N. V. Beilina, Nonlocal problem with integral condition for a fourth order equation, *Vestnik Samarskogo Gosudarstvennogo Universiteta. Estestvenno-Nauchnaya Seriya*, 2014, Issue 10, 26–37

https://www.mathnet.ru/eng/vsgu446

УДК 517.95

Н.В. Бейлина[1]

НЕЛОКАЛЬНАЯ ЗАДАЧА С ИНТЕГРАЛЬНЫМ УСЛОВИЕМ ДЛЯ УРАВНЕНИЯ ЧЕТВЕРТОГО ПОРЯДКА

В статье рассматривается нелокальная задача с интегральным по пространственной переменной условием для уравнения с частными производными четвертого порядка. Найдены условия на входные данные, при которых задача однозначно разрешима в пространстве Соболева. Доказательство единственности обобщенного решения базируется на полученных априорных оценках. Доказательство существования обобщенного решения проведено по следующей схеме: построена последовательность приближенных решений с помощью метода Галеркина, получены априорные оценки, позволившие выделить из нее слабо сходящуюся подпоследовательность, на завершающем этапе показано, что предел выделенной подпоследовательности является искомым обобщенным решением.

Ключевые слова: нелокальная задача, интегральное условие, пространство Соболева, обобщенное решение, разрешимость.

Введение

Внимание к нелокальным задачам обусловлено как теоретическим интересом, так и их прикладной значимостью. Хотя к настоящему времени уже разработаны некоторые методы обоснования разрешимости задач с нелокальными условиями, проблема поиска эффективных методов исследования нелокальных задач остается и сейчас актуальной. Нелокальные задачи для дифференциальных уравнений с интегральными условиями ставились и изучались многими авторами. Подробная библиография, а также постановка и методы исследования таких задач приведены в работе [1]. Следует отметить, что большинство работ посвящены исследованию уравнений второго порядка. Отметим здесь статьи [4–8]. Однако большое число задач о колебаниях стержней, пластин и балок приводит к уравненям более высоких порядков [9], что и послужило мотивацией постановки и исследования задачи с интегральными условиями для уравнения четвертого порядка.

Бейлина Наталья Викторовна (natalie@samdiff.ru), кафедра высшей математики и прикладной информатики, Самарский государственный технический университет, 443100, Российская Федерация, г. Самара, ул. Молодогвардейская, 244.

1. Постановка задачи

Рассмотрим уравнение

$$u_{tt} + u_{xxxx} - (a(x,t)u_x)_x + c(x,t)u = f(x,t) \tag{1.1}$$

в области $Q_T = (0,l)\times(0,T)$ и поставим для него задачу: найти функцию $u(x,t)$, удовлетворяющую в Q_T уравнению (1.1), начальным условиям

$$u(x,0) = 0, \quad u_t(x,0) = 0, \tag{1.2}$$

граничным условиям

$$u_{xx}(0,t) = u_{xx}(l,t) = 0 \tag{1.3}$$

и нелокальным условиям

$$u_{xxx}(0,t) - a(0,t)u_x(0,t) + \int\limits_0^l K_1(x,t)u(x,t)\,dx = h_1(t), \tag{1.4}$$

$$u_{xxx}(l,t) - a(l,t)u_x(l,t) + \int\limits_0^l K_2(x,t)u(x,t)\,dx = h_2(t). \tag{1.5}$$

Здесь $K_i(x,t)$ $h_1(t)$, $h_2(t)$, $f(x,t)$, $c(x,t)$ и $a(x,t)$ — заданные функции.

Следует отметить прикладную значимость поставленной задачи. К уравнению (1.1) приходят в задачах определения формы колебаний камертона и его частоты [9], при расчете устойчивости вращающихся валов, а также при изучении вибрации кораблей [10].

Перейдем к исследованию поставленной задачи. Стандартным способом получим тождество, определяющее обобщенное решение [11].

Определение. Под обобщенным решением задачи (1.1)–(1.5) будем понимать функцию $u(x,t)\in W_2^{2,1}(Q_T)$, удовлетворяющую условию $u(x,0)=0$ и тождеству

$$\int\limits_0^T\int\limits_0^l \left[-u_tv_t + u_{xx}v_{xx} + au_xv_x + cuv\right]\,dx\,dt - \int\limits_0^T v(l,t)\int\limits_0^l K_2(x,t)u(x,t)\,dx\,dt +$$
$$+\int\limits_0^T v(0,t)\int\limits_0^l K_1(x,t)u(x,t)\,dx\,dt = \int\limits_0^T\int\limits_0^l f(x,t)v(x,t)\,dx\,dt + \tag{1.6}$$
$$+\int\limits_0^T v(l,t)h_2(t)dt - \int\limits_0^T v(0,t)h_1(t)dt$$

для любой функции $v(x,t) \in \hat{W}_2^{2,1}(Q_T)$, где $\hat{W}_2^{2,1}(Q_T) = \{v(x,t) : v(x,t) \in \in W_2^{2,1}(Q_T),\ v(x,T)=0\}$.

2. Разрешимость поставленной задачи

Теорема.

Пусть выполняются условия: $a(x,t), a_t(x,t) \in C(\overline{Q}_T)$, $c(x,t) \in C^1(\overline{Q}_T)$, $K_i(x,t) \in C(\overline{Q}_T)$, $(K_i)_t(x,t) \in C(\overline{Q}_T)$,$h_i(t) \in L_2(0,T)$, $f(x,t) \in L_2(Q_T)$. Тогда существует единственное обобщенное решение задачи (1.1)–(1.5).

Доказательство теоремы.

Из условий теоремы следует, что найдутся такие положительные константы c_0, c_1, a_0, a_1, a_2, k_1, k_2, g_1, g_2, что выполняются неравенства:

$0 < c_0 \leqslant |c(x,t)| \leqslant c_1,\ 0 < a_0 \leqslant |a(x,t)| \leqslant a_1,\ \max|a_t(x,t)| \leqslant a_2,\ \max|K_1(x,t)| \leqslant$ $\leqslant k_1,\ \max|K_2(x,t)| \leqslant k_2,\ \left|\frac{\partial K_1(x,t)}{\partial t}\right| \leqslant g_1,\ \left|\frac{\partial K_2(x,t)}{\partial t}\right| \leqslant g_2.$

Доказательство единственности обобщенного решения проведем стандартным методом. Предположим, что существует два различных решения u_1 и u_2 задачи (1.1)–(1.5). Тогда функция $u = u_1 - u_2$ удовлетворяет тождеству

$$\int\limits_0^T\int\limits_0^l [-u_t v_t + u_{xx}v_{xx} + a u_x v_x + cuv]\,dx\,dt - \int\limits_0^T v(l,t)\int\limits_0^l K_2(x,t)u(x,t)\,dx\,dt +$$
$$+\int\limits_0^T v(0,t)\int\limits_0^l K_1(x,t)u(x,t)\,dx\,dt = 0. \qquad (2.1)$$

Возьмем в тождестве (2.1) в качестве $v(x,t)$ функцию вида

$$v(x,t) = \begin{cases} \int\limits_\tau^t u(x,\eta)d\eta, & 0 \leqslant t \leqslant \tau,\\ 0, & \tau \leqslant t \leqslant T. \end{cases} \qquad (2.2)$$

Очевидно, что $v(x,t) \in \hat{W}_2^{2,1}(Q_T)$ и $v_t(x,t) = u(x,t)$.

После преобразований тождество (2.1) примет вид:

$$\int\limits_0^l \left[u^2(x,\tau) + v_{xx}^2(x,0) + a(x,0)v_x^2(x,0)\right]\,dx = 2\int\limits_0^\tau\int\limits_0^l cuv\,dx\,dt - \int\limits_0^\tau\int\limits_0^l a_t v_x^2\,dx\,dt +$$
$$+\int\limits_0^\tau v(l,t)\int\limits_0^l K_2(x,t)u(x,t)\,dx\,dt - \int\limits_0^\tau v(0,t)\int\limits_0^l K_1(x,t)u(x,t)\,dx\,dt. \qquad (2.3)$$

Введем функцию $W(x,t) = \int\limits_0^t u_x(x,\eta)d\eta$. Тогда $v_x(x,t) = W(x,t) - W(x,\tau)$, $v_{xx}(x,0) = -W_x(x,\tau)$.

С учетом введенной функции $W(x,t)$ тождество (2.3) запишется следующим образом:

$$\int\limits_0^l \left[u^2(x,\tau) + W_x^2(x,\tau) + a(x,0)W^2(x,\tau)\right]\,dx = 2\int\limits_0^\tau\int\limits_0^l cuv\,dx\,dt - \int\limits_0^\tau\int\limits_0^l a_t v_x^2\,dx\,dt +$$
$$+\int\limits_0^\tau v(l,t)\int\limits_0^l K_2(x,t)u(x,t)\,dx\,dt - \int\limits_0^\tau v(0,t)\int\limits_0^l K_1(x,t)u(x,t)\,dx\,dt. \qquad (2.4)$$

Применяя к правой части (2.4) условия теоремы и элементарные неравенства, нетрудно получить оценки

$$2\int\limits_0^\tau\int\limits_0^l cuv\,dx\,dt \leqslant (c_1^2 + \tau^2)\int\limits_0^\tau\int\limits_0^l u^2\,dx\,dt,$$

$$\int_0^\tau\int_0^l v_x^2\,dx\,dt \leqslant \int_0^\tau\int_0^l W^2(x,t)\,dx\,dt + \tau\int_0^l W^2(x,\tau)\,dx,$$

$$\int_0^\tau\int_0^l a_t v_x^2\,dx\,dt \leqslant a_2\int_0^\tau\int_0^l W^2(x,t)\,dx\,dt + a_2\tau\int_0^l W^2(x,\tau)\,dx.$$

Оценим последние два слагаемые (2.4). Для этого заметим, что справедливо представление

$$v(l,t) = \int_x^l v_\xi(\xi,t)\,d\xi + v(x,t). \tag{2.5}$$

Возводя (2.5) в квадрат, применяя неравенство Коши — Буняковского и интегрируя полученное по t от 0 до τ, получим

$$\int_0^\tau v^2(l,t)\,dt \leqslant 2l\int_0^\tau\int_0^l (v_x(x,t))^2\,dx\,dt + \frac{2}{l}\int_0^\tau\int_0^l (v(x,t))^2\,dx\,dt. \tag{2.6}$$

Аналогично

$$\int_0^\tau v^2(0,t)\,dt \leqslant 2l\int_0^\tau\int_0^l (v_x(x,t))^2\,dx\,dt + \frac{2}{l}\int_0^\tau\int_0^l (v(x,t))^2\,dx\,dt.$$

В силу полученных оценок справедливо неравенство

$$\int_0^l \left[u^2(x,\tau) + (a_0 - (a_2+4l)\tau)W^2(x,\tau) + W_x^2(x,\tau)\right]\,dx \leqslant$$

$$\leqslant (c_1^2 + \tau^2 + 2\tau(k_1^2+k_2^2)\int_0^\tau\int_0^l u^2\,dx\,dt + (a_2+4l)\int_0^\tau\int_0^l W^2\,dx\,dt.$$

Выберем τ так, чтобы $a_0 - (a_2+4l)\tau > 0$. Пусть $a_0 - (a_2+4l)\tau > \frac{a_0}{2}$, т. е. $\tau \in \in [0; \frac{a_0}{2(a_2+4l)}]$. Тогда для этих τ

$$\int_0^l \left[u^2(x,\tau) + W_x^2 + \frac{a_0}{2}W^2(x,\tau)\right]\,dx \leqslant M\int_0^\tau\int_0^l \left(u^2+W^2\right)\,dx\,dt,$$

где $M = \max\{c_1^2+\tau^2+2\tau(k_1^2+k_2^2), a_2+4l\}$. Обозначим $m_0 = \min\{1, \frac{a_0}{2}\}$, $M_1 = \frac{M}{m_0}$. Тогда

$$\int_0^l \left[u^2(x,\tau) + W_x^2 + W^2(x,\tau)\right]\,dx \leqslant M_1\int_0^\tau\int_0^l \left(u^2+W^2\right)\,dx\,dt,$$

в частности

$$\int_0^l \left[u^2(x,\tau) + W^2(x,\tau)\right]\,dx \leqslant M_1\int_0^\tau\int_0^l \left(u^2+W^2\right)\,dx\,dt. \tag{2.7}$$

Применяя теперь к (2.7) неравенство Гронуолла [12], заключаем, что $u(x,t) = = 0$ для выбранных τ. Повторяя рассуждение для $\tau \in [\frac{a_0}{2(a_2+4l)}, \frac{a_0}{(a_2+4l)}]$, а затем продолжая этот процесс, убедимся в том, что $u(x,t)=0$ для всех $t\in[0,T]$. Таким образом, единственность обобщенного решения поставленной задачи доказана.

Перейдем к доказательству существования обобщенного решения. Пусть функции $w_k\in C^2[0,l]$ линейно независимы и образуют полную в $W_2^2(0,l)$ систему, причем $(w_k,w_l)_{L_2(0,l)}=\delta_{kl}$.

Будем искать приближенное решение задачи (1.1)–(1.5) в виде

$$u^m(x,t)=\sum_{k=1}^{m}c_k(t)w_k(x) \tag{2.8}$$

из соотношений:

$$\int_0^l\left[u^m_{tt}w_j+u^m_{xx}w_j''+au^m_xw_j'+cu^mw_j\right]dx-w_j(l)\int_0^lK_2(x,t)u^m(x,t)\,dx+$$

$$+w_j(0)\int_0^lK_1(x,t)u^m(x,t)\,dx\,dt=\int_0^lf(x,t)w_j\,dx. \tag{2.9}$$

Подставляя (2.8) в (2.9) и меняя порядок суммирования и интегрирования, приходим к системе обыкновенных дифференциальных уравнений второго порядка

$$c_j''(t)+\sum_{k=1}^{m}c_k(t)\int_0^l\left[w_k''w_j''+aw_k'w_j'+cw_kw_j+(w_j(0)K_1-w_j(l)K_2)w_k\right]dx= \tag{2.10}$$

$$=\int_0^lf(x,t)w_j\,dx.$$

Присоединив начальные условия

$$c_k(0)=0,\quad c_k'(0)=0, \tag{2.11}$$

получим задачу Коши для системы (2.10). В силу условий теоремы коэффициенты системы ограничены, а свободные члены $f_j(t)=\int\limits_0^lf(x,t)w_j\,dx$ принадлежат пространству $L_1(0,T)$. Но тогда задача Коши однозначно разрешима и $c_k''\in L_1(0,T)$.

Таким образом последовательность $\{u^m(x,t)\}$ приближенных решений построена [11]. Для дальнейших шагов в доказательстве нам потребуется априорная оценка, которая также будет полезна для доказательства возможности предельного перехода.

Умножим (2.9) на ${c'}_k(t)$ и просуммируем по j от 1 до m, а затем проинтегрируем по t от 0 до τ, получим

$$\int_0^\tau\int_0^l\left[u^m_{tt}u^m_t+u^m_{xx}u^m_{txx}+au^m_xu^m_{xt}+cu^mu^m_t\right]dx\,dt-\int_0^\tau u^m_t(l,t)\int_0^lK_2(x,t)u^m(x,t)\,dx\,dt+$$

$$+\int_0^\tau u^m_t(0,t)\int_0^lK_1(x,t)u^m(x,t)\,dx\,dt=\int_0^\tau\int_0^lf(x,t)u^m_t(x,t)\,dx\,dt. \tag{2.12}$$

Проинтегрировав по частям первые четыре слагаемых в левой части (2.12), приходим к следующему тождеству

$$\frac{1}{2}\int\limits_0^l \left[(u_t^m(x,\tau))^2+(u_{xx}^m(x,\tau))^2+a(x,\tau)(u_x^m(x,\tau))^2+c(x,\tau)(u^m(x,\tau))^2\right]dx=$$

$$=\int\limits_0^\tau u_t^m(l,t)\int\limits_0^l K_2(x,t)u^m(x,t)\,dx\,dt-\int\limits_0^\tau u_t^m(0,t)\int\limits_0^l K_1(x,t)u^m(x,t)\,dx\,dt+ \tag{2.13}$$

$$+\int\limits_0^\tau\int\limits_0^l fu_t^m\,dx\,dt+\frac{1}{2}\int\limits_0^l (u_t^m(x,0))^2\,dx+\frac{1}{2}\int\limits_0^l (u_{xx}^m(x,0))^2\,dx+\frac{1}{2}\int\limits_0^l c(x,0)(u^m(x,0))^2\,dx+$$

$$+\frac{1}{2}\int\limits_0^l a(x,0)(u_x^m(x,0))^2\,dx+\frac{1}{2}\int\limits_0^\tau\int\limits_0^l a_t(u_x^m)^2\,dx\,dt+\frac{1}{2}\int\limits_0^\tau\int\limits_0^l c_t(u^m)^2\,dx\,dt.$$

Оценим правую часть. Для этого сначала преобразуем первые два слагаемых правой части (2.13):

$$\int\limits_0^\tau u_t^m(l,t)\int\limits_0^l K_2(x,t)u^m(x,t)\,dx\,dt=u^m(l,\tau)\int\limits_0^l K_2(x,\tau)u^m(x,\tau)\,dx-$$

$$-u^m(l,0)\int\limits_0^l K_2(x,0)u^m(x,0)\,dx-\int\limits_0^\tau u^m(l,t)\int\limits_0^l \frac{\partial}{\partial t}K_2(x,t)u^m(x,t)\,dx\,dt-$$

$$-\int\limits_0^\tau u^m(l,t)\int\limits_0^l K_2(x,t)u_t^m(x,t)\,dx\,dt;$$

$$\int\limits_0^\tau u_t^m(0,t)\int\limits_0^l K_1(x,t)u^m(x,t)\,dx\,dt=u^m(0,\tau)\int\limits_0^l K_1(x,\tau)u^m(x,\tau)\,dx-$$

$$-u^m(0,0)\int\limits_0^l K_1(x,0)u^m(x,0)\,dx-\int\limits_0^\tau u^m(0,t)\int\limits_0^l \frac{\partial}{\partial t}K_1(x,t)u^m(x,t)\,dx\,dt-$$

$$-\int\limits_0^\tau u^m(0,t)\int\limits_0^l K_1(x,t)u_t^m(x,t)\,dx\,dt.$$

Применяя неравенство "Коши с ε", получим

$$\left|u^m(l,\tau)\int\limits_0^l K_2(x,\tau)u^m(x,)\,dx\right|\leqslant\frac{\varepsilon}{2}(u^m(l,\tau))^2+\frac{1}{2\varepsilon}\int\limits_0^l K_2^2(x,\tau)(u^m(x,\tau))^2\,dx.$$

Проводя те же рассуждения, что и при получении оценки (2.6), получим:

$$(u^m(l,\tau))^2\leqslant 2l\int\limits_0^l (u_x^m(x,\tau))^2\,dx+\frac{2}{l}\int\limits_0^l (u^m(x,\tau))^2\,dx.$$

$$(u^m(0,\tau))^2 \leqslant 2l\int\limits_0^l (u_x^m(x,\tau))^2\,dx + \frac{2}{l}\int\limits_0^l (u^m(x,\tau))^2\,dx.$$

Аналогично

$$(u^m(x,\tau))^2 \leqslant 2T\int\limits_0^\tau (u_t^m(x,t))^2\,dt + 2(u^m(x,0))^2.$$

Таким образом, в силу последних трех неравенств справедливы оценки

$$\left|u^m(l,\tau)\int\limits_0^l K_2(x,\tau)u^m(x,\tau)\,dx\right| \leqslant \varepsilon l\int\limits_0^l (u_x^m(x,\tau))^2\,dx + \frac{\varepsilon}{l}\int\limits_0^l (u^m(x,\tau))^2\,dx + \tag{2.14}$$

$$+\frac{Tk_2^2}{\varepsilon}\int\limits_0^\tau\int\limits_0^l (u_t^m(x,t))^2\,dx\,dt + \frac{Tk_2^2}{\varepsilon}\int\limits_0^l (u^m(x,0))^2\,dx;$$

$$\left|u^m(0,\tau)\int\limits_0^l K_1(x,\tau)u^m(x,\tau)\,dx\right| \leqslant \varepsilon l\int\limits_0^l (u_x^m(x,\tau))^2\,dx + \frac{\varepsilon}{l}\int\limits_0^l (u^m(x,\tau))^2\,dx + \tag{2.15}$$

$$+\frac{Tk_1^2}{\varepsilon}\int\limits_0^\tau\int\limits_0^l (u_t^m(x,t))^2\,dx\,dt + \frac{Tk_1^2}{\varepsilon}\int\limits_0^l (u^m(x,0))^2\,dx;$$

$$\left|\int\limits_0^\tau u^m(l,t)\int\limits_0^l \frac{\partial}{\partial t}K_2(x,t)u^m(x,t)\,dx\,dt\right| \leqslant$$

$$\leqslant 2l\int\limits_0^\tau\int\limits_0^l (u_x^m(x,t))^2\,dx\,dt + \left(\frac{2}{l} + lg_2^2\right)\int\limits_0^\tau\int\limits_0^l (u^m(x,t))^2\,dx\,dt; \tag{2.16}$$

$$\left|\int\limits_0^\tau u^m(l,t)\int\limits_0^l K_2(x,t)u_t^m(x,t)\,dx\,dt\right| \leqslant$$

$$\leqslant 2l\int\limits_0^\tau\int\limits_0^l (u_x^m(x,t))^2\,dx\,dt + \frac{2}{l}\int\limits_0^\tau\int\limits_0^l (u^m(x,t))^2\,dx\,dt + k_2^2 l\int\limits_0^\tau\int\limits_0^l (u_t^m(x,t))^2\,dx\,dt; \tag{2.17}$$

$$\left|\int\limits_0^\tau u^m(0,t)\int\limits_0^l K_1(x,t)u_t^m(x,t)\,dx\,dt\right| \leqslant$$

$$\leqslant 2l\int\limits_0^\tau\int\limits_0^l (u_x^m(x,t))^2\,dx\,dt + \frac{2}{l}\int\limits_0^\tau\int\limits_0^l (u^m(x,t))^2\,dx\,dt + k_1^2 l\int\limits_0^\tau\int\limits_0^l (u_t^m(x,t))^2\,dx\,dt; \tag{2.18}$$

$$\left|\int\limits_0^\tau u^m(l,t)\int\limits_0^l \frac{\partial}{\partial t}K_1(x,t)u^m(x,t)\,dx\,dt\right| \leqslant$$

$$\leqslant 2l\int\limits_0^\tau\int\limits_0^l (u_x^m(x,t))^2\,dx\,dt + \left(\frac{2}{l} + lg_1^2\right)\int\limits_0^\tau\int\limits_0^l (u^m(x,t))^2\,dx\,dt; \tag{2.19}$$

$$\left|u^m(l,0)\int\limits_0^l K_2(x,0)u^m(x,0)\,dx\right| \leqslant (u^m(l,0))^2 + k_2^2 l\int\limits_0^l (u^m(x,0))^2\,dx; \tag{2.20}$$

$$\left|u^m(0,0)\int\limits_0^l K_1(x,0)u^m(x,0)\,dx\right| \leqslant (u^m(0,0))^2 + k_1^2 l\int\limits_0^l (u^m(x,0))^2\,dx; \tag{2.21}$$

$$\left|\int\limits_0^\tau\int\limits_0^l f(x,t)u_t^m(x,t)\,dx\,dt\right| \leqslant \frac{1}{2}\int\limits_0^\tau\int\limits_0^l f^2(x,t)\,dx\,dt + \frac{1}{2}\int\limits_0^\tau\int\limits_0^l (u_t^m(x,t))^2\,dx\,dt; \tag{2.22}$$

$$\left|\int\limits_0^\tau\int\limits_0^l a_t(x,t)(u_x^m(x,t))^2\,dx\,dt\right| \leqslant a_2\int\limits_0^\tau\int\limits_0^l (u_x^m(x,t))^2\,dx\,dt; \tag{2.23}$$

$$\left|\int\limits_0^\tau\int\limits_0^l c_t(x,t)(u^m(x,t))^2\,dx\,dt\right| \leqslant c_2\int\limits_0^\tau\int\limits_0^l (u^m(x,t))^2\,dx\,dt. \tag{2.24}$$

Тогда в силу равенства (2.13) и неравенств (2.14)–(2.24) справедлива оценка

$$\frac{1}{2}\int\limits_0^l \left[(u_t^m(x,\tau))^2 + (u_{xx}^m(x,\tau))^2 + \varepsilon_0(u_x^m(x,\tau))^2 + \varepsilon_0(u^m(x,\tau))^2\right]\,dx \leqslant$$

$$\leqslant A_1\int\limits_0^\tau\int\limits_0^l (u^m)^2\,dx\,dt + A_2\int\limits_0^\tau\int\limits_0^l (u_x^m)^2\,dx\,dt + A_3\int\limits_0^\tau\int\limits_0^l (u_t^m)^2\,dx\,dt + \frac{1}{2}\int\limits_0^\tau\int\limits_0^l f^2\,dx\,dt + \tag{2.25}$$

$$+A_4\int\limits_0^l (u^m(x,0))^2\,dx + \frac{1}{2}\int\limits_0^l (u_t^m(x,0))^2\,dx + \frac{1}{2}\int\limits_0^l (u_{xx}^m(x,0))^2\,dx +$$

$$+\frac{a_1}{2}\int\limits_0^l (u_x^m(x,0))^2\,dx + (u^m(0,0))^2 + (u^m(l,0))^2,$$

где $\varepsilon_0 = \min\{\frac{a_0}{2l}; \frac{c_0 l}{2}\}$, $A_1 = \frac{8}{l} + l(g_1^2 + g_2^2) + \frac{c_2}{2}$, $A_2 = 4l + \frac{a_2}{2}$, $A_3 = \frac{T}{l}(k_1^2 + k_2^2) + l(k_1^2 + k_2^2) + \frac{1}{2}$, $A_4 = \frac{Tk_2^2}{\varepsilon} + l(k_1^2 + k_2^2) + \frac{Tk_1^2}{\varepsilon} + \frac{c_2}{2}$.

Обозначив $n = \min\{\varepsilon_0; \frac{1}{2}\}$, $M = \max\{A_1; A_2 A_3; 1\}$, $M_1 = \max\{A_4; \frac{1}{2}; \frac{a_1}{2}\}$, из (2.25) получим

$$n\int\limits_0^l \left[(u_t^m(x,\tau))^2 + (u_{xx}^m(x,\tau))^2 + (u_x^m(x,\tau))^2 + (u^m(x,\tau))^2\right]\,dx \leqslant$$

$$\leqslant M\int\limits_0^\tau\int\limits_0^l \left[(u_t^m)^2 + (u_{xx}^m)^2 + (u_x^m)^2 + (u^m)^2\right]\,dx\,dt + \frac{1}{2}\|f(x,t)\|^2_{L_2(Q_T)}. \tag{2.26}$$

Применяя теперь к (2.26) неравенство Гроноулла [12], а затем, интегрируя полученное неравенство по t от 0 до T, приходим к оценке

$$\|u^m(x,t)\|_{W_2^{2,1}(Q_T)} \leqslant N, \tag{2.27}$$

в которой N зависит от T, l и входных данных и не зависит от m.

Априорная оценка (2.27) позволяет выделить из последовательности $\{u^m(x,t)\}$подпоследовательность $\{u^{m_k}(x,t)\}$, сходящуюся слабо в $W_2^{2,1}(Q_T)$ и равномерно по $t \in [0;T]$ в норме L_2 [11] к некоторому элементу $u(x,t) \in W_2^{2,1}(Q_T)$.

Покажем, что эта функция и есть обобщенное решение поставленной задачи. Начальное условие будет выполнено в силу отмеченной сходимости $u^{m_k}(x,t)$ к $u(x,t)$ в $L_2(0,l)$ и того, что $u^{m_k}(x,0) \to 0$ в $L_2(0,l)$.

Проведенные рассуждения позволяют перейти к пределу в (2.9). Но сначала умножим каждое из равенств (2.9) на $h_j(t) \in C[0,T]$ такие, что $h_j(T) = 0$, просуммируем по j от 1 до m, затем проинтегрируем по t от 0 до T. После интегрирования по частям получим

$$\int_0^T \int_0^l [-u_t^m \eta_t + u_{xx}^m \eta_{xx} + a u_x^m \eta_x + c u^m \eta]\, dx\, dt - \int_0^T \eta(l,t) \int_0^l K_2(x,t) u^m(x,t)\, dx\, dt +$$

$$+ \int_0^T \eta(0,t) \int_0^l K_1(x,t) u^m(x,t)\, dx\, dt = \int_0^T \int_0^l f(x,t)\eta(x,t)\, dx\, dt + \int_0^l u_t^m(x,0)\eta(x,0)\, dx, \tag{2.28}$$

где

$$\eta(x,t) = \sum_{j=1}^m h_j(t) w_j(x).$$

Учитывая полученные выше включения и сходимости, перейдем в (2.28) к пределу при $m \to \infty$ и получим (1.6) для $v(x,t) = \eta(x,t)$. Но так как множество всех функций $\eta(x,t)$ плотно в $W_2^{2,1}(Q_T)$, то тождество выполняется для произвольной $v(x,t) \in \hat{W}(Q_T)$. Следовательно, предельная функция является обобщенным решением задачи (1.1)–(1.5).

Замечание. Однородность начальных условий (1.2) позволяет немного упростить вычисления и не ограничивает общности. Действительно, если при условиях $u(x,0) = \varphi(x), \quad u_t(x,0) = \psi(x)$ ввести новую неизвестную функцию $v = u - \varphi(x) - t\psi(x)$, то получим следующую задачу относительно функции v:

$$v_{tt} + v_{xxxx} - (a(x,t)v_x)_x + c(x,t)v = F(x,t),$$

$$v(x,0) = 0, \quad v_t(x,0) = 0,$$

$$v_{xx}(0,t) = v_{xx}(l,t) = 0$$

$$v_{xxx}(0,t) - a(0,t)v_x(0,t) + \int_0^l K_1(x,t)v(x,t)\, dx = g_1(t),$$

$$v_{xxx}(l,t) - a(l,t)v_x(l,t) + \int_0^l K_2(x,t)v(x,t)\, dx = g_2(t),$$

где

$$F(x,t) = f(x) - \varphi''(x) - t\psi'''(x) - \varphi''''(x) - t\psi''''(x) - c(\varphi(x) + t\psi(x)),$$

$$g_1(t) = -[\varphi'''(0) - a(0,t)\varphi'(0) + \int\limits_0^l K_1\varphi(x)\,dx + t\psi'''(0) - a(0,t)\psi'(0) + \int\limits_0^l K_1\psi(x)\,dx],$$

$$g_2(t) = \varphi'''(l) - a(l,t)\varphi'(0) + \int\limits_0^l K_2\varphi(x)\,dx + t\psi'''(l) - a(l,t)\psi'(l) + \int\limits_0^l K_2\psi(x)\,dx.$$

Литература

[1] Пулькина Л.С. Задачи с неклассическими условиями для гиперболических уравнений. Самара: Изд-во "Самарский университет", 2012.

[2] Avalishvili G., Avalishvili M., Gordeziani D. On Integral Nonlocal Boundary Value Problems for some Partial Differential Equations // Bulletin of the Georgian National Academy of Sciences. 2011. Vol. 5. № 1. P. 31–37.

[3] Ashyralyev A., Aggez N. On the Solution of Multipoint NBVP for Hyperbolic Equation with Integral Condition // Malaysian Journal of Mathematical Sciences. 2012. № 6(S). P. 111–121.

[4] Бейлин С.А. Смешанная задача с интегральным условием для волнового уравнения // Неклассические уравнения математической физики. Новосибирск: Изд-во Ин-та математики, 2005. С. 37–43.

[5] Bouziani A. Solution Forte d'un Problem Mixte avec Condition Non Locales pour une Classe d'equations Hyperboliques // Bull. de la Classe des Sciences, Academie Royale de Belgique. 1997. № 8. P. 53–70.

[6] Бейлина Н.В. О разрешимости задачи с интегральным условием для многомерного гиперболического уравнения // Вестник СамГУ. Естественнонаучная серия. 2010. № 2(78). С. 12–20.

[7] Пулькина Л.С. Краевые задачи для гиперболических уравнений с нелокальными условиями I и II рода // Известия вузов. Сер.: Математика. 2012. № 4. С. 74–83.

[8] Пулькина Л.С. Нелокальная задачадля гиперболического уравнения с интегральным условием I рода с ядрами, зависящими от времени // Известия вузов. Сер.: Математика. 2012. № 10. С. 32–44.

[9] Тихонов А.Н., Самарский А.А. Уравнения математической физики, 5-е изд. М.: Наука, 1977.

[10] Крылов А.Н. Вибрация судов. ОНТИ НКТП. Редакция судостроительной литературы. Л.; М., 1936.

[11] Ладыженская О.А. Краевые задачи математической физики. М.: Наука, 1973.

[12] Гординг Л. Задача Коши для гиперболических уравнений М.: Иностр. лит., 1961.

[13] Бейлина Н.В. Нелокальная задача с интегральным условиеми для псевдогиперболического уравнения // Вестник СамГУ. Естественнонаучная серия. 2008. № 2(61). С. 22–28.

References

[1] Pulkina L.S. *Problems with nonclassical conditions for hyperbolic equations.* Samara: Samara: Izd-vo "Samarskii universitet", 2012 [in Russian].

[2] Avalishvili G., Avalishvili M., Gordeziani D. On Integral Nonlocal Boundary Value Problems for some Partial Differential Equations. *Bulletin of the Georgian National Academy of Sciences*, 2011, Vol. 5, no. 1, pp. 31–37 [in Russian].

[3] Ashyralyev A., Aggez N. On the Solution of Multipoint NBVP for Hyperbolic Equation with Integral Condition. *Malaysian Journal of Mathematical Sciences*, 2012, no. 6(S), pp. 111–121.

[4] Beilin, S.A. Mixed problem with integral condition for the wave equation. *Neklassicheskie uravneniia matematicheskoi fiziki* [*Nonclassical equations of mathematical physics*]. Novosibirsk: Izd-vo In-ta matematiki, 2005, pp. 37–43 [in Russian].

[5] Bouziani A Solution Forte d'un Problem Mixte avec Condition Non Locales pour une Classe d'equations Hyperboliques. *Bull. de la Classe des Sciences, Academie Royale de Belgique*, 1997, no. 8, pp. 53–70 [in Russian].

[6] Beilina N.V. On solvability of a problem with integral condition for multidimensinal hyperbolic equation. *Vestnik SamGU. Estestvennonauchnaia seriia* [*Vestnik SamSU. Natural Science Series*], 2010, no. 2(78), pp. 12–20 [in Russian].

[7] Pul'kina L.S. Boundary-value problem for a hyperbolic equation with nonlocal conditions of the I and II kind. *Izvestiia vuzov. Matematika* [*News of Higher Educational Institutions. Mathematics*], 2012, no. 4, pp. 74–83 [in Russian].

[8] Pul'kina L.S. A nonlocal problem for a hyperbolic equation with integral conditions of the 1st kind with time-depended kernels. *Izvestiia vuzov. Matematika* [*News of Higher Educational Institutions. Mathematics*], 2012, no. 10, pp. 26–37 [in Russian].

[9] Tikhonov A.N., Samarskii A.A. Equations of mathematical physics, 5th ed. M., Nauka, 1977 [in Russian].

[10] Krylov A.N. Vibration of vessels. Department of Scientific and Technical Information of NKTP. Redaktsiia sudostroitel'noi literatury, Leningrad-Moscow, 1936 [in Russian].

[11] Ladyzhenskaya O.A. Boundary problems of mathematical physics. M., Nauka, 1973 [in Russian].

[12] Garding L. Gauchy's problem for hyperbolic equations. M., IL, 1961 [in Russian].

[13] Beilina N.V. A nonlocal problem with integral condition for pseudohyperbolic equation. *Vestnik SamGU. Estestvennonauchnaia seriia* [*Vestnik SamSU. Natural Science Series*], 2008, no. 2(61), pp. 22–28. [in Russian].

N.V. Beilina[2]

NONLOCAL PROBLEM WITH INTEGRAL CONDITION FOR A FOURTH ORDER EQUATION

In this paper, we consider a nonlocal problem with integral condition with respect to spacial variable for a forth order partial differential equation. The conditions on the data for unique solvability of the problem in Sobolev space are determined. Proving of uniqueness of generalized solution is based on acquired apriori estimates. To prove the solvability we use a following scheme: sequence of approximate solutions using Galerkin procedure is built, apriory estimates that allow to extract from it a convergent subsequence are received, on the final stage it is shown that the limit of subsequence is the required generalized solution.

Key words: nonlocal problem, integral condition, Sobolev space, generalized solution, solubility.

Статья поступила в редакцию $1/IX/2014$.

The article received $1/IX/2014$.

[2]*Beilina Natalia Viktorovna* (natalie@samdiff.ru), Department of Mathematics and Applied Informatics, Samara State Technical University, Samara, 443100, Russian Federation.