Алгебра и логика, 56, № 4 (2017), 443—452

DOI: 10.17377/alglog.2017.56.404 УДК 515.125

СОПРЕДЕЛЬНЫЕ ТОЧКИ И *u*-РАСШИРЕНИЯ*)

Ю. Л. ЕРШОВ

§ 1. Предварительные сведения

Понятие u-расширения топологического пространства было введено в работе автора [1]. В настоящей работе даётся характеризация u-расширений с использованием нового понятия сопредельной точки, см. теорему 3.2. Кроме того, в теореме 3.6 приводится характеризация пространств, не имеющих собственных u-расширений. С использованием этих двух результатов устанавливается, что наибольшее u-расширение произвольного T_0-пространства совпадает с его собрификацей, см. теорему 3.7. Теорема 3.8 даёт ещё один способ построения собрификации произвольного T_0-пространства.

Напомним, что подмножество $S \subseteq X$ топологического пространства $\mathbb{X}$ называется *неприводимым*, если для любых замкнутых подмножеств F_0, $F_1 \subseteq X$ включение $S \subseteq F_0 \cup F_1$ влечёт включение $S \subseteq F_i$ для некоторого $i < 2$.

Пространство $\mathbb{S} = \langle S, \mathcal{T} \rangle$, где $S = \{\bot, \top\}$ и $\mathcal{T} = \big\{\varnothing, \{\top\}, S\big\}$, называем *пространством Серпинского.*

ЛЕММА 1.1. *Пусть* $\mathbb{X} \leq \mathbb{Y}$ *и* $U \in \mathcal{T}(\mathbb{X})$. *Если существует единственное множество* $V \in \mathcal{T}(\mathbb{Y})$ *с условием* $U = V \cap X$, *то* $V = \uparrow_{\mathbb{Y}} U$.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Очевидно, что $\uparrow_{\mathbb{Y}} U \subseteq V$. Пусть $y \in V \setminus \uparrow_{\mathbb{Y}} U$ для некоторого $y \in Y$. Тогда для любого $x \in U$ найдётся $W_x \in \mathcal{T}(\mathbb{Y})$, такое

*)Работа выполнена при финансовой поддержке Российского фонда фундаментальных исследований, проект № 15-01-05114-а.

что $x \in W_x$, но $y \notin W_x$. Полагаем $W = V \cap \bigcup\limits_{x \in U} W_x$; тогда $U \subseteq W \in \mathcal{T}(\mathbb{Y})$ и $y \notin W$. Кроме того, $U \subseteq W \cap X \subseteq V \cap X = U$. В силу единственности V это означает, что $V = W$, т. е. $y \in V \subseteq \bigcup\limits_{x \in U} W_x$, поэтому $y \in W$, что невозможно. Полученное противоречие доказывает равенство $V = \uparrow_{\mathbb{Y}} U$. □

ЛЕММА 1.2. *Пусть отображение $f\colon \mathbb{X} \to \mathbb{Y}$ непрерывно. Для любого неприводимого в $\mathbb{X}$ множества S множество $f(S)$ неприводимо в $\mathbb{Y}$.*

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Пусть $f(S) \subseteq F_0 \cup F_1$ для некоторых замкнутых подмножеств F_0, $F_1 \subseteq Y$. Тогда $f^{-1}(F_0)$, $f^{-1}(F_1)$ замкнуты в $\mathbb{X}$ и $S \subseteq f^{-1}(F_0) \cup f^{-1}(F_1)$. Поэтому $S \subseteq f^{-1}(F_i)$ для некоторого $i < 2$, т. е. $f(S) \subseteq F_i$. □

§ 2. Сопредельные точки

ОПРЕДЕЛЕНИЕ 2.1. Пусть $\mathbb{X}$ является топологическим пространством и $Y \subseteq X$. Элемент $x \in X$ называется *сопредельной точкой для Y в* $\mathbb{X}$, если для любого $U \in \mathcal{T}(\mathbb{X})$, такого что $x \in U$, найдётся элемент $y \in U \cap Y$ с условием $y \leq_{\mathcal{T}(\mathbb{X})} x$. Через $\mathrm{sob}_{\mathbb{X}} Y$ будем обозначать множество всех сопредельных точек для Y в $\mathbb{X}$.

ЗАМЕЧАНИЕ 2.2. Элемент $x \in X$ является сопредельной точкой для Y в $\mathbb{X}$ тогда и только тогда, когда x является предельной точкой для множества $\downarrow x \cap Y$, т. е. $x \in \mathrm{cl}_{\mathbb{X}}(\downarrow x \cap Y)$. Поэтому выполняется включение $Y \subseteq \mathrm{sob}_{\mathbb{X}} Y \subseteq \mathrm{cl}_{\mathbb{X}} Y$.

Понятие сопредельной точки было введено в докладе автора на заседании Сибирского математического общества 8 апреля 2011 г.

ЛЕММА 2.3. *Если $\mathbb{Y} \leq \mathbb{X}$ и $x \in \mathrm{sob}_{\mathbb{X}} Y$, то множество $\downarrow x \cap Y$ непусто и неприводимо в пространстве $\mathbb{Y}$.*

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Предположим, что $\downarrow x \cap Y \subseteq F_0 \cup F_1$ для некоторых замкнутых в $\mathbb{Y}$ подмножеств F_0, F_1, но $\downarrow x \cap Y \nsubseteq F_i$ для любого $i < 2$. Тогда для всякого $i < 2$ найдётся элемент $x_i \in \downarrow x \cap (Y \backslash F_i)$, причём множество $Y \backslash F_i$ открыто в $\mathbb{Y}$. Поэтому для любого $i < 2$ найдётся открытое в $\mathbb{X}$ множество U_i, такое что $Y \cap U_i = Y \backslash F_i$. Поскольку $x_i \leq x$, имеем $x \in U_0 \cap U_1$. В силу $x \in \mathrm{sob}_{\mathbb{X}} Y$ найдётся $y \in {\downarrow}x \cap Y \cap U_0 \cap U_1 = (\downarrow x \cap Y) \cap (Y \setminus F_0) \cap (Y \setminus F_1) \subseteq (F_0 \cup F_1) \cap (Y \setminus F_0) \cap (Y \setminus F_1) = \varnothing$, что невозможно. $\square$

ЛЕММА 2.4. *Если $\mathbb{Y} \le \mathbb{X}$ и $x \in \mathrm{sob}_{\mathbb{X}} Y$, то $x = \sup_{\mathbb{X}}({\downarrow}x \cap Y)$.*

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Пусть x_0 является верхней границей для множества ${\downarrow}x \cap Y$ и $x \in U \in \mathcal{T}(\mathbb{X})$. Поскольку $x \in \mathrm{sob}_{\mathbb{X}} Y$, найдётся $y \in {\downarrow}x \cap U \cap Y$. В силу $y \le x_0$ имеем $x_0 \in U$, и поэтому $x \le x_0$. $\square$

ЛЕММА 2.5. *Для пространства $\mathbb{X}$ и любого множества $Y \subseteq X$ имеет место равенство $\mathrm{sob}_{\mathbb{X}}(\mathrm{sob}_{\mathbb{X}} Y) = \mathrm{sob}_{\mathbb{X}} Y$.*

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Предположим, что $x \in \mathrm{sob}_{\mathbb{X}}(\mathrm{sob}_{\mathbb{X}} Y)$ и $x \in U \in \mathcal{T}(\mathbb{X})$. Тогда найдётся элемент $y_0 \in U \cap \mathrm{sob}_{\mathbb{X}} Y$, для которого $y_0 \le x$. Поскольку $y_0 \in \mathrm{sob}_{\mathbb{X}} Y$, имеет место $y \le y_0 \le x$ для некоторого $y \in U \cap Y$, т. е. $x \in \mathrm{sob}_{\mathbb{X}} Y$. $\square$

Непосредственно из определений вытекает

ЛЕММА 2.6. *Если отображение $f\colon \mathbb{X} \to \mathbb{Y}$ непрерывно, то $f(\mathrm{sob}_{\mathbb{X}} Z) \subseteq \mathrm{sob}_{\mathbb{Y}} f(Z)$ для любого $Z \subseteq X$; другими словами, если z является сопредельной точкой для Z в $\mathbb{X}$, то $f(z)$ будет сопредельной точкой для $f(Z)$ в $\mathbb{Y}$.*

ЛЕММА 2.7. *Пусть $\mathbb{X}$, $\mathbb{Y}$ — топологические пространства, $\mathrm{sob}_{\mathbb{X}} X_0 = X$ для некоторого $X_0 \subseteq X$ и отображения $f,\, g\colon \mathbb{X} \to \mathbb{Y}$ непрерывны. Если $f|_{X_0} \le g|_{X_0}$, то $f \le g$.*

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Пусть $x \in X$ и $f(x) \in U \in \mathcal{T}(\mathbb{Y})$. Тогда $x \in f^{-1}(U) \in \mathcal{T}(\mathbb{X})$. Элемент x является сопредельной точкой для X_0, поэтому найдётся $x_0 \in f^{-1}(U) \cap X_0$, для которого $x_0 \le x$. Тогда $g(x_0) \ge f(x_0) \in U$, и $g(x_0) \in U$. В силу непрерывности g верно $g(x_0) \le g(x)$, т. е. $g(x) \in U$. Поэтому $f(x) \le g(x)$, что и требовалось. $\square$

ЛЕММА 2.8. *Пусть $S \subseteq X$ — непустое замкнутое неприводимое множество в T_0-пространстве $\mathbb{X}$, не имеющее наибольшего элемента. Тогда существует одноэлементное T_0-расширение $\mathbb{Y} \ge \mathbb{X}$, где $Y = X \cup \{y\}$, $y \notin X$, такое что $S = {\downarrow}_{\mathbb{Y}} y \cap X$ и $Y = \mathrm{sob}_{\mathbb{Y}} X$.*

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Пусть $Y = X \cup \{y\}$, и для произвольного $U \in \in \mathcal{T}(\mathbb{X})$ полагаем

$$U' = \begin{cases} U, & \text{если } U \cap S = \varnothing, \\ U \cup \{y\} & \text{в противном случае.} \end{cases}$$

Поскольку множество S непусто и неприводимо, $\mathcal{T}' = \{U' \mid U \in \mathcal{T}(\mathbb{X})\}$ является топологией на Y. Поэтому $\mathbb{X}$ является подпространством в $\mathbb{Y} = = \langle Y, \mathcal{T}' \rangle$. Очевидно, что $S \subseteq {\downarrow} y$. Если $y \in U'$ для некоторого $U' \in \mathcal{T}'$, то $U' \cap S \neq \varnothing$. Таким образом, $y \in \mathrm{sob}_{\mathbb{Y}} X$ и $Y = \mathrm{sob}_{\mathbb{Y}} X$. Предположим, что $x \notin S$. В этом случае $x \in U = X \backslash S \in \mathcal{T}(\mathbb{X})$. Поскольку $U \cap S = \varnothing$, имеет место $y \notin U = U'$, т. е. $x \nleq y$, что доказывает равенство $S = {\downarrow}_{\mathbb{Y}} y \cap X$.

Наконец, пусть $z_0 \neq z_1$ в $\mathbb{Y}$. В силу T_0-отделимости пространства $\mathbb{X}$ достаточно рассмотреть случай, когда $z_0 \in X$ и $z_1 = y$. Если $z_0 \notin S$, то согласно предыдущему имеем $z_0 \in U' = U = X \backslash S \in \mathcal{T}'$ и $y \notin U'$. Если $z_0 \in \in S$, то по условию леммы z_0 не является наибольшим элементом множества S относительно порядка специализации. Значит, найдётся элемент $x \in S$, такой что $x \nleq z_0$, т. е. $x \in S \backslash {\downarrow} z_0$. Поэтому $z_0 \notin U_0 = X \backslash {\downarrow} z_0 \in \mathcal{T}(\mathbb{X})$ и $x \in U_0 \cap S \neq \varnothing$. Тогда $z_0 \notin U_0' = U_0 \cup \{y\} \in \mathcal{T}'$ и $y \in U_0'$. Таким образом, $\mathbb{Y}$ действительно является T_0-пространством. □

§ 3. Собранные пространства и u-расширения

ОПРЕДЕЛЕНИЕ 3.1 [1]. Расширение $\mathbb{X} \leq \mathbb{Y}$ топологических пространств называется *u-расширением*, если для любого пространства $\mathbb{Z}$ и произвольных непрерывных отображений $f, g \colon \mathbb{Y} \to \mathbb{Z}$ с условием $f|_{\mathbb{X}} = = g|_{\mathbb{X}}$ имеет место равенство $f = g$.

ТЕОРЕМА 3.2. *Для произвольного расширения $\mathbb{X} \leq \mathbb{Y}$ топологических T_0-пространств равносильны следующие условия:*

(i) *$\mathbb{X} \leq \mathbb{Y}$ является u-расширением;*

(ii) *для любого $U \in \mathcal{T}(\mathbb{X})$ существует единственное $V \in \mathcal{T}(\mathbb{Y})$, такое что $V \cap X = U$;*

(iii) *любой элемент $y \in Y$ является сопредельной точкой для множества X, т. е. $Y = \mathrm{sob}_{\mathbb{Y}} X$.*

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. (i) $\Rightarrow$ (ii) Предположим, что $U \in \mathcal{T}(\mathbb{X})$ и $V_0 \cap \cap X = V_1 \cap X = U$ для некоторых V_0, $V_1 \in \mathcal{T}(\mathbb{Y})$. Определим непрерывные отображения $f_i\colon \mathbb{Y} \to \mathbb{S}$, $i < 2$, по правилу

$$f_i(x) = \begin{cases} \top, & \text{если } x \in V_i, \\ \bot & \text{в противном случае.} \end{cases}$$

Очевидно,что $f_0|_{\mathbb{X}} = f_1|_{\mathbb{X}}$. Из определения u-расширения получаем равенство $f_0 = f_1$, т. е. $V_0 = V_1$.

(ii) $\Rightarrow$ (iii) Действительно, пусть $y \in V \in \mathcal{T}(\mathbb{Y})$. В силу предположения и леммы 1.1 получаем $V = \uparrow_{\mathbb{Y}}(V \cap X)$, т. е. $x \leq y$ для некоторого $x \in V \cap X \subseteq V$. В силу определения 2.1 это означает, что $y \in \mathrm{sob}_{\mathbb{Y}} X$.

(iii) $\Rightarrow$ (i) Эта импликация вытекает из леммы 2.7. $\Box$

Непосредственно из теоремы 3.2 вытекает

СЛЕДСТВИЕ 3.3. *Расширения $\mathbb{X} \leq \mathbb{Y}$ и $\mathbb{Y} \leq \mathbb{Z}$ будут u-расширениями тогда и только тогда, когда $\mathbb{X} \leq \mathbb{Z}$ является u-расширением.*

СЛЕДСТВИЕ 3.4. *Любое u-расширение $\mathbb{X} \leq \mathbb{Y}$ является существенным.*

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Используя теорему 3.2, нетрудно понять, что u-расширение $\mathbb{X} \leq \mathbb{Y}$ является строгим. Очевидно, любой элемент $x \in X$ является существенным для $\mathbb{X}$ в $\mathbb{Y}$, см. [2, опр. 1.2]. Проверим, что любой элемент $y \in Y \backslash X$ также является существенным для $\mathbb{X}$ в $\mathbb{Y}$. Пусть $y \in U \in \in \mathcal{T}(\mathbb{Y})$. По теореме 3.2, $x \leq y$ для некоторого $x \in U \cap X$. Если $y = \bot_{\mathbb{Y}}$, то $y = x \in X$, что противоречит выбору y. Если y не является наименьшим элементом в $\mathbb{Y}$, то полагая $x_0 = x$ и $U_0 = U \cap X$, получаем, что выполняется условие (2) из [2, опр. 1.2]. В силу [2, теор. 1.3] расширение $\mathbb{X} \leq \mathbb{Y}$ является существенным. $\Box$

ОПРЕДЕЛЕНИЕ 3.5. Подмножество $Y \subseteq X$ называется *собранным в* $\mathbb{X}$, если $Y = \mathrm{sob}_{\mathbb{X}} Y$. Топологическое T_0-пространство $\mathbb{X}$ называется *собранным*, если множество X является собранным в любом T_0-расширении $\mathbb{Y} \geq \mathbb{X}$.

Отметим, что вместо термина *собранное пространство* ранее использовались также термины: полное пространство, уравновешенное пространство, трезвое пространство.

ТЕОРЕМА 3.6. *Для любого T_0-пространства $\mathbb{X}$ равносильны следующие условия*:

(i) $\mathbb{X}$ *является собранным*;

(ii) *если $S \subseteq X$ — непустое замкнутое неприводимое множество в $\mathbb{X}$, то $S = {\downarrow_{\mathbb{X}}} x$ для некоторого $x \in S$*;

(iii) *для произвольного u-расширения $\mathbb{Y}_0 \leq \mathbb{Y}$ любое непрерывное отображение $f_0 \colon \mathbb{Y}_0 \to \mathbb{X}$ может быть продолжено до непрерывного отображения $f \colon \mathbb{Y} \to \mathbb{X}$*;

(iv) $\mathbb{X}$ *не имеет собственных u-расширений.*

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. (i) $\Rightarrow$ (ii) Эта импликация вытекает из леммы 2.8.

(ii) $\Rightarrow$ (iii) Для любого $y \in Y$ множество ${\downarrow} y \cap Y_0$ неприводимо в $\mathbb{Y}_0$ согласно лемме 2.3. По лемме 1.2 множество $f_0({\downarrow} y \cap Y_0)$ неприводимо в $\mathbb{X}$, т. е. существует элемент $h(y) \in X$, такой что $\mathrm{cl}_{\mathbb{X}}\big(f_0({\downarrow} y \cap Y_0)\big) = {\downarrow_{\mathbb{X}}} f(y)$. Очевидно, что $f(y) = f_0(y)$ для любого $y \in Y_0$. Кроме того, для любого $U \in \mathcal{T}(\mathbb{X})$ согласно лемме 1.1 и теореме 3.2 справедливы равенства

$$\begin{aligned}
f^{-1}(U) &= \{y \in Y \mid f(y) \in U\} \\
&= \{y \in X \mid f_0({\downarrow} y \cap Y_0) \cap U \neq \varnothing\} \\
&= \{y \in Y \mid {\downarrow} y \cap Y_0 \cap f_0^{-1}(U) \neq \varnothing\} \\
&= \{y \in Y \mid {\downarrow} y \cap f_0^{-1}(U) \neq \varnothing\} \\
&= {\uparrow_{\mathbb{Y}}} f_0^{-1}(U) \in \mathcal{T}(\mathbb{Y}),
\end{aligned}$$

поскольку $f_0^{-1}(U) \in \mathcal{T}(\mathbb{Y}_0)$.

(iii) $\Rightarrow$ (iv) Пусть $\mathbb{X} \leq \mathbb{Y}$ является u-расширением. Согласно предположению непрерывное отображение $\mathrm{id}_{\mathbb{X}} \colon \mathbb{X} \to \mathbb{X}$ продолжается до непрерывного отображения $f \colon \mathbb{Y} \to \mathbb{X}$. Без ограничения общности можно считать, что f действует из $\mathbb{Y}$ в $\mathbb{Y}$. Поскольку $f|_{\mathbb{X}} = \mathrm{id}_{\mathbb{X}}$, в силу определения 3.1 верно $f = \mathrm{id}_{\mathbb{Y}}$; в частности, $Y = f(Y) = X$.

(iv) $\Rightarrow$ (i) Эта импликация вытекает из леммы 2.8 и теоремы 3.2. $\square$

ТЕОРЕМА 3.7. *Для любого топологического T_0-пространства $\mathbb{X}$ существует наибольшее u-расширение $\mathbb{U}(\mathbb{X}) \geq \mathbb{X}$, которое единственно с точностью до гомеоморфизма над $\mathbb{X}$. Пространство $\mathbb{U}(\mathbb{X})$ является также наименьшим расширением $\mathbb{X}$, являющимся собранным пространством.*

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Согласно [3, след. 1] найдётся T_0-пространство $\mathbb{H}$, такое что расширение $\mathbb{X} \leq \mathbb{H}$ является наибольшим существенным расширением. Полагаем $\mathbb{U}(\mathbb{X}) = \langle U(\mathbb{X}), \mathcal{T}\rangle$, где $U(\mathbb{X}) = \mathrm{sob}_{\mathbb{H}} X$, а топология $\mathcal{T}$ индуцирована топологией $\mathcal{T}(\mathbb{H})$. Очевидно, что $U(\mathbb{X}) = \mathrm{sob}_{\mathbb{U}(\mathbb{X})} X$. По теореме 3.2, $\mathbb{X} \leq \mathbb{U}(\mathbb{X})$ является u-расширением. Предположим, что $\mathbb{X} \leq \mathbb{Y}$ является u-расширением. Тогда $\mathbb{X} \leq \mathbb{Y}$ является существенным расширением по следствию 3.4. Согласно [3, предлож. 4] существует гомеоморфное вложение $f\colon \mathbb{Y} \to \mathbb{H}$, тождественное на $\mathbb{X}$. По лемме 2.6 и теореме 3.2 справедливо

$$f(Y) = f(\mathrm{sob}_{\mathbb{Y}} X) \subseteq \mathrm{sob}_{\mathbb{H}} f(X) = \mathrm{sob}_{\mathbb{H}} X = U(\mathbb{X}).$$

Таким образом, f гомеоморфно вкладывает $\mathbb{Y}$ в $\mathbb{U}(\mathbb{X})$, т. е. $\mathbb{U}(\mathbb{X})$ является наибольшим u-расширением пространства $\mathbb{X}$. Тогда оно единственно с точностью до гомеоморфизма над $\mathbb{X}$. Кроме того, если $\mathbb{U}(\mathbb{X}) \leq \mathbb{Y}$ является u-расширением, то $\mathbb{X} \leq \mathbb{Y}$ является u-расширением по следствию 3.3. Согласно максимальности $\mathbb{U}(\mathbb{X})$ получаем, что $\mathbb{U}(\mathbb{X}) = \mathbb{Y}$. Поэтому $\mathbb{U}(\mathbb{X})$ не имеет собственных u-расширений. По теореме 3.6 пространство $\mathbb{U}(\mathbb{X})$ является собранным.

Наконец, пусть $\mathbb{X} \leq \mathbb{Z}$ и пространство $\mathbb{Z}$ является собранным. Согласно теоремам 3.2 и 3.6 тождественное вложение $\mathrm{id}_{\mathbb{X}}\colon \mathbb{X} \to \mathbb{Z}$ продолжается до непрерывного отображения $g\colon \mathbb{U}(\mathbb{X}) \to \mathbb{Z}$. В силу существенности расширения $\mathbb{X} \leq \mathbb{U}(\mathbb{X})$ заключаем, что g — это гомеоморфное вложение, а $\mathbb{U}(\mathbb{X})$ — наименьшее расширение $\mathbb{X}$, являющееся собранным пространством. $\square$

Наименьшее расширение топологического T_0-пространства $\mathbb{X}$, являющееся собранным, называется также *собрификацией* пространства $\mathbb{X}$ (и совпадает с наибольшим u-расширением пространства $\mathbb{X}$ по теор. 3.7). Имеется ещё один способ построения собрификации $\mathbb{X}$, см. [4, с. 363].

Пусть $\mathrm{Irr}\,(\mathbb{X})$ обозначает множество всех непустых замкнутых неприводимых подмножеств в $\mathbb{X}$. Для любого $U \in \mathcal{T}(\mathbb{X})$ полагаем

$$U^* = \{F \in \mathrm{Irr}\,(\mathbb{X}) \mid F \cap U \neq \varnothing\},$$

$$\mathcal{T}^* = \{U^* \mid U \in \mathcal{T}(\mathbb{X})\},$$

$$\mathbb{I}\mathrm{rr}\,(\mathbb{X}) = \langle \mathrm{Irr}\,(\mathbb{X}), \mathcal{T}^* \rangle.$$

ТЕОРЕМА 3.8. *Для произвольного топологического пространства $\mathbb{X}$ справедливы следующие утверждения.*

(i) $\mathcal{T}^*$ *является топологией на* $\mathrm{Irr}\,(\mathbb{X})$, *а* $\mathbb{I}\mathrm{rr}\,(\mathbb{X})$ — *собранным T_0-пространством.*

(ii) *Отображение* $g\colon \mathcal{T}(\mathbb{X}) \to \mathcal{T}^*$, $g\colon U \mapsto U^*$ *определяет изоморфизм решёток* $\langle \mathcal{T}(\mathbb{X}); \cup, \cap \rangle$ *и* $\langle \mathcal{T}^*; \cup, \cap \rangle$.

(iii) *Отображение* $\iota\colon \mathbb{X} \to \mathbb{I}\mathrm{rr}\,(\mathbb{X})$, $\iota\colon x \mapsto {\downarrow_{\mathbb{X}}} x$ *непрерывно. Если $\mathbb{X}$ — это T_0-пространство, то ι — гомеоморфное вложение. В этом случае* $\mathbb{I}\mathrm{rr}\,(\mathbb{X})$ *является наименьшим собранным T_0-расширением пространства $\iota(\mathbb{X})$.*

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. (i) Для произвольных открытых множеств $U_0,\ U_1 \in \mathcal{T}(\mathbb{X})$ и любого $F \in \mathrm{Irr}\,(\mathbb{X})$ условие $F \cap U_0 \cap U_1 = \varnothing$ влечёт включение $F \subseteq (X \backslash U_0) \cup (X \backslash U_1)$, откуда $F \subseteq X \backslash U_i$, т. е. $F \cap U_i = \varnothing$ для некоторого $i < 2$. Поэтому $U_0^* \cap U_1^* = (U_0 \cap U_1)^* \in \mathcal{T}^*$. Легко проверить, что для любого семейства открытых множеств $\{U_i \in \mathcal{T}(\mathbb{X}) \mid i \in I\}$ имеет место равенство

$$\bigcup \{U_i^* \mid i \in I\} = \Bigl(\bigcup \{U_i \mid i \in I\}\Bigr)^* \in \mathcal{T}^*.$$

Кроме того, $\varnothing^* = \varnothing$ и $X^* = \mathrm{Irr}\,(\mathbb{X})$, т. е. $\mathcal{T}^*$ является топологией.

Если множества $F_0,\ F_1 \in \mathrm{Irr}\,(\mathbb{X})$ различны, то множество $F_i \backslash F_{1-i}$ непусто для некоторого $i < 2$. Поэтому $F_i \in (X \backslash F_{1-i})^*$, $F_{1-i} \notin (X \backslash F_{1-i})^*$, т. е. пространство $\mathbb{I}\mathrm{rr}\,(\mathbb{X})$ является T_0-отделимым. Нетрудно заметить, что для любых $F_0,\ F_1 \in \mathrm{Irr}\,(\mathbb{X})$ справедливо

$$F_0 \leq_{\mathcal{T}^*} F_1 \text{ тогда и только тогда, когда } F_0 \subseteq F_1.$$

Предположим, что G является непустым замкнутым неприводимым подмножеством в $\mathbb{I}\mathrm{rr}\,(\mathbb{X})$. Замкнутость G означает, что для некоторого $U \in \mathcal{T}(\mathbb{X})$ верно

$$G = \{F \in \mathrm{Irr}\,(\mathbb{X}) \mid F \cap U = \varnothing\} = \{F \in \mathrm{Irr}\,(\mathbb{X}) \mid F \subseteq X \backslash U\}.$$

Покажем, что непустое замкнутое множество $X\backslash U$ неприводимо в $\mathbb{X}$. Действительно, пусть $X\backslash U \subseteq F_0 \cup F_1$ для некоторых замкнутых подмножеств $F_0, F_1 \subseteq X$. Тогда для любого $F \in G$ имеем $F \subseteq X\backslash U \subseteq F_0 \cup F_1$, и поэтому $F \subseteq F_0$ или $F \subseteq F_1$. Таким образом, имеет место равенство

$$G \subseteq \{F \in \mathrm{Irr}\,(\mathbb{X}) \mid F \subseteq F_0\} \cup \{F \in \mathrm{Irr}\,(\mathbb{X}) \mid F \subseteq F_1\}.$$

Для любого $i < 2$ имеем

$$\begin{aligned}\mathrm{Irr}\,(\mathbb{X})\backslash\{F \in \mathrm{Irr}\,(\mathbb{X}) \mid F \subseteq F_i\} &= \{F \in \mathrm{Irr}\,(\mathbb{X}) \mid F \cap (X\backslash F_i) \neq \varnothing\} \\ &= (X\backslash F_i)^* \in \mathcal{T}^*.\end{aligned}$$

В силу неприводимости множества G получаем, что $G \subseteq \{F \in \mathrm{Irr}\,(\mathbb{X}) \mid F \subseteq F_i\}$ для некоторого $i < 2$. Пусть $x \in X\backslash U$. Поскольку $\downarrow_{\mathbb{X}} x \in \mathrm{Irr}\,(\mathbb{X})$ и $\downarrow_{\mathbb{X}} x \subseteq X\backslash U$, то $\downarrow_{\mathbb{X}} x \in G$. Тогда

$$X\backslash U = \bigcup \big\{\downarrow_{\mathbb{X}} x \mid x \in X\backslash U\big\} \subseteq F_i,$$

т. е. $X\backslash U \in \mathrm{Irr}\,(\mathbb{X})$, и поэтому $G = \downarrow_{\mathcal{T}^*}(X\backslash U)$. Следовательно, пространство $\mathbb{I}\mathrm{rr}\,(\mathbb{X})$ является собранным по теореме 3.6.

(ii) Из доказанных выше равенств

$$U_0^* \cap U_1^* = (U_0 \cap U_1)^*,\ \bigcup\{U_i^* \mid i \in I\} = \Big(\bigcup\{U_i \mid i \in I\}\Big)^*$$

следует, что отображение g является решёточным гомоморфизмом „на“. Предположим, что $U_0 \nsubseteq U_1$ для некоторых $U_0, U_1 \in \mathcal{T}(\mathbb{X})$ и $x \in U_0\backslash U_1$. Тогда $\downarrow_{\mathbb{X}} x \in U_0^*\backslash U_1^*$, и отображение g взаимно однозначно.

(iii) Для произвольного открытого множества $U \in \mathcal{T}(\mathbb{X})$ имеем

$$\iota(U) = \{\downarrow_{\mathbb{X}} x \mid x \in U\} = \{F \in \mathrm{Irr}\,(\mathbb{X}) \mid F \cap U \neq \varnothing\} \cap \iota(X) \in \mathcal{T}^*_{\iota(\mathbb{X})},$$

$$\iota^{-1}(U^*) = \{x \in X \mid \downarrow_{\mathbb{X}} x \cap U \neq \varnothing\} = \{x \in X \mid x \in U\} = U,$$

поэтому отображение ι непрерывно и открыто. Если $\mathbb{X}$ является T_0-пространством, то ι взаимно однозначно, поскольку $x_0 \neq x_1$ влечёт $\downarrow_{\mathbb{X}} x_0 \neq \neq \downarrow_{\mathbb{X}} x_1$ для всех x_0, $x_1 \in X$. Далее, если $F \in U^*$ для некоторых $F \in \mathrm{Irr}\,(\mathbb{X})$ и $U \in \mathcal{T}(\mathbb{X})$, то согласно определению найдётся $x \in F \cap U$. В этом случае $\downarrow_{\mathbb{X}} x \subseteq F$ и $\downarrow_{\mathbb{X}} x \in U^*$, т. е. $\mathrm{Irr}\,(\mathbb{X}) = \mathrm{sob}_{\mathbb{I}\mathrm{rr}\,(\mathbb{X})} X$. По теореме 3.2 это означает, что $\iota(\mathbb{X}) \leq \mathbb{I}\mathrm{rr}\,(\mathbb{X})$ является u-расширением. Отождествляя $\mathbb{X}$ с $\iota(\mathbb{X})$, согласно теореме 3.7 можно считать, что $\mathbb{I}\mathrm{rr}\,(\mathbb{X})$ является наименьшим собранным расширением $\mathbb{X}$. $\square$

В заключение автор выражает свою благодарность М. Швидефски за помощь в оформлении настоящей работы.

ЛИТЕРАТУРА

1. *Yu. L. Ershov*, On the classification of (effective) φ-spaces, Ann. Pure Appl. Logic, **159**, No. 3 (2009), 285—291.
2. *Ю. Л. Ершов*, О существенных расширениях T_0-пространств. II, Алгебра и логика, **55**, № 1 (2016), 3—13.
3. *Ю. Л. Ершов*, О существенных расширениях T_0-пространств, Докл. РАН, **368**, № 3 (1999), 299—302.
4. *Ю. Л. Ершов*, Спектры колец и решеток, Сиб. матем. ж., **46**, № 2 (2005), 361—373.

Поступило 14 марта 2017 г.

Адрес автора:
ЕРШОВ Юрий Леонидович,
Ин-т матем. им. С. Л. Соболева СО РАН, пр. Ак. Коптюга, 4,
Новосибирский гос. ун-т, ул. Пирогова, 1,
г. Новосибирск, 630090, РОССИЯ.
e-mail: ershov@math.nsc.ru