{L}_n$-меры возьмем в качестве K_1.

Проводя последовательно аналогичные построения относительно других координатных осей $x_2, \ldots, x_n$, из K_1 получим всюду разрывный (нульмерный) компакт $K \subset E$.

Положим теперь $u_1 = x_1$ для всех $x \in R^n$, $\varphi \in C_0^\infty(R^n)$, где $\varphi = 1$ в некоторой окрестности O компакта K, тогда $u = u_1 \varphi \in L^1_{p,w}(G)$ и $|\nabla u| > 0$ на O. Поскольку K – $NC_{p,w}$-множество в G, то, в силу следствия 1, $\widetilde{u} = u|_{G \setminus K}$ можно продолжить до $u_0 \in L^1_P p, w(G)$, где $|\nabla u_0| = 0$ почти везде на K. Так как K – всюду разрывное множество, то это продолжение для $\mathcal{L}_{n-1}$-почти всех прямых l,

$l \cap K \neq \emptyset$, параллельных одной из координатных осей, в силу непрерывности u на $G \setminus K$ будет осуществляться вдоль l единственным образом. С другой стороны, существует два противоречивых продолжения функции $\widetilde{u}$ на G: u_0 и u_1, где $|\nabla u_0| = 0$ $\mathcal{L}_n$-почти везде на K, $|\nabla u_1| = 0$ $\mathcal{L}_n$-почти везде на K. Следовательно, K имеет нулевую $\mathcal{L}_n$-меру.

Теорема 8. *Если E – $NC_{p,w}$-множество в G, то* $\dim E \leqslant n-2$.

Доказательство. Покажем, что множество E не разбивает ни одной из областей $D \subset G$. Для этого достаточно доказать, что ни один n-мерный прямоугольник $\Pi \subset G$ не разбивается множеством E. Действительно, если это не выполняется, то найдется n-мерный прямоугольник Π с противоположными гранями σ_0 и σ_1, разбиваемый E на два непустых непересекающихся открытых множества G_0 и G_1 так, что $\sigma_0 \subset \overline{G_0}$, $\sigma_1 \subset \overline{G_1}$, $\sigma_0 \cap \overline{G_1} = \emptyset$, $\sigma_1 \cap \overline{G_0} = \emptyset$. Тогда $C_{p,w}(\sigma_0, \sigma_1, \Pi \setminus E) = M_{p,w}(\sigma_0, \sigma_1, \Pi \setminus E) = 0$, что, в силу рассуждений доказательства теоремы 3, приводит к противоречию. Теорема доказана.

3. Основные результаты

Множество E, замкнутое относительно G, назовем нуль-множеством для класса $L^1_{p,w}(G)$, если каждая функция $f \in L^1_{p,w}(G \setminus E)$ продолжается до функции $\widetilde{f} \in L^1_{p,w}(G)$ таким образом, что

$$\|f\|_{L^1_{p,w}(G\setminus E)} = \|\widetilde{f}\|_{L^1_{p,w}(G)}.$$

Справедливы следующие характеристики нуль-множеств для пространства $L^1_{p,w}(G)$.

Теорема 9. *Для того чтобы замкнутое относительно G множество E, было нуль-множеством (устранимым множеством) для $L^1_{p,w}(G)$, необходимо и достаточно, чтобы E было $NC_{p,w}$-множеством в G.*

Доказательство. Достаточность вытекает из следствия 1. Необходимость следует из того факта, что экстремальную функцию u_0 для $C_{p,w}(E_0, E_1, G \setminus E)$ (E_0, E_1 – гладкие компакты в $G \setminus E$) по условию можно продолжить до функции $\widetilde{u_0} \in L^1_{p,w}(G)$. При этом

$$C_{p,w}(E_0, E_1, G) \leqslant \int\limits_G |\nabla \widetilde{u_0}|^p w dx = \int\limits_G |\nabla u_0|^p w dx = C_{p,w}(E_0, E_1, G \setminus E).$$

Отсюда $C_{p,w}(E_0,E_1,G) = C_{p,w}(E_0,E_1,G\setminus E)$. В силу произвола выбора E_0, E_1 E – $NC_{p,w}$-множество в G.

Теорема 10. *Для того чтобы открытые множества G_1 и G_2, $G_1\subset G_2$, были (p,w)-эквивалентными, необходимо и достаточно, чтобы множество $G_2\setminus G_1$ было $NC_{p,w}$-множеством в G_2.*

Доказательство. *Необходимость.* Пусть пространства $L^1_{p,w}(G_1)$ и $L^1_{p,w}(G_2)$ изоморфны как линейные пространства при изоморфизме ограничения $\theta u = u|_{G_1}$, $u\in L^1_{p,w}(G_2)$. Переходя к фактор-пространствам $\widetilde{L^1_{p,w}(G_1)}$, $\widetilde{L^1_{p,w}(G_2)}$ и используя теорему Банаха, получаем ограниченность оператора θ^{-1}.

Докажем, что $\mathcal{L}_n(G_2\setminus G_1)=0$. Предположим обратное. Тогда множество $G_2\setminus G_1$ имеет хотя бы одну точку плотности x_0, являющуюся одновременно точкой Лебега для $u(x)$. Рассмотрим последовательность открытых координатных кубов $Q_m = Q(x_0,\frac{1}{m})$ с центром в точке x_0, ребром длины $\frac{1}{m}$. Рассмотрим функцию

$$u_m(x) = \operatorname{dist}(x, R^n\setminus Q_m),\quad x\in R^n.$$

Известно (см. [16]), что $|\nabla u_m| = 1$ $\mathcal{L}_n$-почти всюду в Q_m и $|\nabla u_m| = 0$ на

$$R^n\setminus Q,\quad |u_m(x')-u_m(x'')|\leqslant |x'-x''| \text{ для любых } x',x''\in R^n.$$

Тогда

$$\int\limits_{Q_m} w(x)dx \leqslant \int\limits_{G_2}|\nabla u_m|^p w dx \leqslant \|\theta^{-1}\|^p\int\limits_{G_1}|\nabla u_m|^p w dx\leqslant$$

$$\leqslant \|\theta^{-1}\|^p \int\limits_{Q_m\setminus(G_2\setminus G_1)} w dx.$$

При $m\to\infty$ неравенство неверно. Следовательно, $\mathcal{L}_n(G_2\setminus G_1)=0$ и любая функция $u\in L^1_{p,w}(G_1)$ продолжается до функции $\widetilde{u}\in L^1_{p,w}(G_)$ с сохранением нормы. По теореме 9 $G_2\setminus G_1$ – $NC_{p,w}$-множество в G_2.

Достаточность. Поскольку $G_2\setminus G_1$ – $NC_{p,w}$-множество в G_2, то $\mathcal{L}_n(G_2\setminus G_1)=0$. Это гарантирует существование и единственность продолжения каждой функции $u\in L^1_{p,w}(G_1)$ до функции $\widetilde{u}\in L^1_{p,w}(G_2)$ с сохранением нормы. Значит, оператор θ, введенный ранее, осуществляет изоморфизм пространств $L^1_{p,w}(G_1)$ и $L^1_{p,w}(G_2)$

Следствие 2. *Оператор ограничения θ в определении (p,w)-эквивалентных открытых множеств G_1 и G_2 является изометрией пространств $L^1_{p,w}(G_1)$ и $L^1_{p,w}(G_2)$.*

Теорема 11. *Множество E является $NC_{p,w}$-компактом в R^n тогда и только тогда, когда оно удовлетворяет условию ε-обхвата относительно семейств X_i прямых l^i_a, $a \in R^{n-1}$, параллельных координатной оси x_i, $i = 1,\ldots,n$.*

Доказательство. *Необходимость.* Для упрощения рассуждений положим $n = 2$. Рассмотрим случай $i = 1$. Обозначим $l_a = l^1_a$. Возьмем борелевскую неотрицательную локально ограниченную в $R^2 \setminus E$ функцию $\rho w^{\frac{1}{p}} \in \mathcal{L}^p_1(R^2 \setminus E)$. Пусть $\frac{1}{p} + \frac{1}{q} = 1$. Рассмотрим те значения a, для которых выполняются условия:

1) $0 < \int\limits_{l_a} w^{1-q} dx_1 < \infty$;

2) существует
$$\frac{d}{da}\int\limits_{a_0}^{a}\left(\int\limits_{l_a} w^{1-q}dx_1\right)^{1-p} da = \left(\int\limits_{l_a} w^{1-q}dx_1\right)^{1-p};$$

3)
$$\int\limits_{l_a} \rho^p w dx_1 < \infty;$$

4) существует
$$\frac{d}{da}\int\limits_{a_0}^{a}\left(\int\limits_{l_a} \rho^p w dx_1\right) da = \int\limits_{l_a} \rho^p w dx_1;$$

5) $\mathcal{H}_1(l_a \cap E) = 0$.

В 2) и 4) $a, b \in \mathbb{Q}$.

Отметим, что эти условия выполняются для почти всех a. Для 1), 2) это следует из формулы (1). Для 3) и 4) это верно в силу теоремы Фубини, для 5) – по определению.

Пусть a удовлетворяет условиям 1) – 5). Рассмотрим соответствующую прямую l_a. Покроем $l_a \cap E$ интервалами $A_k = (a_k, b_k)$, $k = \overline{1,m}$, где все $a_k, b_k \in \mathbb{Q}$ и
$$\int\limits_{\bigcup\limits_{k=1}^{m} A_k} w^{1-q}dx_1 < \frac{\varepsilon}{4}, \qquad \int\limits_{\bigcup\limits_{k=1}^{m} A_k} \rho^p w dx_1 < \frac{\varepsilon}{4}.$$

Фиксируем k. Пусть Π_δ – прямоугольник, составленный из интервалов A_k прямых $l_{a'}$, $a \leqslant a' \leqslant a+\delta$, $\delta > 0$. Рассмотрим семейство кривых Γ_k, соединяющих $x_1 = a_k$ с $x_1 = b_k$ в Π_δ и не проходящих через E. Так как E – $NC_{p,w}$-компакт, то модуль этого семейства равен модулю всех кривых, соединяющих $x_1 = a_k$ с $x_1 = b_k$ в Π_δ. Из формулы (16) следует, что

$$M_{p,w}(\Gamma_k) \geqslant \int\limits_a^{a+\delta} \Bigg(\int\limits_{l_a^k} w^{1-q} dx_1 \Bigg)^{1-p} da, \tag{17}$$

где $l_a^k = \{x \in l_a : a_k < x_1 < b_k\}$. Пусть $L = \inf\limits_{\gamma \in \Gamma_k} \int\limits_\gamma \rho dx_1$. Тогда $\frac{\rho}{L} \wedge \Gamma_k$ и поэтому

$$M_{p,w}(\Gamma_k) \leqslant L^{-p} \int\limits_{\Pi_\delta} \rho^p w dx. \tag{18}$$

Соединяя (17) и (18), получим:

$$L^{-p} \int\limits_{\Pi_\delta} \rho^p w dx \geqslant \int\limits_a^{a+\delta} \Bigg(\int\limits_{l_a^k} w^{1-q} dx_1 \Bigg) da.$$

При достаточно малых δ, используя неравенство Юнга, имеем:

$$L^{-p} \Bigg(\int\limits_{l_a^k} \rho^p w dx_1 + \frac{\varepsilon}{8m} \Bigg) \geqslant \Bigg(\int\limits_{l_a^k} w^{1-q} dx_1 + \frac{\varepsilon}{8m} \Bigg)^{1-p},$$

$$L^p \leqslant \Bigg(\int\limits_{l_a^k} \rho^p w dx_1 + \frac{\varepsilon}{8m} \Bigg) \Bigg(\int\limits_{l_a^k} w^{1-q} dx_1 + \frac{\varepsilon}{8m} \Bigg)^{p-1},$$

$$L \leqslant \Bigg(\int\limits_{l_a^k} \rho^p w dx_1 + \frac{\varepsilon}{8m} \Bigg)^{\frac{1}{p}} \Bigg(\int\limits_{l_a^k} w^{1-q} dx_1 + \frac{\varepsilon}{8m} \Bigg)^{\frac{1}{q}} \leqslant$$

$$\leqslant \frac{1}{p} \Bigg(\int\limits_{l_a^k} \rho^p w dx_1 + \frac{\varepsilon}{8m} \Bigg) + \frac{1}{q} \Bigg(\int\limits_{l_a^k} w^{1-q} dx_1 + \frac{\varepsilon}{8m} \Bigg) =$$

$$= \frac{1}{p} \int\limits_{A_k} + \frac{1}{q} \int\limits_{A_k} w^{1-q} dx_1 + \frac{\varepsilon}{8m}.$$

По определению инфимума, найдется кривая $\gamma_k' \in \Gamma_k$ такая, что

$$\int\limits_{\gamma_k'} \rho dx_1 \leqslant L + \frac{\varepsilon}{8m} \leqslant \frac{1}{p} \int\limits_{A_k} + \frac{1}{q} \int\limits_{A_k} w^{1-q} dx_1 + \frac{\varepsilon}{4}.$$

В силу локальной ограниченности функции ρ и условия $\mathcal{L}_n(E) = 0$, при достаточно малом δ существуют кривые γ_k^1, γ_k^2, которые соединяют a_k и b_k с соответствующими концами кривой γ_k' и таковы, что

$$\int\limits_{\gamma_k^1} \rho dx_1 + \int\limits_{\gamma_k^2} \rho dx_1 < \frac{\varepsilon}{2}.$$

Пусть $\gamma_k \subset \gamma_k^1 \cup \gamma_k' \cup \gamma_k^2$ – кривая, начало и конец которой лежат на l_a. Тогда для указанных кривых γ_k имеем:

$$\int\limits_{\bigcup\limits_{k=1}^{m} \gamma_k} \rho dx_1 \leqslant \frac{1}{p} \int\limits_{\bigcup\limits_{k=1}^{m} A_k} + \frac{1}{q} \int\limits_{\bigcup\limits_{k=1}^{m} A_k} w^{1-q} dx_1 + \frac{\varepsilon}{4} + \sum_{k=1}^{m} \Bigg(\int\limits_{\gamma_k^1} \rho dx_1 + \int\limits_{\gamma_k^2} \rho dx_1 \Bigg) \leqslant$$

$$\frac{1}{p}\frac{\varepsilon}{4} + \frac{1}{q}\frac{\varepsilon}{4} + \frac{\varepsilon}{4} + \frac{\varepsilon}{2} = \varepsilon.$$

Достаточность. Пусть $\mathrm{ACL}_{p,w}(G)$ – класс функций, абсолютно непрерывных на почти всех прямых, параллельных координатным осям, частные производные которых суммируемы с p-й степенью с весом w в G. Известно, что $\mathrm{ACL}_{p,w}(G) = L^1_{p,w}(G)$ и любую функцию $f \in L^1_{p,w}(G)$ можно аппроксимировать сколь угодно точно гладкими функциями из $L^1_{p,w}(G)$ по норме этого пространства. В случае $w = 1$ см. [13]. Следовательно, достаточно доказать, что любую гладкую функцию из $L^1_{p,w}(G \setminus E)$ можно продолжить до функции, принадлежащей $\mathrm{ACL}_{p,w}(\Pi)$ для каждого прямоугольника Π, $\overline{\Pi} \subset G$. Введем вспомогательную функцию $u = f\varphi$, где $\varphi \in C_0^\infty(R^n)$, $\varphi = 1$ в некоторой окрестности Π.

Покажем, например, что функция u (значит, и функция f) продолжается в Π до абсолютно непрерывной функции на почти всех отрезках $l \subset \Pi$, параллельных оси x_1.

Пусть дано $\eta > 0$. Рассмотрим отрезок l, вложенный в прямую, на которой $|\nabla u|$ суммируема и выполняется условие ε-обхвата для $\rho = |\nabla u|$. Не ограничивая общности, можно считать, что концы l лежат вне E. Пусть δ таково, что в силу суммируемости $|\nabla u|$

$$\int_A |\nabla u| dx_1 < \frac{\eta}{3}$$

для любого множества $A \subset l$, где $\mathcal{L}_1(A) < \delta$. Установим, что функцию u можно продолжить до непрерывной функции $\widetilde{u}$ на l.

Пусть $a \in l \cap E$. Существуют $a_1, a_2 \in l \setminus E$ такие, что $|a_1 - a| < \delta/2$, $|a_2 - a| < \delta/2$. Возмем

$$\varepsilon < \min\left(\frac{\delta}{2}, \frac{\eta}{3}, \operatorname{dist}(a_1, E), \operatorname{dist}(a_2, E)\right).$$

По условию, найдутся кривые $\gamma_i \subset R^n \setminus E$, $i = 1, \dots, k$ и $\sum\limits_{i=1}^{k} \int\limits_{\gamma_i} |\nabla u| d\mathcal{H}_1 < \varepsilon$ и кривая

$$\gamma' \subset (R^n \setminus E) \cap \Big(\bigcup_{i=1}^{k} \gamma_i \cup \{(x_1, \dots, x_n) \in l : a_1 \leqslant x_1 \leqslant a_2\}\Big),$$

соединяющая a_1 и a_2. Имеем:

$$|u(a_1) - u(a_2)| \leqslant \int_{\gamma'} |\nabla u| dx_1 < \eta,$$

т.е. существует предел $\widetilde{u}(a) = \lim\limits_{\substack{x \to a \\ x \in l \setminus E}} u(x)$.

Покажем теперь, что функция $\widetilde{u}$ абсолютно непрерывна на l. Фиксируем $\eta > 0$ и определяем δ так же как и в предыдущих рассуждениях. Пусть дана произвольная конечная система непересекающихся интервалов (a_i, b_i), $[a_i, b_i] \subset l$, $i = 1, \dots, k_1$, суммарной длины меньшей δ. Если некоторые a_i, b_i принадлежат E, $i = 1, 2, \dots, k_1$, то выберем $a_i', b_i' \in (l \setminus E)$, $i = 1, \dots, k_1$ так, чтобы

$$|\widetilde{u}(b_i') - \widetilde{u}(b_i)| + |\widetilde{u}(a_i') - \widetilde{u}(a_i)| < \frac{\varepsilon}{3k_1}, \quad i = 1, \dots, k_1,$$

а если $a_i \quad (b_i) \notin E$, то положим $a_i' = a_i \quad (b_i' = b_i)$. Заменяя в предыдущих рассуждениях a_1, a_2 на a_i', b_i', соответственно, и подбирая ε и по нему кривые γ_i из условия ε-обхвата, имеем:

$$|\widetilde{u}(b_i) - \widetilde{u}(a_i)| \leqslant |u(a_i') - \widetilde{u}(a_i)| + |u(b_i') - \widetilde{u}(b_i)| + \sum_{i \leqslant k} \int_{\gamma_i} |\nabla u| d\mathcal{H}_1.$$

Суммируя по всем i, получим, что $\widetilde{u}$ абсолютно непрерывна на l.

Теорема доказана.

Из доказанной теоремы вытекает в качестве следствия аналог известной теоремы Альфорса и Бейрлинга о NED-множествах (см. [1]).

Пусть для координатного прямоугольника Π его грани, параллельные координатной гиперплоскости $x_i = 0$, обозначаются через σ_{0i}, σ_{1i}.

Теорема 12. *Для того чтобы множество $G_2 \setminus G_1$, $\mathcal{L}_n(G_2 \setminus G_1) = 0$ (G_1, G_2 – открытые множества в R^n) было $NC_{p,w}$-множеством в G_2, необходимо и достаточно, чтобы для любого заданного $\varepsilon > 0$ и любого координатного прямоугольника Π, $\operatorname{diam} \Pi < \varepsilon$, выполнялось равенство*

$$C_{p,w}(\sigma_{0i}, \sigma_{1i}, \Pi \setminus E) = C_{p,w}(\sigma_{0i}, \sigma_{1i}, \Pi)$$

для всех $i = 1, \ldots, n$ и любого компакта $E \subset G_2 \setminus G_1$.

Литература

1. L. Ahlfors, A. Beurling, *Conformal invariants and functions-theoretic null-sets,* Acta Math. **83**, No. 1–2 (1950), 101–129.
2. J. Väisälä, *On the null-sets for extremal distances,* Ann. Acad. Sci. Fenn. Ser. A. I. Math., No. 322 (1962), 1–12.
3. В. В. Асеев, А. В. Сычев, *О множествах, устранимых для пространственных квазиконформных отображений,* Сиб. мат. журн. **15**, No. 6 (1974), 1213–1227.
4. L. I. Hedberg, *Removable sungularities and condenser capacities,* Arkiv Math. **12**, No. 1 (1974), 181–201.
5. С. К. Водопьянов, В. М. Гольдштейн,, *Критерий устранимости множеств для пространств L^1_p, квазиконформных и квазиизометрических отображений,* Сиб. мат. журн. **18**, No. 1 (1977), 48–68.
6. В. А. Шлык, *Строение компактов, порождающих нормальные области, и устранимые особенности для пространства $L^1_p(D)$,* Мат. сб. **181**, No. 11 (1990), 1558–1572.
7. В. А. Шлык, *Нормальные области и устранимые особенности,* Изв. РАН. Сер. мат. **57**, No. 4 (1993), 93–117.
8. И. Н. Демшин, В. А. Шлык, *Критерии устранимых множеств для весовых пространств $L^1_{p,w}$, $FD^{p,w}$,* Докл. РАН **343**, No. 5 (1995), 590–592.
9. В. А. Шлык, *Условие ε-обхвата для N-компактов,* Зап. научн. семин. ПОМИ **196** (1991), 154–161.
10. B. Muchenhoupt, *The equivalence of two conditions for weight functions,* Studia Math **49** (1974), 101–106.

11. В. Г. Мазья, *Классы областей, мер и емкостей в теории пространств дифференцируемых функций,* В кн: Современные проблемы математики. Итоги науки и техники **26** (1988), М., 159–228.
12. А. В. Сычев, *Модули и пространственные квазиконформные отображения,* Новосибирск, 1983.
13. В. М. Гольдштейн, Ю. Г. Решетняк, *Введение в теорию функций с обобщенными производными и квазиконформные отображения,* М., 1983.
14. В. А. Шлык, *Емкость конденсатора и модуль семейства разделяющих поверхностей,* Зап. научн. семин. ЛОМИ **185** (1990), 168–182.
15. С. М. Никольский, *Приближение функций многих переменных и теоремы вложения,* М., 1977.
16. Г. Федерер, *Геометрическая теория меры,* М., 1987.

Институт прикладной
математики ДВО РАН,
Владивосток
E-mail: dymch@nt.pin.dvgu.ru

Поступило 25 июля 2000 г.